
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Математическая модель частичной приватизации предприятия

© 2020 г. В.И. Аркин, А.Д. Сластников

В.И. Аркин,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: arkin@cemi.rssi.ru

А.Д. Сластников,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: slast@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию 29.11.2019

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-010-00666).

Аннотация. В статье предложена математическая модель, в рамках которой можно исследовать проблему выбора доли (степени) приватизации предприятия. В основе модели лежат предположения о возможности выбора момента приватизации, а также о стохастическом характере потока прибыли предприятия и его скачкообразном изменении после приватизации. Для выбора доли приватизации взята схема двухуровневой оптимизации, в рамках которой государство стремится максимизировать интегральный бюджетный эффект от функционирования данного предприятия (до и после приватизации). В предположении, что прибыль предприятия моделируется случайным процессом геометрического броуновского движения, исследуется структура оптимальной доли приватизации. Для случая линейного мультипликатора приватизации получено полное описание областей (в пространстве параметров модели), внутри которых оптимальными решениями будут отсутствие приватизации, частичная приватизация и полная приватизация. Выведена формула для оптимальной доли приватизации, исследована ее зависимость от параметров прибыли предприятия, налоговой нагрузки, а также норматива дополнительных отчислений чистой прибыли в бюджет. В частности, показано, что с ростом неопределенности (волатильности) прибыли оптимальная доля приватизации должна снижаться.

Ключевые слова: приватизация, государственные предприятия, бюджетный эффект, неопределенность, доля приватизации.

Классификация JEL: C61, D81, G38.

DOI: 10.31857/S042473880010496-4

1. ВВЕДЕНИЕ

Массовая приватизация в странах Восточной и Центральной Европы, начавшаяся с 1990-х годов, породила ряд проблем, связанных с ее эффективностью и стратегией проведения. Мы не будем останавливаться на описании целей, форм, методов и эффективности проведения приватизации, на эту тему имеется обширная литература (например, (Приватизация в современном мире..., 2014; Полтерович, 2012; Privatization: Successes and failures, 2008) и др.), отметим лишь, что в современной России политика в сфере приватизации имеет два системных подхода — структурный и бюджетный. *Структурный* подход связан с сокращением прямого участия государства в экономике, структурными преобразованиями в отдельных секторах, стимулированием развития компаний, возможным привлечением стратегических инвесторов. *Бюджетный* — нацелен на использование приватизации как источника дополнительных доходов бюджета. Причем в последние годы бюджетный подход стал рассматриваться как доминирующий, а обеспечение максимальной бюджетной эффективности приватизации каждого объекта государственной собственности входит в программы приватизации многих регионов и муниципальных образований. Такой подход был поддержан и представителями бизнеса в качестве альтернативы повышению налогов как способа пополнения бюджета (Приватизация в современном мире..., 2014, т. 2, с. 232–234).

И хотя достаточно часто имеет место полная приватизация предприятий, наиболее распространенной формой в мире является все же частичная приватизация, при которой часть собственности предприятия остается государственной (Privatization..., 2008). Сохранение государственного контроля актуально в сфере естественных монополий, энергетики, инфраструктуры и т.п. Частичная

приватизация не ведет к радикальной смене собственности на предприятиях, но может оказывать значительное влияние на их финансовую и операционную деятельность. Сохранение контроля государства над частично приватизированными предприятиями позволяет избежать, например, нежелательную реструктуризацию и связанный с этим ряд социальных проблем и напряженностей.

Среди проблем, возникающих в ходе приватизационного процесса, отметим проблему оптимизации механизма приватизации. В ней можно выделить два аспекта: первый связан с выбором объектов для приватизации, исследованием необходимости и эффективности их приватизации, а второй — с оптимизацией отдельных элементов механизма приватизации, когда принципиальное решение о приватизации того или иного объекта уже принято.

С последней проблемой связана и данная работа по моделированию и анализу механизма частичной приватизации предприятий. Основным объектом нашего исследования будет предприятие, находящееся в государственной собственности (state-owned enterprise, SOE). Предполагается, что приватизация предприятия является эффективной, т.е. увеличит его прибыль. Предприятие функционирует в налоговой среде, и после приватизации изменяется не только его прибыль, но и выплаты предприятия в бюджет (налоги и дополнительные отчисления). Кроме того, свой вклад в прибыль предприятия вносит и фактор неопределенности. В данной статье изучается, как в описанных условиях оптимальным образом выбрать стратегию приватизации предприятия, т.е. время (срок) приватизации и степень (долю) приватизации.

В разд. 2 мы остановимся на работах, близких к изучаемым здесь проблемам. Предлагаемая модель, в рамках которой можно оптимизировать стратегию процесса приватизации предприятия, излагается в разд. 3. Нахождению оптимальной приватизации в этой модели и описанию ее свойств посвящен разд. 4, а в разд. 5 рассматривается частный случай модели, когда прибыль предприятия после приватизации линейно зависит от доли приватизации. Для этого случая получено полное описание структуры оптимальной доли приватизации и исследовано, как она зависит от параметров прибыли предприятия и налоговой системы.

2. ОБЗОР НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ ПО ЧАСТИЧНОЙ ПРИВАТИЗАЦИИ ПРЕДПРИЯТИЙ

Различные аспекты процессов приватизации нашли широкое отражение в научной литературе, однако исследований, связанных с приватизацией на микроуровне (т.е. отдельных предприятий), не так много. Особенно это касается вопросов оптимизации сроков и степени приватизации, которые являются основными в настоящей статье.

Достаточно простая модель определения оптимальных сроков приватизации рассмотрена в работе (Андерсон, 2004). Ее особенность — детерминированный характер потока чистого дохода предприятия и наличие налогообложения, причем налоговые ставки различаются до и после приватизации. Предполагая, что после приватизации поток чистого дохода изменяется, автор выписывает условия первого порядка для момента приватизации, при котором чистый дисконтированный доход предприятия до и после приватизации (на бесконечном горизонте времени) максимален. В работе также проводится сравнительный анализ влияния на оптимальный момент приватизации характера изменения чистого дохода (после приватизации), а также некоторых налоговых ставок.

Модель оптимизации момента приватизации отдельной фирмы разрабатывалась в (Li et al., 2005). Авторы показали, что оптимальный выбор времени, когда следует проводить приватизацию, зависит от таких параметров, как издержки, неопределенность, риск, показатели деятельности фирмы до и после приватизации, скорость перестройки фирмы после приватизации, которые, в свою очередь, зависят от внешних условий и от характеристик фирмы.

В (Chavanasporn, Ewald, 2012) для определения оптимального момента передачи доли бизнеса государственной фирмы в частный сектор (для выполнения некоторого проекта) авторы используют метод реальных опционов, рассматривая в качестве критерия дисконтированный чистый доход (NPV) частной фирмы. Прибыль государственной фирмы описывается случайным процессом типа Орнштейна—Уленбека и меняется после приватизации. Авторы также рассматривают целевую функцию государства как дисконтированную прибыль от государственной части фирмы (всей фирмы до момента приватизации и ее доли после этого момента) с учетом инвестиций, сделанных в момент приватизации. В работе ставится задача нахождения доли приватизации, при которой эта функция достигает максимума и значение такой доли вычисляется для конкретного примера.

Методы реальных опционов использовались для исследования ситуации, когда государство имеет возможность отложить приватизацию компании на какое-то время в ожидании того, что при наступлении некоторых благоприятных событий ценность компании для инвесторов станет более высокой. Так, ряд работ посвящен оптимизации времени размещения первоначального публичного предложения акций (initial public offering, IPO) на рынке в ходе приватизации, когда компания в каждый момент времени решает, надо ли ей становиться публичной (выходя на IPO), получая при этом определенные преимущества (Brada, Ma, 2007; Benninga et al., 2005; Draho, 2000). Существенную роль в этих исследованиях играет неопределенность денежных потоков компании и факторы риска. Показано, в частности, что неоптимальное определение сроков приватизации может привести к значительным потерям для государства и инвесторов (Brada, Ma, 2007).

Несколько в стороне от тематики данной статьи лежит круг работ по частичной приватизации в смешанной олигополии, где сосуществуют компании с разными формами собственности: государственные, частные и смешанные (частично приватизированные). Одна из основных рассматриваемых в этих исследованиях проблем — выбор долей собственности, принадлежащей государству и частному инвестору, а также влияние этих долей на различные экономические показатели (например, общественное благосостояние). В рамках различных моделей равновесного типа (например, олигополии Курно или модели Штакельберга) проблема оптимизации доли приватизации (по критерию взвешенной суммы прибыли и выпуска продукции) исследовалась, например, в статьях (Matsumura, 1998; Huang et al., 2006; Chen et al., 2009; Benabess, 2012). Общим моментом, характерным для большинства таких работ, является вывод о том, что при разумных условиях ни полная приватизация, ни ее отсутствие не будут оптимальными. Применительно к дуополии в добывающей отрасли эффективность и другие свойства частичной приватизации исследовались, например, в (Fridman, 2018).

3. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В качестве объекта приватизации рассматривается государственное предприятие, функционирующее в рамках некоторой системы налогообложения. Владелец основных средств предприятия является государство (в РФ это может быть федеральный центр, субъект федерации или муниципальное образование). После выплаты всех полагающихся налогов и иных обязательных платежей государственные предприятия обязывают перечислять в бюджет определенную долю оставшейся у них прибыли за вычетом налогов и других обязательных платежей. Величина этой доли устанавливается собственником предприятия и может быть довольно большой (например, 50%).

3.1. Модель

Предполагается, что начиная с какого-то (нулевого) момента времени появляется возможность (частичной) приватизации предприятия. После приватизации меняется прибыль предприятия (и соответствующие поступления в бюджет), кроме того, государство получает доход и непосредственно от самой сделки.

Считается, что приватизация происходит одномоментно, а покупатель обладает определенной свободой выбора времени сделки (момента приватизации). Если τ обозначает момент приватизации, то прибыль предприятия до приватизации моделируется случайным процессом $(\pi_t^1, 0 \leq t < \tau)$, а после приватизации — случайным процессом $(\pi_t^2, t \geq \tau)$, которые заданы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ с потоком σ -алгебр $(\mathbb{F}_t, t \geq 0)$, характеризующих информацию, доступную в момент времени t . Период функционирования предприятия считается для простоты бесконечным.

При выборе момента приватизации τ покупатель исходит из критерия максимизации показателя NPV, в который включены ожидаемая приведенная прибыль от приватизируемой части предприятия (с учетом налогов), а также расходы на приватизацию — цена приватизационной сделки P , которую покупатель платит государству (поступления в бюджет). Таким образом, NPV покупателя $N(\tau, \mu)$ от приватизированного предприятия равен

$$N(\tau, \mu) = \mathbf{E} \left(\int_{\tau}^{\infty} (1 - \gamma) \mu \pi_t^2 e^{-\rho t} dt - P e^{-\rho \tau} \right), \quad (1)$$

где γ — коэффициент налоговой нагрузки (доля всех налогов в прибыли)¹, μ — приватизируемая доля основных фондов предприятия, ρ — ставка дисконтирования, а E — знак математического ожидания.

Хотя все процессы прибыли предприятия будут в дальнейшем предполагаться положительными, отметим, что описание интегральных налогов (и приведенной прибыли) в виде (1) имеет смысл и в случае, когда процессы прибыли не обязательно положительные. Связано это с принципом переноса убытков на будущее, который существует во многих налоговых системах (в том числе в российской) и приводит к частичному возмещению убытков.

Отталкиваясь от упомянутого выше бюджетного приоритета государственной политики в сфере приватизации, в качестве целевой функции государства рассматривается *бюджетный эффект* $B(\tau, \mu)$, представляющий ожидаемые приведенные (к нулевому моменту времени) поступления в бюджет от деятельности предприятия, у которого в момент времени τ приватизируется доля основных средств μ . Этот бюджетный эффект в модели состоит из трех частей:

- 1) ожидаемая приведенная доля $\tilde{\gamma}$ прибыли предприятия до момента приватизации: $\tilde{\gamma} = \gamma + \theta(1 - \gamma)$, где θ — доля дополнительных отчислений в бюджет оставшейся чистой прибыли;
- 2) доход от продажи части предприятия в момент приватизации;
- 3) ожидаемые приведенные налоговые поступления в бюджет после частичной приватизации предприятия.

Таким образом,

$$B(\tau, \mu) = E \left(\int_0^{\tau} \tilde{\gamma} \pi_t^1 e^{-\rho t} dt + P e^{-\rho \tau} + \int_{\tau}^{\infty} [\gamma + (1 - \mu)(1 - \gamma)\theta] \pi_t^2 e^{-\rho t} dt \right). \quad (2)$$

3.2. Задача оптимизации

Взаимодействие между государством и покупателем в процессе приватизации будет описываться следующей схемой двухуровневой оптимизации.

На нижнем уровне находится покупатель (частный инвестор), который при заданной доле приватизации μ стремится максимизировать NPV от своей доли предприятия, выбирая для этого оптимальный момент приватизации $\tau^*(\mu)$ как решение оптимизационной задачи:

$$N(\tau, \mu) \rightarrow \max_{\tau}, \quad (3)$$

где максимум берется по всем марковским (относительно потока $(\mathbb{F}_t, t \geq 0)$) моментам τ .

На верхнем уровне располагается государство, которое, зная принцип оптимального выбора покупателем момента приватизации $\tau^*(\mu)$, выбирает оптимальную долю частичной приватизации μ^* так, чтобы максимизировать бюджетный эффект $B(\tau^*(\mu), \mu)$ по всем допустимым долям μ :

$$B(\tau^*(\mu), \mu) \rightarrow \max_{\mu}. \quad (4)$$

Такая оптимизационная схема позволяет оценить потенциальные возможности частичной приватизации предприятий с точки зрения наполнения бюджета. В данной схеме решение о сроке приватизации принимает покупатель, но государство косвенным образом влияет на это решение, определяя наиболее выгодную (с бюджетной точки зрения) долю приватизируемого имущества.

Решение $(\tau^*(\mu^*), \mu^*)$ задачи двухуровневой оптимизации (3)–(4) можно интерпретировать как равновесие по Штакельбергу в приватизационной игре между частным инвестором (покупателем) и государством. В рамках такой теоретико-игровой интерпретации стратегией первого игрока (покупателя) является момент приватизации предприятия $\tau^*(\mu)$, а стратегией второго игрока (государства) — доля приватизации μ . Предполагается, что второй игрок знает правила (принципы), по которым первый игрок находит свои оптимальные решения при любых стратегиях второго игрока.

¹ Предполагается, что эта доля не меняется со временем.

Отметим, что модель, близкая к предложенной выше, появлялась в (Аркин, Сластников, 2019) для случая унитарного предприятия, когда частичная приватизация невозможна. Предметом поиска при этом были оптимальный момент приватизации и цена приватизационной сделки.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЧАСТИЧНОЙ ПРИВАТИЗАЦИИ

Для того чтобы найти решение в сформулированной выше задаче двухуровневой оптимизации, нам понадобятся некоторые формальные предположения.

4.1. Математические предположения

Будем считать, что поток прибыли предприятия до приватизации π_t^1 описывается процессом геометрического броуновского движения:

$$\pi_t^1 = \pi_0 \exp\{(\alpha - 0.5\sigma^2)t + \sigma w_t\}, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

где начальное значение π_0 задано, а $(w_t, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Прибыль предприятия после приватизации получается умножением прибыли неприватизированного предприятия на некоторый (детерминированный) коэффициент, зависящий от доли приватизации μ :

$$\pi_t^2 = k(\mu)\pi_t^1, \quad t \geq \tau. \quad (6)$$

Таким образом, в момент приватизации происходит скачок потока прибыли — он мгновенно изменяется в $k(\mu)$ раз. Такой скачок можно связывать как с перестройкой деятельности предприятия после частичной приватизации, так и с определенными условиями, которые выдвигает перед частным владельцем государство.

На рис. 1 условно изображена динамика потока прибыли предприятия до и после приватизации (в момент τ). Функцию $k(\mu)$ можно (с некоторой долей условности) назвать *мультипликатором приватизации*. Предполагается, что $k(0) = 1$ (при отсутствии приватизации прибыль не меняется) и $k'(\mu) \geq 0$, т.е. чем больше степень приватизации предприятия μ , тем больше становится его прибыль.

Моделирование прибыли в виде процесса геометрического броуновского движения широко используется в теории реальных опционов и финансовой математике (см., например, (Dixit, Pindyck, 1994; Ширяев, 1998)). Параметры геометрического броуновского движения имеют естественную экономическую интерпретацию: они являются мгновенным темпом среднего прироста и дисперсии (волатильности) прироста процесса. Поскольку время жизни предприятия не ограничено, для корректности надо считать, что $\alpha < \rho$.

Допустимые доли приватизации находятся в естественном диапазоне $0 \leq \mu \leq 1$. Стоимость сделки приватизации для покупателя пропорциональна приватизируемой доле $P = \mu Q$, где Q можно интерпретировать как стоимость приватизации всего предприятия.

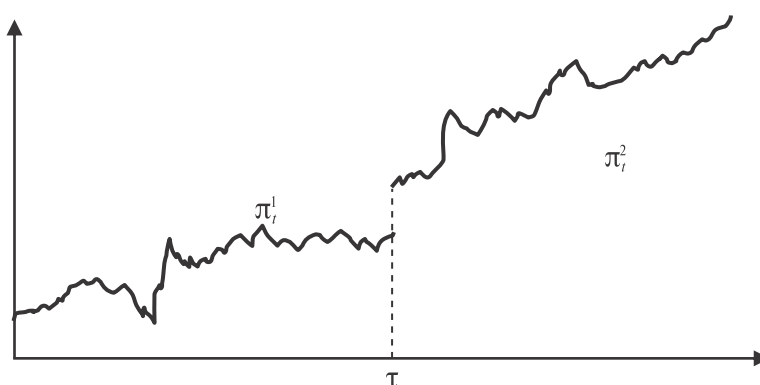


Рис. 1. Динамика потока прибыли предприятия до и после приватизации

4.2. Оптимальный момент приватизации

Сделанные предположения дают возможность найти решение задачи двухуровневой оптимизации (3)–(4) в явном виде. Из предположений (5)–(6) и свойств геометрического броуновского движения имеем

$$N(\tau, \mu) = E \left(E \left(\int_{\tau}^{\infty} (1-\gamma) \mu \pi_t^2 e^{-\rho t} dt \middle| \mathbb{F}_{\tau} \right) - P e^{-\rho \tau} \right) = E \left(\frac{1-\gamma}{\rho-\alpha} \mu \pi_{\tau}^2 - \mu Q \right) e^{-\rho \tau} =$$

$$= \mu E \left(\frac{1-\gamma}{\rho-\alpha} k(\mu) \pi_{\tau}^1 - Q \right) e^{-\rho \tau}, \quad (7)$$

$$B(\tau, \mu) = E \left(\int_0^{\infty} \tilde{\gamma} \pi_t^1 e^{-\rho t} dt + \int_{\tau}^{\infty} ([\gamma + (1-\mu)(1-\gamma)\theta] \pi_t^2 - \tilde{\gamma} \pi_t^1) e^{-\rho t} dt + P e^{-\rho \tau} \right) =$$

$$= \frac{\tilde{\gamma}}{\rho-\alpha} \pi_0 + E \left(\int_{\tau}^{\infty} c(\mu) \pi_t^1 e^{-\rho t} dt + \mu Q e^{-\rho \tau} \right) = \frac{\tilde{\gamma}}{\rho-\alpha} \pi_0 + E \left(\frac{c(\mu)}{\rho-\alpha} \pi_{\tau}^1 + \mu Q \right) e^{-\rho \tau}, \quad (8)$$

где $c(\mu) = k(\mu)[\gamma + (1-\mu)(1-\gamma)\theta] - \tilde{\gamma} = [k(\mu) - 1]\tilde{\gamma} - \mu k(\mu)(\tilde{\gamma} - \gamma)$.

Таким образом, задача выбора момента приватизации (3) представляет собой задачу оптимальной остановки геометрического броуновского движения π_t^1 с линейной целевой функцией (7). Известно, что оптимальный момент остановки в такой задаче является первым моментом выхода случайного процесса за некоторый уровень (см., например, (Dixit, Pindyck, 1994) или (Аркин, Сластников, 2007) — для более общего случая). Таким образом, оптимальный момент приватизации $\tau^*(\mu)$ равен первому моменту времени, когда текущая прибыль π_t^1 неприватизированного предприятия превысит некоторый уровень:

$$\tau^*(\mu) = \min\{t \geq 0 : \pi_t^1 \geq \pi^*(\mu)\}, \quad \pi^*(\mu) = \frac{\beta}{\beta-1} \times \frac{\rho-\alpha}{1-\gamma} \times \frac{Q}{k(\mu)}, \quad (9)$$

где β — положительный корень квадратного уравнения $0,5\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \rho = 0$, причем $\beta > 1$, поскольку $\rho > \alpha$.

Чтобы избежать вырожденного случая $\tau^*(\mu) = 0$ (моментальная приватизация), будем считать, что $\pi_0 < \pi^*(1)$, это обеспечивает (в силу монотонности оптимального уровня $\pi^*(\mu)$ по μ) положительность оптимального момента приватизации для всех допустимых долей $0 \leq \mu \leq 1$.

4.3. Оптимальная доля приватизации

Зная оптимальный момент приватизации, можно найти соответствующий бюджетный эффект (как функцию от доли приватизации). Из соотношений (8) и (9) получаем

$$B(\tau^*(\mu), \mu) = \frac{\pi_0 \tilde{\gamma}}{\rho-\alpha} + E \left(\mu Q + c(\mu) \pi_{\tau^*(\mu)}^1 \right) e^{-\rho \tau^*(\mu)} = \frac{\pi_0 \tilde{\gamma}}{\rho-\alpha} + (\mu Q + c(\mu) \pi^*(\mu)) \left(\frac{\pi_0}{\pi^*(\mu)} \right)^{\beta} =$$

$$= \frac{\pi_0 \tilde{\gamma}}{\rho-\alpha} + \left(\frac{\pi_0 (1-\gamma)}{D(\rho-\alpha)} \right)^{\beta} Q^{1-\beta} b(\mu), \quad (10)$$

где $b(\mu) = k^{\beta-1}(\mu) [\mu k(\mu) + Dc(\mu)/(1-\gamma)]$, $D = \beta/(\beta-1)$. Таким образом, задача максимизации бюджетного эффекта (4) сводится к максимизации функции $b(\mu)$, определенной в (10):

$$b(\mu) \rightarrow \max_{0 \leq \mu \leq 1}. \quad (11)$$

Далее будем обозначать решение задачи (11) через μ^* , а аргумент у функций $k(\mu)$, $c(\mu)$ и их производных иногда ради краткости опускать. Остановимся более подробно на условиях, при которых этот максимум будет достигаться не в крайних точках, которые соответствуют отсутствию приватизации ($\mu = 0$) или полной приватизации ($\mu = 1$).

По определению функций $b(\mu)$ и $c(\mu)$ имеем

$$\begin{aligned} b'(\mu) &= (\beta - 1)k^{\beta-2}k'(\mu k + Dc/(1-\gamma)) + k^{\beta-1}(k + \mu k' + Dc'/(1-\gamma)) \propto \\ &\propto \beta k' \mu k + (\beta - 1)k' Dc/(1-\gamma) + k^2 + k Dc'/(1-\gamma) = \\ &= \beta k' \mu k + (\beta - 1)k' D[k(-\mu\Delta + \tilde{\gamma}) - \tilde{\gamma}]/(1-\gamma) + k^2 + k D[k'(-\mu\Delta + \tilde{\gamma}) - k\Delta]/(1-\gamma) = \\ &= \beta k' k [\mu(1 - D\theta) + D(\theta + \gamma)] - (\beta - 1)k' D(\theta + \gamma) + k^2(1 - D\theta), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Delta = \tilde{\gamma} - \gamma = \theta(1 - \gamma)$, $\hat{\gamma} = \gamma/(1 - \gamma)$, а символ $\propto$ означает положительную пропорциональность.

Если $D\theta \leq 1$, то $\beta k' k [\mu(1 - D\theta) + D(\theta + \hat{\gamma})] \geq \beta k' D(\theta + \hat{\gamma})$ и, следовательно, $b'(\mu) > 0$, т.е. функция $b(\mu)$ будет возрастающей. В этом случае $\mu^* = 1$, тем самым оптимальной (с точки зрения бюджетного эффекта) будет *полная приватизация*. В свою очередь, условие $D\theta \leq 1$ может быть записано как

$$\beta \geq \beta_0 := \frac{1 - \gamma}{1 - \tilde{\gamma}} = \frac{1}{1 - \theta}. \quad (13)$$

А. Для того чтобы оптимальная доля приватизации была *положительной*, тем самым приватизация принесла бы дополнительные поступления в бюджет, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_0 k(\mu_0) + Dc(\mu_0)/(1 - \gamma) > 0 \text{ для некоторого } \mu_0 > 0. \quad (14)$$

Поскольку $k(0) = 1$, $c(0) = 0$, достаточным условием для (14) является $b'(0) > 0$, что приводит к неравенству $1 + D(\theta + \hat{\gamma})k'(0) - D\theta > 0$, или

$$\beta > \beta_1 := 1 / (1 - \theta + k'(0)(\theta + \hat{\gamma})). \quad (15)$$

Заметим, что $\beta_1 \leq \beta_0$, а если $k'(0) \geq \theta/(\theta + \gamma)$, то $\beta_1 < 1$ и неравенство (15) выполняется всегда. Значение $k'(0)$ можно интерпретировать как некоторый показатель эффективности «маленькой приватизации», характеризующий возрастание потока прибыли для малой доли приватизации. Если этот показатель превышает некоторое пороговое значение, то оптимальная доля приватизации всегда будет положительной.

Б. Пусть теперь $D\theta > 1$. Изучим условия, при которых $\mu^* < 1$, т.е. полная приватизация не является оптимальной с точки зрения бюджетного эффекта. Достаточным условием для этого будет неравенство $b'(1) < 0$, что в силу соотношений (12) равносильно неравенству

$$\beta k'(1)[k(1)(1 + D\hat{\gamma}) - \theta - \hat{\gamma}] < k^2(1)(D\theta - 1), \text{ или } \theta > \frac{\beta k'(1)[k(1)(1 + D\hat{\gamma}) - \hat{\gamma}] + k^2(1)}{\beta k'(1) + Dk^2(1)}. \quad (16)$$

Таким образом, если доля дополнительных отчислений в бюджет от чистой прибыли достаточно велика, полная приватизация не будет оптимальным решением.

В. Обратимся к исследованию случая $0 < \mu^* < 1$, т.е. к частичной приватизации в собственном смысле этого слова. Для этого будем предполагать, что одновременно выполнены условия (15) и (16) и, кроме того, $D\theta > 1$. Заметим, что последнее неравенство и (15) можно объединить в одно:

$$\beta_1 < \beta < \beta_0, \text{ или } \frac{1}{1 - \theta + k'(0)(\theta + \gamma)} < \beta < \frac{1}{1 - \theta}.$$

В силу этих условий $b'(0) > 0$, $b'(1) < 0$, поэтому существует точка $0 < \mu^* < 1$ такая, что $b'(\mu^*) = 0$. Если предположить, что эта точка будет единственным корнем уравнения $b'(\mu) = 0$, то в ней будет достигаться максимум функции $b(\mu)$.

Таким образом, объединяя приведенные выше результаты, приходим к следующей теореме, описывающей свойства оптимальной доли приватизации.

Теорема. Решение μ^* оптимизационной задачи (4) обладает следующими свойствами:

1) если $\beta \geq \beta_0$, где β_0 определено в (13), то $\mu^* = 1$;

2) если $\beta < \beta_0$ и выполнено условие (16), то $\mu^* < 1$;

3) если $\beta \geq \beta_1$, где β_1 определено в (15), то $\mu^* > 0$;

4) если $\beta_1 < \beta < \beta_0$, выполнено условие (16) и уравнение $b'(\mu) = 0$, где функция $b'(\mu)$ приведена в (12), имеет единственный корень $\bar{\mu}$, то $\mu^* = \bar{\mu}$, при этом $0 < \mu^* < 1$.

Отметим, что сформулированная теорема не дает полной характеристики оптимальной доли приватизации, так как приведенные в ней утверждения 1)–4) и соответствующие условия не исчерпывают всего множества параметров модели. В частности, условия, при которых приватизация не является оптимальной (в смысле бюджетного эффекта), т.е. $\mu^* = 0$, в общем случае нельзя записать в компактной и интерпретируемой форме. Однако для случая линейного мультипликатора приватизации $k(\mu)$, который будет рассмотрен ниже, можно получить полное описание структуры оптимальной доли приватизации.

5. ЛИНЕЙНЫЙ МУЛЬТИПЛИКАТОР ПРИВАТИЗАЦИИ

Рассмотрим случай, когда функция $k(\mu)$, характеризующая изменение потока прибыли после приватизации предприятия, является линейной, т.е. $k(\mu) = 1 + \delta\mu$, где величину $\delta > 0$ можно рассматривать как *показатель эффективности приватизации*.

5.1. Структура оптимальной доли приватизации

Соотношение (13) для производной функции $b(\mu)$ в линейном случае выглядит следующим образом:

$$b'(\mu) \propto (1 + \delta\mu)(1 - D\theta)[1 + (\beta + 1)\delta\mu] + \delta D(\theta + \gamma)(1 + \beta\delta\mu), \quad (17)$$

где $D = \beta/(\beta - 1)$, $\gamma = \gamma/(1 - \gamma)$.

Если $D\theta \leq 1$, т.е. $\beta \geq \beta_0 = (1 - \theta)^{-1}$, то функция $b(\mu)$ монотонно возрастает, и следовательно, $\mu^* = 1$, что полностью соответствует пункту 1 теоремы.

Для случая $D\theta > 1$ функция $b'(\mu)$, как видно из (17), положительно пропорциональна квадратической (по μ) функции с отрицательным старшим коэффициентом $1 - D\theta$. Дальнейший анализ будет существенно зависеть от знака $b'(0)$, т.е. величины $C = 1 - D\theta + \delta D(\theta + \gamma)$.

Если $C \leq 0$, то $b'(\mu) \propto (1 + \beta\delta\mu)C + \delta\mu(1 - D\theta)[1 + (\beta + 2)\delta\mu] < 0$ для всех $0 < \mu \leq 1$. Таким образом, $b(\mu)$ убывает и, значит, $\mu^* = 0$, т.е. любая приватизация в этом случае лишь уменьшает бюджетный эффект. Более того, неравенство $C \leq 0$ будет необходимым и достаточным условием, для того чтобы $\mu^* = 0$. Достаточность его продемонстрирована выше, а необходимость вытекает из того, что если $C > 0$, то $b'(0) > 0$ и, следовательно, 0 не может быть точкой максимума функции $b(\mu)$.

Условие $C \leq 0$ равносильно тому, что $\beta \leq \beta_1 = [1 - \theta + \delta(\theta + \gamma)]^{-1}$. Поскольку $\beta > 1$, то из последнего неравенства вытекает, что $\delta < \delta_0 := \theta/(\theta + \gamma)$.

Пусть теперь $C > 0$. Возможны два случая: $b'(1) \geq 0$ и $b'(1) < 0$. Граница, разделяющая эти случаи, будет определяться кривой $\ell_2: (1 + \delta)(1 - D\theta)[1 + (\beta + 1)\delta] + \delta D(\theta + \gamma)(1 + \beta\delta) = 0$.

На рис. 2 изображены три области в пространстве параметров (β, δ) , характеризующие различные виды (степени) приватизации².

В области I, ограниченной кривой $\ell_1: \beta = [1 - \theta + \delta(\theta + \gamma)]^{-1}$, оптимальным (с точки зрения бюджетного эффекта) будет решение не приватизировать предприятие, т.е. $\mu^* = 0$. В области II, расположенной между кривыми ℓ_1 и ℓ_2 , оптимальной будет частичная приватизация ($0 < \mu^* < 1$), при этом оптимальная доля μ^* будет корнем квадратного уравнения

$$L(\mu) := -(1 + \delta\mu)[1 + (\beta + 1)\delta\mu] + \psi\delta(1 + \beta\delta\mu) = 0, \quad \psi = D(\theta + \gamma)/(B\theta - 1) \quad (18)$$

² Здесь мы полагаем, что $\beta_0 < \rho/\alpha$, в противном случае ситуация будет зависеть еще и от показателя эффективности приватизации δ .

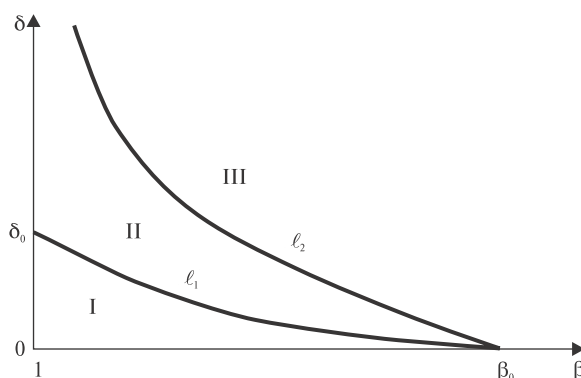


Рис. 2. Области различных типов приватизации в пространстве $(\beta \times \delta)$

на интервале $(0, 1)$. Наконец, в области III (выше кривой ℓ_2) $\mu^* = 1$, т.е. полная приватизация является оптимальной.

5.2. Зависимость от параметров (сравнительная статика)

Покажем теперь, какие выводы можно сделать из полученной выше характеристики оптимальной доли приватизации.

Параметры прибыли. Как видно из приведенных выше формул, оптимальная доля приватизации μ^* зависит от параметров прибыли, предприятия до приватизации (среднего темпа роста α и волатильности σ) только через величину β .

Для вывода характера зависимости β от параметров прибыли запишем его в виде $\beta = 2\rho / F(\alpha, \sigma)$,

где $F(\alpha, \sigma) = \alpha - 0,5\sigma^2 + G(\alpha, \sigma)$, $G(\alpha, \sigma) = \left[(\alpha - 0,5\sigma^2)^2 + 2\sigma^2\rho \right]^{1/2}$. Тогда

$$\partial F / \partial \alpha = 1 + (\alpha - 0,5\sigma^2) / G(\alpha, \sigma) > 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= -\sigma + \left[-(\alpha - 0,5\sigma^2)\sigma + 2\sigma\rho \right] / G(\alpha, \sigma) \propto \left[-G(\alpha, \sigma) - (\alpha - 0,5\sigma^2) + 2\rho \right] / G(\alpha, \sigma) = \\ &= 4\rho(\rho - \alpha) / \left[G(\alpha, \sigma)(2\rho - \alpha + 0,5\sigma^2 + G(\alpha, \sigma)) \right] > 0, \end{aligned}$$

поскольку $\rho > \alpha$. Поэтому β будет монотонно убывать по параметрам прибыли предприятия α и σ . При этом $\beta = \rho / \alpha$, если $\sigma = 0$, и $\beta \rightarrow 1$, если $\sigma \rightarrow \infty$.

Расположение областей с различными типами приватизации в пространстве $(\sigma \times \delta)$ показано на рис. 3. Как и на рис. 2, область отсутствия приватизации обозначается I, частичной приватизации — II, полной приватизации — III.

При малых волатильностях оптимальной по критерию бюджетного эффекта будет полная приватизация (область III). Если $\sigma \leq \sigma_0$, где σ_0 — корень уравнения $\beta = 1/(1 - \theta)$, то полная приватизация остается оптимальной при всех показателях эффективности δ . С увеличением волатильности предпочтение (в смысле оптимизации) переходит к частичной приватизации (область II). Если при этом показатель эффективности приватизации δ меньше некоторого порогового значения, приватизация оказывается ненужной с точки зрения увеличения бюджетного эффекта (область I). Если показатель δ больше критической величины $\delta_0 = \theta/(\theta + \gamma)$, определяемой налоговой системой, оптимальным будет приватизировать предприятие (полностью или частично в зависимости от величины показателя δ). Можно показать³, что в области II оптимальная доля приватизации μ^* будет увеличиваться с ростом величины β и, следовательно, уменьшаться с ростом волатильности прибыли.

Таким образом, оставаясь в рамках критерия бюджетного эффекта, можно заключить, что возрастание неопределенности прибыли предприятия ведет к снижению степени приватизации,

³ Соответствующие выкладки достаточно громоздки, поэтому мы их здесь опускаем.

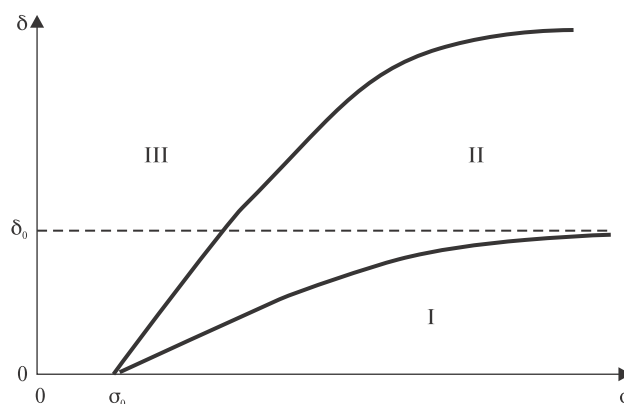


Рис. 3. Области различных типов приватизации в пространстве $(\sigma \times \delta)$

переходу от полной приватизации к частичной, а при определенных условиях (маленькая эффективность приватизации) и к ее отсутствию. Аналогичные результаты и выводы остаются в случае, когда рассматривается не волатильность прибыли, а средний темп ее прироста.

Налоговая нагрузка. Поскольку величина γ возрастает по коэффициенту налоговой нагрузки γ , кривые ℓ_1 и ℓ_2 на рис. 2 смещаются вниз. Поэтому с ростом налоговой нагрузки область I, где отсутствует приватизация, уменьшается, а область полной приватизации III увеличивается. Кроме того, поскольку в области II квадратичная функция $L(\mu)$ (см. (18)) принимает положительное значение в нуле, отрицательное — в единице и возрастает по γ , корень уравнения (18) μ^* будет увеличиваться с ростом γ . Таким образом, при возрастании налоговой нагрузки полная приватизация становится оптимальной для более широкого множества предприятий (точнее, параметров их прибыли), отсутствие приватизации будет оптимальным для более узкого множества ситуаций, а величина оптимальной доли приватизации будет *увеличиваться*.

Дополнительные отчисления в бюджет. Установим, как влияет на степень приватизации параметр θ , характеризующий долю отчислений в бюджет прибыли, оставшейся после уплаты налогов.

При увеличении величины θ кривые ℓ_1 и ℓ_2 (см. рис. 2) смещаются вверх. Это означает, что с ростом доли дополнительных отчислений в бюджет область параметров прибыли, где оптимальным решением (по критерию бюджетного эффекта) является отсутствие приватизации, будет расширяться, а область полной приватизации — сужаться. Аналогично проведенным выше рассуждениям нетрудно показать, что функция $L(\mu)$ убывает по θ и оптимальная доля приватизации μ^* как корень уравнения $L(\mu) = 0$ будет также убывать по параметру θ .

Тем самым можно сказать, что при увеличении доли дополнительных отчислений в бюджет приватизация становится менее привлекательной с точки зрения бюджетного эффекта, что ведет к *уменьшению* оптимальной доли приватизации.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложена математическая модель, в рамках которой можно исследовать проблему выбора доли (степени) приватизации предприятия, основные фонды которого принадлежат государству. В основе модели лежат предположения о возможности выбора момента приватизации, а также о стохастическом характере потока прибыли предприятия и его скачкообразном изменении — умножении на некоторый мультипликатор приватизации — после приватизации. Для выбора доли приватизации взята схема двухуровневой оптимизации. На нижнем уровне в этой схеме находится покупатель (приватизатор), выбирающий такой момент покупки, который максимизирует его NPV от приватизированной части предприятия. Верхний уровень остается за государством, которое, зная принцип поведения покупателя, предлагает ему такую долю приватизируемого имущества, чтобы максимизировать интегральный бюджетный эффект от функционирования данного предприятия.

В предположении, что прибыль предприятия моделируется случайным процессом геометрического броуновского движения, в работе исследуется структура оптимальной доли приватизации. Приведены условия, при выполнении которых полная или частичная приватизация оказываются

оптимальными с точки зрения бюджетного эффекта. Для случая линейного мультипликатора приватизации получена полная характеристика областей (в пространстве параметров модели), внутри которых оптимальными решениями будут отсутствие приватизации, частичная приватизация и полная приватизация. Выведена формула для оптимальной доли приватизации, исследована ее зависимость от среднего темпа прироста и волатильности прибыли предприятия, налоговой нагрузки, а также норматива дополнительных отчислений чистой прибыли в бюджет. В частности, показано, что с ростом неопределенности (волатильности) прибыли оптимальная доля приватизации должна снижаться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Андерсон Дж. (2004). О приватизации государственной собственности // *Вопросы экономики*. № 12. С. 54–69. [Anderson J. (2004). On privatizing state property. *Voprosy ekonomiki*, 12, 54–69 (in Russian).]
- Аркин В.И., Слостников А.Д. (2007). Инвестиционные ожидания, стимулирование инвестиций и налоговые реформы // *Экономика и математические методы*. Т. 43. Вып. 2. С. 76–100. [Arkin V.I., Slastnikov A.D. (2007). Theory of investment expectations, investment incentives, and tax reforms. *Economics and Mathematical Methods*, 43, 2, 76–100 (in Russian).]
- Аркин В.И., Слостников А.Д. (2019). Математическая модель приватизации унитарного предприятия в реальном секторе // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 3 (43). С. 12–33. [Arkin V.I., Slastnikov A.D. (2019). Mathematical model of unitary enterprise privatization in the real sector. *The Journal of the New Economic Association*, 3 (43), 12–33 (in Russian).]
- Полтерович В.М. (2012). Приватизация и рациональная структура собственности. Часть 1. Приватизация: проблема эффективности // *Экономическая наука современной России*. № 4 (59). С. 7–23. [Polterovich V.M. (2012). Privatization and the rational ownership structure. Part 1. Privatization: The efficiency problem. *Economic Science of Contemporary Russia*, 4 (59), 7–23 (in Russian).]
- Приватизация в современном мире: теория, эмпирика, «новое измерение» для России (2014). Радыгин А.Д. (ред.). М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС. [Privatization in the modern world: Theory, empiricism, “a new dimension” for Russia (2014). A.D. Radygin (ed.). Moscow: Izdatel'skii dom “Delo” RANKhiGS (in Russian).]
- Ширяев А.Н. (1998). Основы стохастической финансовой математики. Т. 1, 2. М.: Фазис. [Shiryaev A.N. (1999). *Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory*. Singapore: World Scientific.]
- Benabess N. (2012). Is partial privatization the optimal choice for a Stackelberg leader firm when there is R&D rivalry? *International Journal of Humanities and Social Science*, 2, 4, 59–62.
- Benninga S., Helmantel M., Sarig O. (2005). The timing of initial public offerings. *Journal of Financial Economics*, 75, 115–132.
- Brada J.C., Ma C.-Y. (2007). The optimal timing of initial public offerings in the course of privatization: Theory and an illustrative application. *Economic Systems*, 31 (2), 121–137.
- Chavanasporn W., Ewald C.-O. (2012). Privatization of businesses and flexible investment: A real option approach. *Decisions in Economics and Finance*, 35 (1), 75–89.
- Chen C.-H., Mai C.-C., Liu Y.-L., Mai S.-Y. (2009). Privatization and optimal share release in the Chinese banking industry. *Economic Modelling*, 26, 1161–1171.
- Dixit A.K., Pindyck R.S. (1994). *Investment under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.
- Draho J. (2000). *The timing of initial public offerings: A real option approach*. Working paper. DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.271351>
- Fridman A. (2018). Partial privatization in an exhaustible resource industry. *Journal of Economics*, 124, 2, 159–173.
- Huang C.-S., Lee J.-Y., Chen S.-S. (2006). The optimal government shareholding strategy and the cost structure. *Seoul Journal of Economics*, 19 (2), 251–273.
- Li Sh., Ouyang M., Zhou D. (2005). Modeling privatization as a firm strategy in transition economies. *Journal of Business Research*, 58 (1), 37–44.
- Matsumura T. (1998). Partial privatization in mixed duopoly. *Journal of Public Economy*, 70, 473–483.
- Privatization: Successes and failures* (2008). G. Roland (ed.). Columbia University Press.

Mathematical model of the firm's partial privatization

© 2020 г. V.I. Arkin, A.D. Slastnikov

V.I. Arkin,

Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;

e-mail: arkin@cemi.rssi.ru

A.D. Slastnikov,

Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;

e-mail: slast@cemi.rssi.ru

Received 29.11.2019

This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 18-010-00666).

Abstract. The paper describes a model which allows studying optimization problem for the partial privatization of a state-owned enterprise. The model assumes the possibility to choose the moment of privatization, as well as the stochastic behavior of the enterprise's profits and its change after privatization. The proposed scheme allows to find the optimal (in NPV criterion of the buyer) time of privatization and the optimal (in budgetary effect criterion) degree of privatization. In the case when the profit is modeled by random processes of geometric Brownian motion, we study the structure explicit of the optimal degree of privatization. For the case of linear "privatization multiplier" it is obtained the complete characterization of the domains (in the space of model parameters) with "no privatization", "partial privatization" and "full privatization". We derive formulae for the optimal degree of privatization, and study the its dependencies on the profit parameters (average growth rate and volatility) and tax burden. In particular, it is shown that optimal degree of privatization falls when volatility of the profit grows.

Keywords: privatization, state-owned enterprise, budgetary effect, uncertainty, time of privatization, degree of privatization.

JEL Classification: C61, D81, G38.

DOI: 10.31857/S042473880010496-4