

Стадное поведение на фондовом рынке: анализ и прогнозирование

© 2019 г. К.В. Светлов

ПАО «Банк «Санкт-Петербург»», Санкт-Петербург

E-mail: kir.svetloff@gmail.com

Поступила в редакцию 20.11.2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-06-05625-а «Потребительский выбор и стадное поведение в микро-экономике: от аналитического описания к реалистичным агент-ориентированным моделям»).

Автор признателен руководителю проекта Д.В. Ковалевскому за полезные замечания. Организацией, предоставляющей условия для реализации проекта, является Международный центр по окружающей среде и дистанционному зондированию им. Нансена (Нансен-центр, Санкт-Петербург).

В работе проводится исследование модели Альфарано, описывающей динамику стоимости акции на рынке под влиянием стадного поведения его участников. В рамках данной модели выделяются два типа экономических агентов: инвесторы и шумовые трейдеры. Предполагается, что среди трейдеров существуют оптимистично настроенные, которые ожидают роста цены, и пессимистично настроенные, которые ожидают ее снижения. Стохастический характер цены в данной модели формируется под влиянием смены ожиданий у группы шумовых трейдеров, что выражается в изменении соотношения между числом оптимистов и пессимистов. В отличие от других моделей ценовой динамики получающаяся в рамках данной модели цена имеет конечные границы, значения которых определяются параметром чувствительности рынка к смене настроений трейдеров. Пользуясь диффузионным приближением для марковского процесса, описывающего соотношение числа трейдеров, ожидающих роста цены, и числа трейдеров, ожидающих снижения цены, мы проводим анализ указанной модели. В зависимости от параметров модели, задающих вероятности смены ожиданий у шумовых трейдеров, исследуется такой аспект данной модели, как возможность достижения за конечное время граничных вариантов в структуре участников торгов, когда абсолютно все трейдеры оптимистично или пессимистично настроены. Выводятся формулы для переходных вероятностей, позволяющие оценить возможность смены настроений на рынке за заданный промежуток времени и рассчитать влияние данных изменений на цену. Основным результатом данной работы является вывод соотношений для построения прогноза будущих значений цен, в том числе в долгосрочной перспективе, а также вывод соотношений для определения стоимости производных финансовых инструментов (на примере колл-опциона) и исследование возможности их хеджирования.

Ключевые слова: стадное поведение, стохастическая динамика, ценообразование опционов.

Классификация JEL: C63, G13.

DOI: 10.31857/S042473880003987-4

1. ВВЕДЕНИЕ

Агент-ориентированные модели представляют одно из развитых направлений моделирования различных экономических процессов, в том числе процессов, связанных с формированием равновесных значений цен на рынках. В числе указанных моделей особое место занимают модели, в которых экономические агенты имеют ограниченную рациональность, связанную с так называемым стадным поведением. При принятии решений они ориентируются уже не только на максимизацию своего дохода или полезности, но и на решения, принимаемые другими участниками рыночных отношений, а также на их ожидания и прогнозы. Чрезвычайно важным при этом становится описание самого механизма подобного взаимодействия агентов.

Одним из наиболее популярных подходов к описанию подобного взаимодействия служит модель Кирмана (Kirman, 1993), в которой автором проводится прямая аналогия между участниками торгов-

ли на фондовом рынке и членами муравьиной колонии. На базе указанной модели взаимодействия агентов в статье (Alfarano et al., 2008) предложена модель формирования равновесной цены на акцию, торгуемую на рынке. Помимо указанных моделей можно отметить модель Конта — Бушода (Cont, Bouchaud, 2000), в которой феномен стадного поведения используется как основной фактор, объясняющий существование тяжелых хвостов распределений доходностей акции, а также статью (Fölmer, Schweizer 1993), в которой аналогично рассматриваемой нами работе (Alfarano et al., 2008) выводится соотношение для стоимости акции, формируемой как результат установления равновесия, однако в роли ценового процесса в данной работе выступает процесс Орнштейна — Уленбека (Бородин, 2013).

Данная статья организована следующим образом. В разд. 2 кратко излагается модель Альфарано (Alfarano et al., 2008), описывающая динамику стоимости акции на рынке под влиянием стадного поведения его участников. Основываясь на представленных предположениях, приводятся возможные модели цены, формирующейся под влиянием спроса и предложения на данном рынке. Разд. 3 посвящен анализу базового процесса данной модели. Заменяя данный процесс его диффузионным приближением и следуя технике, изложенной в монографии (Бородин, 2013), выводятся формулы для вероятностных распределений данного процесса, а также дается классификация границ пространства состояний данного процесса. В разд. 4 представлены формулы для вычисления ожидаемых значений цены (в том числе в долгосрочной перспективе, при $t \rightarrow \infty$) на рассматриваемом рынке, в зависимости от текущих, наблюдаемых цен. В разд. 5 рассматривается применение изложенной модели к вопросу вычисления цен производных финансовых инструментов. При использовании техники построения реплицирующего портфеля выводится уравнение для цены европейского колл-опциона.

2. МОДЕЛЬ ЦЕНЫ

В данной статье, следуя подходам, изложенным в статьях (Kirman, 1993; Alfarano et al., 2008), будем рассматривать рынок, представленный некоторым рисковым финансовым активом, например акцией. На указанном рынке выделяются две категории участников: инвесторы и шумовые трейдеры (далее — трейдеры). При этом число инвесторов считается заданным и равным N_f , число шумовых трейдеров равно N .

Поясним различия в данных категориях участников. Под инвесторами следует понимать экономических агентов, которые при принятии решений о покупке или продаже актива оценивают некоторые фундаментальные показатели компании, выпустившей на рынок ценную бумагу. Формально, данный класс участников рынка будет считать, что для рассматриваемого актива существует некоторая экономически обоснованная цена p_f . В случае если текущее значение цены P_t меньше чем p_f , инвесторы предъявляют спрос на данную бумагу. Вторая группа участников рынка — шумовые трейдеры — при принятии решений ориентируется на новостной фон, ожидания других участников и другие показатели, относящиеся к так называемому техническому анализу. Данная группа подразделяется на две подгруппы: оптимистично и пессимистично настроенные шумовые трейдеры. Первые считают, что цена рассматриваемого рискованного актива в ближайшем будущем будет расти, вторые — ожидают снижения цены. Число оптимистично настроенных шумовых трейдеров будем обозначать через n , число пессимистично настроенных трейдеров равно $N - n$.

Отметим, что свойство трейдера быть оптимистом или пессимистом не является перманентным и может меняться под влиянием как новой информации о цене актива, так и в ходе общения трейдеров между собой. Обозначим через n_t число оптимистично настроенных трейдеров на момент t . Динамика рассматриваемой системы будет определяться случайными взаимодействиями шумовых трейдеров, при этом предполагается, что за малый период времени Δt число оптимистично настроенных трейдеров $n_t = n$ может измениться и стать равным $n - 1$, $n + 1$ или остаться неизменным. Вероятности указанных переходов будут задаваться формулами

$$\begin{aligned} p_{n,n+1}(\Delta t) &= (N - n)(a + bn)\Delta t + o(\Delta t), \\ p_{n,n-1}(\Delta t) &= n(a + b(N - n))\Delta t + o(\Delta t), \\ p_{n,n}(\Delta t) &= 1 - p_{n,n-1}(\Delta t) - p_{n,n+1}(\Delta t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $a > 0$ и $b > 0$ — параметры модели, отвечающие за динамику числа оптимистично и пессимистично настроенных шумовых трейдеров.

Поясним смысл такого задания переходных вероятностей на примере $p_{n,n+1}$. При наличии n оптимистично настроенных шумовых трейдеров возможность увеличения их числа может быть реализована вхождением в их группу одного из $N - n$ оставшихся пессимистично настроенных трейдеров. Такой переход может произойти как за счет информационного воздействия, мощность которого моделируется параметром a , так и за счет фактора стадного поведения, мощность которого определяется величиной bn , равной произведению числа оптимистов и параметра b . Сводя данные факторы воедино, вероятность увеличения числа оптимистов зависит от числа шумовых трейдеров, не являющихся пока что оптимистично настроенными; мощности информационного воздействия, под влиянием которого возможна смена настроений на рынке; мощности фактора стадного поведения. Таким образом, вероятности, заданные системой (1), описывают динамику числа оптимистично настроенных шумовых трейдеров.

Теперь обратимся к механизму формирования цены на указанном рынке. Как было отмечено ранее, инвесторы предъявляют спрос, зависящий от отклонения текущей цены акции от ее фундаментального значения. Величина избыточного спроса со стороны инвесторов будет равна $ED_t^I = N_f T_1 (\ln p_t - \ln P_t)$, где T_1 — параметр, характеризующий средний объем торгов для одного инвестора. Со стороны шумовых трейдеров избыточный спрос будет задаваться формулой $ED_t^T = n_t T_2 - (N - n_t) T_2$, где n_t — число оптимистично настроенных трейдеров на момент времени t ; T_2 — параметр, характеризующий средний объем торгов для одного трейдера; $n_t T_2$ — объем акций на покупку; $(N - n_t) T_2$ — объем акций на продажу. Для дальнейшего удобства введем следующее определение.

Определение 1. Процесс $X_t = 2n_t/N - 1$, $t \geq 0$, где n_t — число оптимистично настроенных трейдеров, а N — общее число трейдеров на рынке будем называть *индексом настроения*.

Множеством состояний процесса X выступает интервал $[-1, 1]$. Из равенства $X_t = 1$ следует, что $n_t = N$, т.е. все трейдеры на рынке в момент времени t будут оптимистично настроенными и ожидают роста цены. Равенство $X_t = -1$ означает, что все трейдеры на рынке в момент времени t ожидают снижения цены. Ситуация $X_t = 0$ соответствует варианту, когда число оптимистов равно числу пессимистов. В работе (Alfarano et al., 2008) доказывалось, что указанный процесс может быть приближен при помощи диффузионного процесса $\bar{X}_t$, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\bar{X}_t = -2a\bar{X}_t dt + \sqrt{2b(1 - \bar{X}_t^2) + \frac{4a}{N}} dW_t, \quad \bar{X}_0 = x_0, \quad (2)$$

где W_t — стандартный винеровский процесс; $x_0 = 2n_0/N - 1$ — значение индекса настроения на начальный момент времени $t = 0$. Близость данных процессов понимается в том смысле, что плотности их переходных вероятностей совпадают с точностью до величин порядка $1/N^2$. Предположим, что число шумовых трейдеров N достаточно велико и выполняется условие $N \gg \max\{2a/b, 4a\}$ благодаря которому в коэффициенте диффузии уравнения (2) слагаемое $4a/N$ вносит малый вклад и может быть отброшено. Далее в работе мы будем пользоваться указанным приближением и полагать, что случайный процесс X задан как решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad (3)$$

где $\mu(x) = -2ax$ и $\sigma(x) = \sqrt{2b(1 - x^2)}$. Используя введенное обозначение, величину избыточного спроса со стороны шумовых трейдеров можно записать в виде

$$ED_t^T = NT_2 (2n_t / N - 1) = NT_2 X_t.$$

Исходя из определения процесса X , следует, что при преобладании числа оптимистично настроенных трейдеров, ожидающих роста цены, будет выполняться неравенство $X_t \geq 0$, а вслед за ним и $ED_t^T \geq 0$. Последнее означает, что со стороны шумовых трейдеров имеется положительный

спрос на данный актив. Если же большинство шумовых трейдеров ожидают снижения цены, то величина избыточного спроса примет отрицательное значение, отражая тем самым желание большинства выставить имеющиеся у них бумаги на продажу. Под влиянием спроса со стороны данных групп участников рынка цена формируется в соответствии с вальрасовским механизмом установления ценового равновесия

$$d \ln P_t = \beta(ED_t^1 + ED_t^2)dt = \beta(N_f T_1 (\ln p_f - \ln P_t) + NT_2 X_t)dt. \quad (4)$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $N_f T_1 = 1$. Обозначим $\delta = \beta NT_2$, тогда уравнение (4), задающее динамику цены акции, запишется как

$$d \ln P_t = \beta \ln(p_f / P_t) + \delta X_t dt, \quad P_0 = p_0. \quad (5)$$

В (Alfarano et al., 2008) делается предположением о том, что процесс установления ценового равновесия происходит мгновенно, что эквивалентно предельному переходу $\beta \rightarrow +\infty$ и $\delta/\beta \rightarrow \delta_0$, где $\delta_0 > 0$ — некоторое число. При данном предположении цена акции будет рассчитываться по формуле

$$P_t = p_f \exp\{\delta_0 X_t\}. \quad (6)$$

Отметим, что если не следовать данному допущению, как это было сделано, например, в (Kovalevsky, 2016), и предположить, что параметры $\beta > 0$ и $\delta > 0$ принимают некоторые конечные значения, уравнение динамики цены может быть получено следующим образом.

Введем $Y_t = \ln P_t$, $y_f = \ln p_f$, $y_0 = \ln p_0$ и вычислим дифференциал

$$d(Y_t e^{\beta t}) = \beta e^{\beta t} Y_t dt + e^{\beta t} dY_t = e^{\beta t} (\beta y_f + \delta X_t) dt.$$

Интегрируя последнее выражение от 0 до t , получим

$$Y_t = y_f + (y_0 - y_f) e^{-\beta t} + \delta \int_0^t e^{-\beta(t-s)} X_s ds.$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем решение уравнения (5) как

$$P_t = p_f \exp \left\{ e^{-\beta t} \ln(p_0 / p_f) + \delta \int_0^t e^{-\beta(t-s)} X_s ds \right\}. \quad (7)$$

Таким образом, задана модель, описывающая динамику стоимости акции в условиях стадного поведения участников рынка. В данной модели цена акции следует в соответствии с уравнением (6). При этом значение P_t зависит лишь от текущего настроения X_t участников рынка. При преобладании числа оптимистично настроенных шумовых трейдеров будет выполняться неравенство $X_t \geq 0$, и, следовательно, цена P_t будет не ниже своего фундаментального значения. В ситуации когда на рынке больше пессимистично настроенных трейдеров, ожидающих снижения цены, верным будет неравенство $P_t \leq p_f$.

Если же параметры β и δ принимают конечные значения, цена акции P_t начинает зависеть от двух параметров: 1) отклонения начального значения цены p_0 от ее фундаментального значения p_f , 2) значений показателя X на всем промежутке времени $[0, t]$. Благодаря тому что под интегралом в выражении (7) имеется экспонента $e^{-\beta(t-s)}$, вклад прошлых значений индекса настроения X_s в текущее значение цены P_t с течением времени становится все меньше.

Далее мы исследуем вопрос построения прогнозов для будущих значений цен в рамках модели (6), (3) динамики цены акции в условиях стадного поведения участников рынка. В отличие от оригинального исследования (Alfarano et al., 2008), где вычисляются вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсия) для процесса X , в данной работе прогноз будет строиться непосредственно для будущих значений цен, рассчитываемых как некоторый функционал от траекторий процесса X .

3. АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ИНДЕКСА НАСТРОЕНИЯ

В предыдущем разделе было введено определение процесса индекса настроения X . Интервал $[l, r]$, где $l = -1$ и $r = 1$, выступает в качестве пространства состояний данного процесса. Поскольку данный интервал ограничен, интересным представляется ответ на вопрос, будут ли достижимыми для данного процесса точки l и r соответствующие ситуации, когда абсолютно все шумовые трейдеры на рынке ожидают снижения/роста цены рассматриваемого актива. Помимо вопроса достижимости границы в принципе, важным аспектом станет ожидаемое время для достижения границ, а именно — будет ли оно конечным или же бесконечным.

Исследуем влияние выбора параметров a и b на указанное поведение процесса X . Следуя технике, изложенной в (Бородин, 2013), введем функции:

$$B(x) = \int \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(x)} dz, \quad s(x) = e^{-B(x)}.$$

Функция $s(x)$ называется *плотностью меры шкалы*, $S(x) = \int s(z) dz$ — *шкалой диффузии*, а соответствующая ей мера $S[x, y] = S(x) - S(y) = \int_x^y s(z) dz$ — *мерой шкалы*.

Функция $m(x) = 2e^{B(x)}/\sigma^2(x)$ называется *плотностью меры скорости*, а мера, индуцированная ею, $M[x, y] = \int_x^y m(z) dz$ — *мерой скорости*. Отсутствие нижнего индекса интегрирования в данных определениях означает, что требуется вычислить произвольную первообразную подынтегральной функции. Таким образом, введенные выше функции определены с точностью до некоторого постоянного слагаемого или множителя. Однако нас будут интересовать не конкретные значения данных функций, а возможность того, могут ли данные функции принимать значения, равные 0.

Введем функции и рассчитываемые на их основе величины, которые будут использованы при установлении характеристик процесса X :

$$\begin{aligned} \Sigma[x, y] &= \int_x^y (S(z) - S(x)) dM(z), \quad N[x, y] = \int_x^y (S(y) - S(z)) dM(z), \\ \Sigma(l) &= \lim_{z \downarrow l} \Sigma(z, c), \quad N(l) = \lim_{z \downarrow l} N(z, c), \\ \Sigma(r) &= \lim_{z \uparrow r} \Sigma(c, z), \quad N(r) = \lim_{z \uparrow r} N(c, z), \end{aligned}$$

где c — произвольная точка из интервала (l, r) , выбор которой не принципиален для определения того, конечны или же бесконечны величины $\Sigma(l)$, $\Sigma(r)$, $N(l)$, $N(r)$. Указанные величины имеют следующую эвристическую интерпретацию (Karlin, 1981): $\Sigma(l)$ измеряет время, необходимое для достижения l диффузией, начинающейся во внутренней точке $c \in (l, r)$; $N(l)$ — время для достижения точки $c \in (l, r)$ диффузией, начинающейся с границы l . Аналогичную интерпретацию имеют величины $\Sigma(r)$, $N(r)$.

Пусть $H_z = \inf\{s: X_s = z\}$ — момент первого достижения процессом X уровня z . Если уровень z не достигается, полагаем $H_z = \infty$. Известно, что граница l является *притягивающей* (Бородин, 2013; Karlin, 1981), т.е. $P_x(H_{l+} < H_z) > 0$ (P_x — вероятностная мера по процессу X , начавшемуся в точке x) для всех $l < x < z < r$, если $S(l+) = \lim_{z \downarrow l} S(z) > -\infty$. При этом если граница l притягивающая, то математическое ожидание времени, за которое она будет достигнута, будет конечным тогда и только тогда, когда $S(l) < \infty$. Граница l называется *достижимой*, если $\Sigma(l) < \infty$, *недостижимой* — если $\Sigma(l) = \infty$.

Граница l называется *границей входа*, если она не может быть достигнута из любой точки интервала (l, r) . Но при этом можно рассматривать диффузии, начинающиеся на этой границе. Такие диффузии перемещаются внутрь интервала и никогда не возвращаются к входной границе. Необходимым и достаточным условием, для того чтобы l была границей входа, будут условия $\Sigma(l) = \infty$ и $N(l) < \infty$. Если же процесс может как заходить на границу, так и выходить из нее, такая граница называется *регулярной*. Граница l регулярная тогда и только тогда, когда $\Sigma(l) < \infty$ и $N(l) < \infty$.

Еще одним возможным пунктом классификации границ служат *границы выхода*: l будет границей выхода, если $\lim_{z \downarrow l} \lim_{x \downarrow l} P_x(H_z < t) = 0$. То есть для диффузии, начинающейся в точке l (или в точке

x , приближающейся к l), невозможно достигнуть никакого другого внутреннего состояния z , независимо от того, как близко z к l . Граница будет выходом тогда и только тогда, когда $\Sigma(l) < \infty$ и $N(l) = \infty$.

Граница, которая не может быть достигнута за конечное время и из которой диффузия не может начинаться, называется *естественной* (по Феллеру). Граница l естественная тогда и только тогда, когда $\Sigma(l) = \infty$ и $N(l) = \infty$. Все приведенные характеристики аналогично переносятся и на правую границу r .

Для рассматриваемого нами процесса X функция B равна $B(x) = a \ln(1 - x^2) / b$, плотность меры шкалы $s(x) = (1 - x^2)^{-a/b}$, плотность меры скорости $m(x) = (1 - x^2)^{a/b-1} / b$. Несложно показать, что при $a < b$ имеют место соотношения:

$$S(\pm 1) < \infty, \quad \Sigma(\pm 1) < \infty, \quad N(\pm 1) < \infty,$$

а при $a \geq b$

$$S(\pm 1) = \infty, \quad \Sigma(\pm 1) = \infty, \quad N(\pm 1) < \infty.$$

Таким образом, для определенного выше процесса X , являющегося решением (3), имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. При $a < b$ точки $\{-1, 1\}$ будут регулярными, притягивающими и достижимыми границами для процесса X . При $a \geq b$ точки $\{-1, 1\}$ становятся границами входа, не притягивающими и не достижимыми.

Полученное утверждение имеет следующую экономическую интерпретацию: при $a < b$ за конечное время процессом X может быть достигнуто одно из крайних состояний $\{-1, 1\}$, что соответствует тому, что все шумовые трейдеры будут иметь абсолютно одинаковые ожидания относительно динамики цены рассматриваемого актива. При этом с положительной вероятностью данные состояния будут достигнуты быстрее, чем любые другие. Далее мы будем полагать, что выполнено условие $a \geq b$, благодаря которому границы $\{-1, 1\}$ не будут достижимыми процессом X . Ввиду того что мы рассматриваем случай достаточно большого числа шумовых трейдеров на рынке, данное предположение исключает возможность того, что абсолютно все они оптимистично или пессимистично настроены.

Теперь обратимся к вопросу непосредственного вычисления переходных вероятностей процесса X . Воспользуемся подходом, изложенным в (Bhattacharya, Waymire, 2009, Ch. V, § 8) для описания плотности переходных вероятностей процесса X . Пусть $p(s, x, t, y)$ — плотность переходной вероятности процесса X_t , $t > 0$:

$$p(s, x, t, y) = \frac{\partial}{\partial y} P(X_t < y | X_s = x).$$

Тогда $p(s, x, t, y)$ можно вычислить при помощи выражения

$$p(s, x, t, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \psi_n(y) \pi(y) e^{-\lambda_n(t-s)}, \quad (8)$$

где $\pi(x)$ — неотрицательная функция, пропорциональная плотности стационарного распределения X ,

$$\pi(x) = \frac{2K}{\sigma^2(x)} \exp\{I(c, x)\}, \quad K > 0, \quad (9)$$

$$I(c, x) = \int_c^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)} dz,$$

$c \in (-1, 1)$ — произвольная константа; $\psi_n(x)$ и λ_n , $n \geq 0$ — набор ортонормированных собственных функций и соответствующих им собственных значений оператора $A = \sigma^2(x) \frac{d}{dx^2} + \mu(x) \frac{d}{dx}$, являющегося производящим оператором процесса X и заданного в $L_2([-1, 1], \pi(x)dx)$ — пространстве функций, квадраты которых на отрезке $[-1, 1]$ суммируемы с весом $\pi(x)$. В данном пространстве скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ определяется как

$$\langle u, v \rangle_{\pi} = \int_{-1}^1 u(x)v(x)\pi(x)dx.$$

Для функций $\psi_n(x)$ и собственных значений λ_n , $n \geq 0$ выполнено равенство

$$A\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0, \quad n \geq 0, \quad (10)$$

а также условие

$$\int_{-1}^1 \psi_n(x)\psi_m(x)\pi(x)dx = \delta_{mn}, \quad (11)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Вычислим $I(c, x)$, выбрав параметр $c = 0$,

$$I(0, x) = \int_0^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)} dz = -\frac{2a}{b} \int_0^x \frac{xdx}{1-x^2} = \frac{a}{b} \ln(1-x^2).$$

Таким образом, функция $\pi(x)$ будет равна

$$\pi(x) = (1-x^2)^{a/b-1}, \quad (12)$$

параметр K при этом мы положили равным b . Заметим, что производящим оператором рассматриваемого случайного процесса X выступает следующий дифференциальный оператор

$$A = b(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2ax \frac{d}{dx}. \quad (13)$$

Собственные значения λ_n , $n \geq 0$ данного оператора и собственные функции ψ_n , $n \geq 0$, отвечающие им, удовлетворяют уравнению (10). Запишем последнее более подробно:

$$(1-x^2)\psi_n'' - 2\frac{a}{b}x\psi_n' + \frac{\lambda_n}{b}\psi_n = 0. \quad (14)$$

Для решения (14) имеется следующая формула (см. (Abramowitz, 1965)):

$$\psi_n(x) = P_n^{\left(\frac{a}{b}-1, \frac{a}{b}-1\right)}(x), \quad n \geq 0, \quad (15)$$

где $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — многочлен Якоби вида

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^m. \quad (16)$$

Соответствующие данным собственным функциям собственные числа находятся по формуле

$$\lambda_n = bn(n-1) + 2an, \quad n \geq 0. \quad (17)$$

Для функций $\psi_n(x)$, $n \geq 0$ и $p(x)$, заданных как (15) и (12), выполнено (Bhattacharya, Waymire, 2009) условие

$$\int_{-1}^1 \psi_n(x)\psi_m(x)\pi(x)dx = \frac{2^{2a/b-1}}{2n+2a/b-1} \frac{\Gamma(n+a/b)^2}{n! \Gamma(n+2a/b-1)} \delta_{mn}. \quad (18)$$

Поэтому для выполнения тождества (11) переопределим ψ_n как

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{n!(2n+2a/b-1)\Gamma(n+2a/b-1)}}{\Gamma(n+a/b)2^{a/b-1/2}} P_n^{(a/b-1, a/b-1)}(x), \quad n \geq 0. \quad (19)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. Плотность переходных вероятностей

$$p(s, x, t, y) = \frac{\partial}{\partial y} P(X_t < y | X_s = x)$$

случайного процесса X , заданного как решение стохастического дифференциального уравнения (3), равна

$$p(s, x, t, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \psi_n(y) \pi(y) e^{-\lambda_n(t-s)},$$

где

$$\psi_n(x) = \frac{\sqrt{n!(2n+2a/b-1)\Gamma(n+2a/b-1)}}{\Gamma(n+a/b)2^{a/b-1/2}} P_n^{(a/b-1, a/b-1)}(x),$$

$$\lambda_n = bn(n-1) + 2an, \quad \pi(x) = (1-x^2)^{a/b-1}.$$

Плотность стационарного распределения X , как упоминалось выше, пропорциональна функции $\pi(x)$ (12) и равна $\Gamma(2a/b)\pi(x)/[2^{2a/b-1}\Gamma(a/b)^2]$.

На рис. 1 приведены несколько собственных функций для ψ_n оператора A для случая $a = 0,15$, $b = 0,07$.

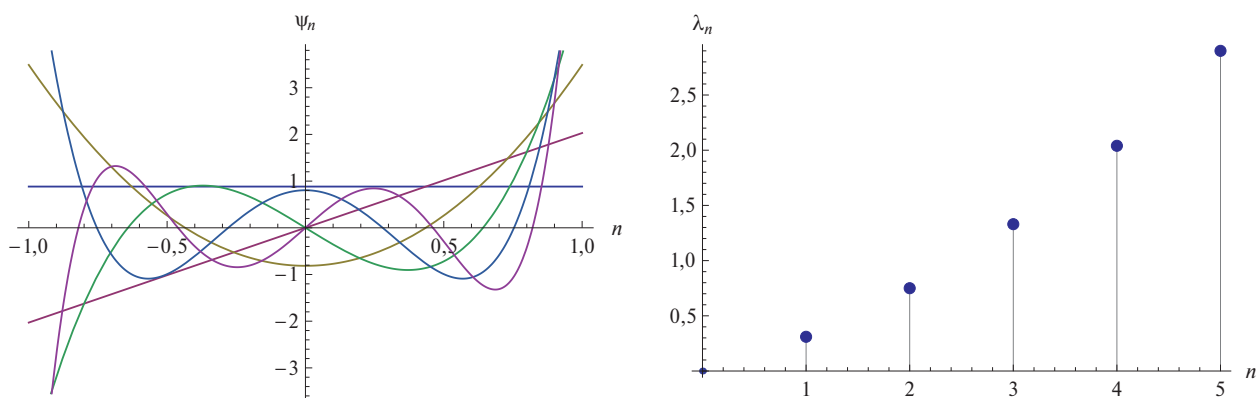


Рис. 1. Собственные функции ψ_n и собственные значения λ_n , $n=0, \dots, 5$, для параметров $a = 0,15$, $b = 0,07$

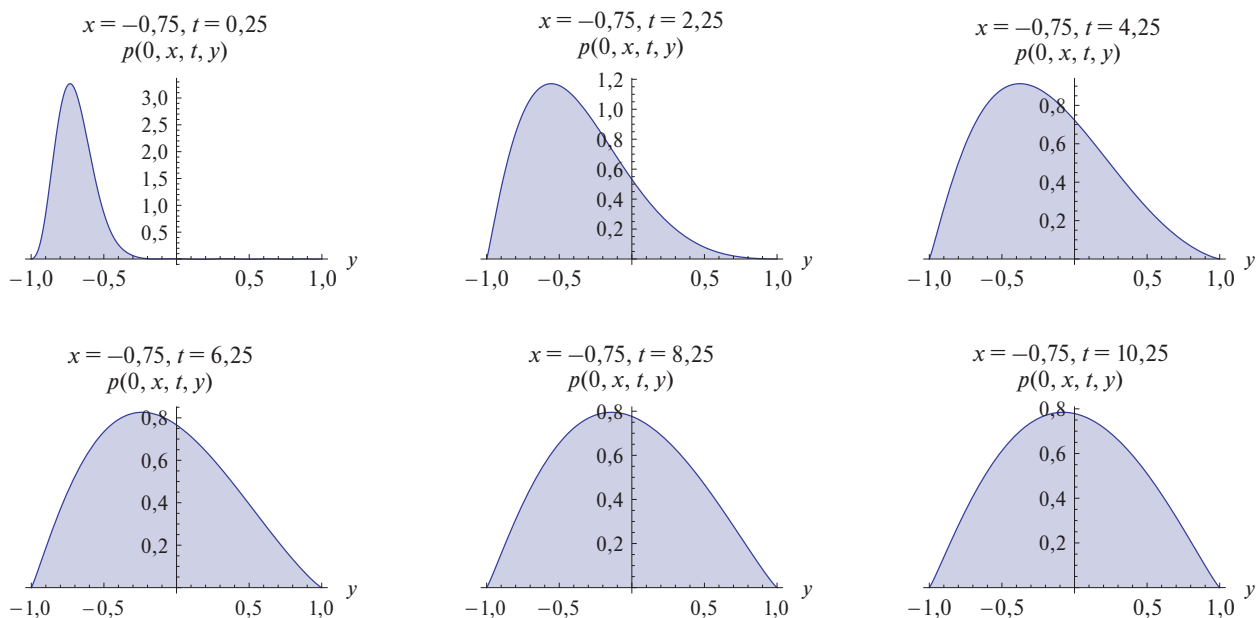


Рис. 2. Плотность переходной вероятности $p(0, x, t, y)$ при $x = -0,75$ с течением времени t для $a = 0,15$, $b = 0,07$

Для различных вариантов соотношений параметров a и b построим графики (2), (3) плотности $p(s, x, t, y)$ переходной вероятности для $s = 0$ и различных значениях t . На рис. 2 график соответствует рассматриваемому варианту, когда имеет место неравенство $a \geq b$. Начальным состоянием для процесса X на рис. 2 выступает точка $x = -0,75$. Видно, что при малых значениях t вероятность сосредоточена в окрестности точки x , а с увеличением времени $t - s$ плотность $p(s, x, t, y)$ стремится к стационарной. Ситуация, когда $a < b$, отражена на рис. 3, при этом начальным состоянием для процесса X в данном случае будет точка $x = 0,95$. В отличие от рис. 1 здесь вероятностная плотность принимает существенно большие значения для точек $\{-1, 1\}$.

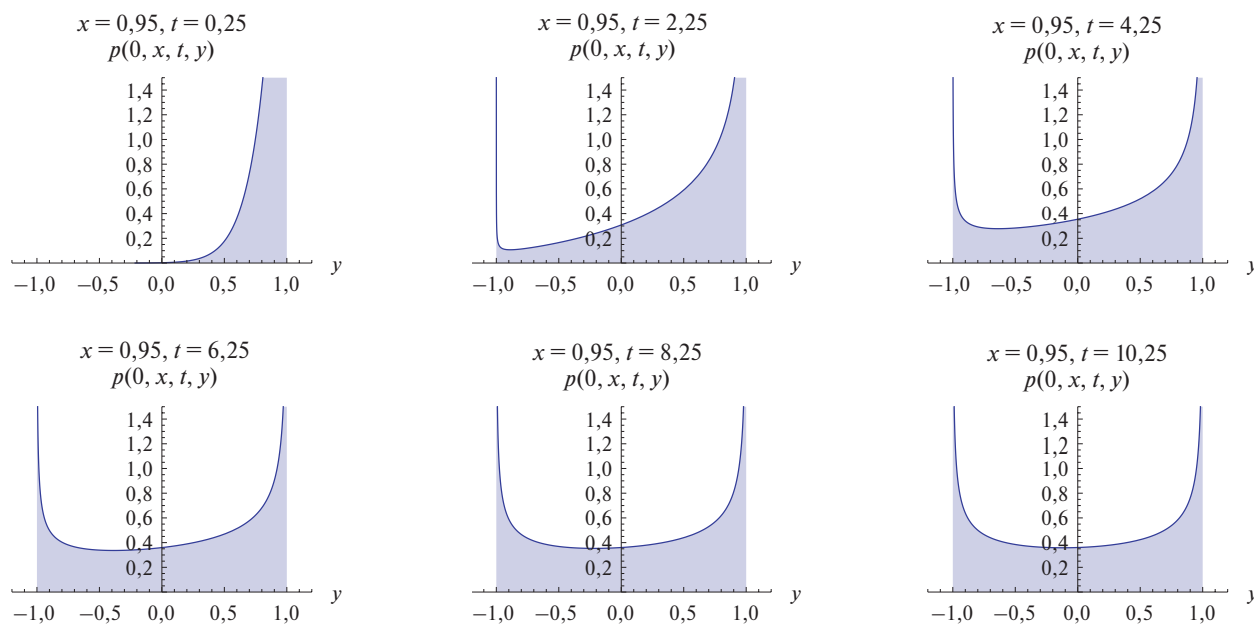


Рис. 3. Плотность переходной вероятности $p(0, x, t, y)$ при $x = 0,95$ с течением времени t для $a = 0,15$, $b = 0,25$

4. ПОСТРОЕНИЕ ПРОГНОЗОВ ЦЕН

Рассмотрим возможность построения прогнозов цен в рамках представленной модели динамики цены акции под влиянием стадного поведения участников рынка. Построим прогноз цены в случае, когда равновесие на рынке устанавливается мгновенно и цена акции может быть описана уравнением (6). Данный случай интересен тем, что в нем цена рассматриваемого актива и процесс индекса настроения взаимнооднозначно связаны между собой, что позволяет выписать в явном виде формулы для вычисления прогнозных значений цены. В качестве прогноза цены на некоторый момент будущего t мы будем использовать ее математическое ожидание, при условии, что ее текущее значение известно и равно z :

$$E[P_t | P_0 = z] = p_f E \left[e^{t \delta_0 X} | X_0 = \frac{1}{\delta_0} \ln(z / p_f) \right]. \quad (20)$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 3. Прогнозное значение цены (20) может быть вычислено как

$$E[P_t | P_0 = z] = p_f \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n \left(\frac{1}{\delta_0} \ln(z / p_f) \right) \left\langle e^{\delta_0 y}, \psi_n(y) \right\rangle_{\pi}. \quad (21)$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что функция $u(t, x) = E[e^{\delta_0 X_t} | X_0 = x]$ согласно (Гихман, Скороход, 1965, глава VII, §5, теорема 1) является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \partial u / \partial t = Au, \\ u(0, x) = e^{\delta_0 x}, \end{cases} \quad (22)$$

где A — оператор, заданный равенством (13). Разложим в ряд Фурье по семейству собственных функций (19) оператора A данные задачи (22), и ее решение будем искать в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \psi_n(x). \quad (23)$$

Подставляя указанное представление функции $u(t, x)$ в (22), получим, что функции $u_n(t)$, $n \geq 0$ являются решениями уравнений

$$du_n / dt = -\lambda_n u_n, \quad u_n(0) = d_n, \quad n \geq 0, \quad \text{где } d_n = \langle u(0, \cdot), \psi_n \rangle_{\pi}.$$

Решение данного уравнения можно записать как

$$u_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t}, \quad n \geq 0. \quad (24)$$

Таким образом, решение уравнения (22) для рассматриваемого нами случая имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n(x) \langle e^{\delta_0 y}, \psi_n(y) \rangle_{\pi}. \quad (25)$$

Пользуясь данным результатом, получим, что прогнозное значение цены (20) может быть рассчитано по формуле

$$E[P_t | P_0 = z] = p_f E \left[e^{\delta_0 X_t} | X_0 = \frac{1}{\delta_0} \ln(z / p_f) \right] = p_f u \left(t, \frac{1}{\delta_0} \ln(z / p_f) \right).$$

Повторяя данные рассуждения для $P_t^2 = p_f^2 \exp\{2\delta_0 X_t\}$, приходим к следующему следствию доказанного утверждения.

Следствие 1. Второй условный момент для процесса P_t может быть вычислен как

$$E[P_t^2 | P_0 = z] = p_f^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \psi_n \left(\frac{1}{\delta_0} \ln(z / p_f) \right) \langle e^{2\delta_0 y}, \psi_n(y) \rangle_{\pi}. \quad (26)$$

Напомним, что выражение вида $\langle e^{\delta y}, \psi_n(y) \rangle_{\pi}$ в формулах выше соответствует скалярному произведению в пространстве $L_2([-1, 1], \pi(x)dx)$ и может быть рассчитано по формуле

$$\langle e^{\delta y}, \psi_n(y) \rangle_{\pi} = \int_{-1}^1 e^{\delta y} \psi_n(y) \pi(y) dy,$$

где функция $\pi(x)$ определена формулой (12). С практической точки зрения для определения прогнозных значений цены и ее второго момента по формулам (21), (26) необходимо взять достаточное число членов соответствующего ряда, отвечающее требуемой точности прогноза.

Отметим, что полученное выражение (21) позволяет найти ожидаемое значение цены акции в долгосрочной перспективе, т.е. $E[P_t | P_0 = z]$ при $t \rightarrow \infty$.

Следствие 2. Для условного математического ожидания цены акции P_t имеет место следующий предел при $t \rightarrow \infty$: $E[P_t | P_0 = z] \rightarrow \bar{P}_{\infty}$, $t \rightarrow \infty$,

$$\bar{P}_{\infty} = p_f \sqrt{\pi} \frac{2a/b-1}{2^{2a/b-1}} \frac{\Gamma(2a/b-1)}{\Gamma(a/b+1/2)\Gamma(a/b)} {}_0F_1 \left(a/b+1/2; \delta_0^2/4 \right), \quad (27)$$

где ${}_0F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Доказательство. Заметим, что поскольку $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_n > 0$ при $n > 0$, все члены ряда (21), кроме нулевого, при $t \rightarrow \infty$ будут стремиться к 0. Таким образом,

$$E[P_t | P_0 = z] \rightarrow p_f \psi_0 \left(\frac{1}{\delta_0} \ln \frac{z}{p_f} \right) \langle e^{\delta_0 y}, \psi_0(y) \rangle_\pi = p_f \psi_0^2 \int_{-1}^1 e^{\delta_0 y} \pi(y) dy, \quad t \rightarrow \infty, \quad (28)$$

при этом в последнем равенстве у ψ_0 отсутствует аргумент, поскольку ψ_0 является константой:

$$\psi_0 = \frac{\sqrt{(2a/b-1)\Gamma(2a/b-1)}}{2^{a/b-1/2}\Gamma(a/b)}.$$

Обозначая правую часть равенства (27) как $\bar{P}_\infty$ и вычисляя входящий в нее интеграл, имеем следующий долгосрочный прогноз цены:

$$\bar{P}_\infty = p_f \sqrt{\pi} \frac{2a/b-1}{2^{2a/b-1}} \frac{\Gamma(2a/b-1)}{\Gamma(a/b+1/2)\Gamma(a/b)} {}_0F_1(a/b+1/2; \delta_0^2/4),$$

где ${}_0F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Интересно отметить, что в данном выражении для долгосрочного прогноза цены отсутствует параметр z . Это означает, что в долгосрочной перспективе цена полностью определяется параметрами модели $\{p_f, a, b, \delta_0\}$ и не зависит от ее текущего значения z .

Пример прогноза цены, построенного по формуле (21) для параметров $a=0,15, b=0,07, \delta_0=1,75$, представлен на рис. 4. Параметр p_f , задающий фундаментальное значение цены, выбран равным 1.

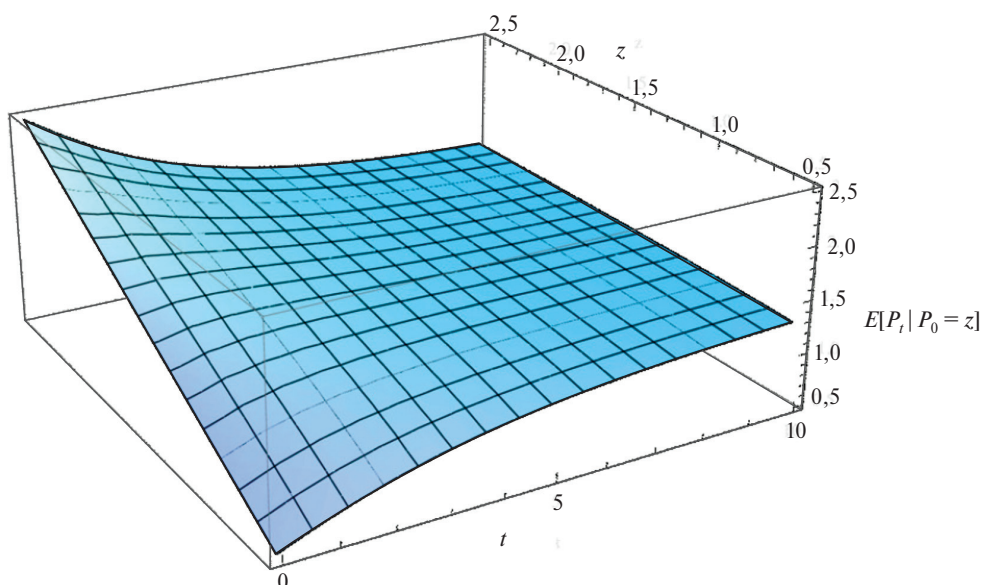


Рис. 4. Прогнозная динамика цены P_t в зависимости от начальных значений цены z

Дополнительно рассмотрим задачу построения прогноза цены для варианта, когда процесс установления равновесия происходит не мгновенно, т.е. параметр $\beta > 0$ уравнения (5) принимает некоторое конечное значение. В этом случае цена акции может быть описана с помощью уравнения (7). Для данной модели под прогнозным значением цены будем понимать условное математическое ожидание

$$E[P_t | X_0 = x, P_0 = z] = p_f \exp\left\{\exp\{-\beta t\} \ln(z/p_f)\right\} E\left[\exp\left\{\delta \int_0^t \exp\{-\beta(t-s)\} X_s ds\right\} \middle| X_0 = x\right]. \quad (29)$$

В отличие от предыдущего случая математическое ожидание для построения прогноза вычисляется при условии, что начальное значение процесса X равно x и текущее значение цены равно z , поскольку в данном случае нет взаимнооднозначного соответствия между ценой P_0 и значением индекса настроения X_0 .

Введем обозначение для экспоненты от интеграла случайной величины, входящей в решение (7) уравнения динамики цены

$$Y_t = \exp \left\{ \delta \int_0^t e^{-\beta(t-s)} X_s ds \right\},$$

а также для ее математического ожидания, при условии того, что значение случайного процесса X на начальный момент времени $t = 0$ равно x :

$$v(t, x) = E[Y_t | X_0 = x]. \quad (30)$$

Пользуясь результатом, представленным в (Гихман, Скороход, 1965, глава VII, §5, теорема 2), можно показать, что функция $v(t, x)$, заданная равенством (30), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = b(1-x^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2ax \frac{\partial v}{\partial x} + \delta e^{-\beta t} x v(t, x) \quad (31)$$

и условию

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v(t, x) = 1. \quad (32)$$

Следуя (Ekström, 2011), граничные условия для численного решения данной задачи могут быть получены путем формальной подстановки $x = -1$ и $x = 1$ в (31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(t, -1) - 2a \frac{\partial v}{\partial x}(t, -1) + \delta e^{-\beta t} v(t, -1) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(t, 1) + 2a \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) - \delta e^{-\beta t} v(t, 1) &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, численно решая задачу (31), (32), (33), мы можем определить прогнозную динамику цены акции как

$$E[P_t | X_0 = x, P_0 = z] = p_f \exp\{\exp\{-\beta t\} \ln(z / p_f)\} v(t, x).$$

Пример данного прогноза для случая, когда параметры заданы как $a = 0,15$, $b = 0,07$, $\beta = 1,5$, $\delta = 1,75$ и $p_f = 1,0$, представлен на рис. 5. Начальное значение цены при этом выбрано равным $z = 1,0$.

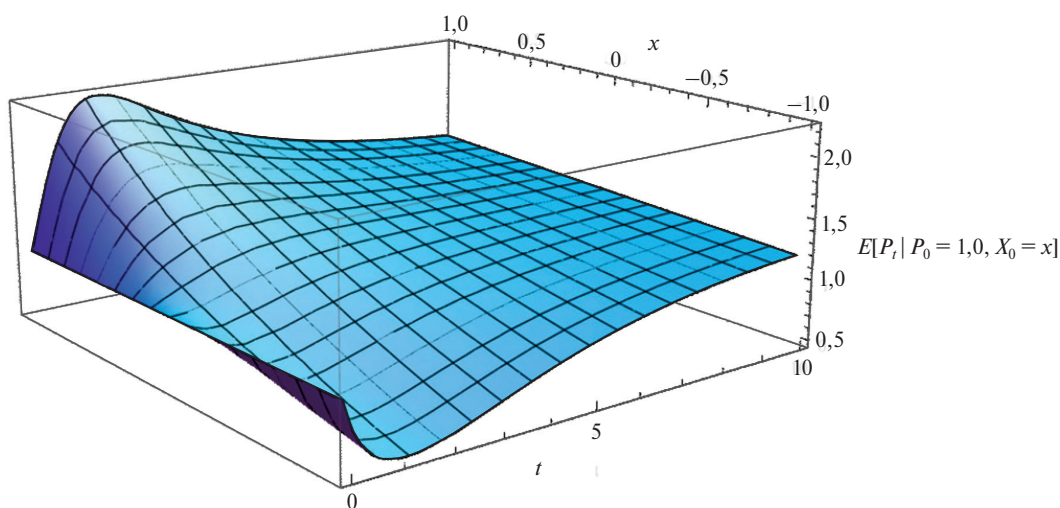


Рис. 5. Прогнозная динамика цены P_t в зависимости от начальных значений процесса X

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕН ОПЦИОНОВ

Исследуем вопрос, связанный с определением цены европейского колл-опциона со страйком, равным K , и моментом исполнения T в рамках оригинальной модели (6), (3) динамики цены акции. Функция выплат для данного контракта имеет вид

$$\varphi(P) = \begin{cases} 0, & P \leq K; \\ P - K, & P > K, \end{cases} \quad (34)$$

в соответствии с которым покупатель данного контракта в момент времени T получает выплату в размере $\varphi(P_T)$. Пользуясь формулой Ито (Оксендаль, 2003), выпишем выражение для дифференциала процесса P_t :

$$\begin{aligned} dP_t &= p_f \delta_0 e^{\delta_0 X_t} dX_t + p_f \delta_0 e^{\delta_0 X_t} (dX_t)^2 / 2 = P_t \left(\delta_0 dX_t + \delta_0^2 b(1 - X_t^2) dt \right) = \\ &= P_t \left(\left(\delta_0^2 b(1 - X_t^2) - 2\delta_0 a X_t \right) dt + \delta_0 \sqrt{2b(1 - X_t^2)} dW_t \right). \end{aligned}$$

Поскольку P_t и X_t связаны взаимно однозначно, подставляя в последнее выражение $X_t = \ln(P_t / p_f) / \delta_0$, получим

$$dP_t = P_t (\mu_P(P_t) dt + \sigma_P(P_t) dW_t), \quad (35)$$

где

$$\mu_P(P_t) = b \left(\delta_0^2 - \left[\ln(P_t / p_f) \right]^2 \right) - 2a \ln(P_t / p_f), \quad \sigma_P(P_t) = \sqrt{2b \left(\delta_0^2 - \left[\ln(P_t / p_f) \right]^2 \right)}.$$

Воспользуемся техникой, описанной в (Бьорк, 2010), для построения хеджирующего портфеля, состоящего из некоторого числа рассматриваемых акций и некоторого объема вложений в безрисковый актив, стоимость которого меняется как $Q_t = e^{rt}$, $t \geq 0$, где r — безрисковая ставка. Управление данным портфелем будем осуществлять в соответствии со стратегией самофинансирования так, чтобы стоимость данного портфеля в момент времени T была равной $\varphi(P_T)$. Вследствие соображений безарбитражности, если стоимость портфеля совпадает со стоимостью рассматриваемого контракта в некоторый, заранее известный момент будущего, их стоимости в момент времени $t = 0$ также должны совпадать.

Докажем следующее утверждение для европейского колл-опциона с моментом исполнения T и функцией выплат (34) в рамках рассматриваемой модели динамики цены.

Утверждение 4. *Стоимость хеджирующего портфеля на момент времени t , $0 \leq t \leq T$, равна $f(t, P_t)$, где $f(t, p)$ — функция, являющаяся решением уравнения*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rp \frac{\partial f}{\partial p} + bp^2 \left(\delta_0^2 - \left[\ln(P_t / p_f) \right]^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = rf(t, p) \quad (36)$$

вместе с условием

$$f(T, p) = \varphi(p). \quad (37)$$

При этом в указанный портфель входит $\alpha_t = \partial f(t, P_t) / \partial p$ единиц акции с ценой P_t и $\beta_t = f(t, P_t) - \alpha_t P_t$ денежных единиц, вложенных в безрисковый актив.

Доказательство. Обозначим стоимость указанного портфеля как f_t , и согласно его определению имеем

$$f_t = \alpha_t P_t + \beta_t Q_t, \quad (38)$$

где α_t — число акций в рассматриваемом портфеле, β_t — объем безрисковых вложений. Поскольку управление данным портфелем осуществляется в рамках стратегии самофинансирования (Бьорк, 2010), то

$$df_t = \alpha_t dP_t + \beta_t dQ_t = \alpha_t dP_t + \beta_t r Q_t dt. \quad (39)$$

Предположим, что стоимость портфеля может быть определена при помощи неизвестной функции от переменных $f(t, p)$ как $f_t = f(t, P_t)$. Пользуясь формулой Ито, найдем выражение для дифференциала $df_t = df(t, P_t)$:

$$df_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} P_t^2 \sigma_P^2(P_t) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial p} dP_t. \quad (40)$$

Приравнявая множители при дифференциалах в (39) и (40), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, P_t) + \frac{1}{2} P_t^2 \sigma_P^2(P_t) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(t, P_t) &= r \beta_t Q_t = r(f(t, P_t) - \alpha_t P_t), \\ \frac{\partial f}{\partial p}(t, P_t) &= \alpha_t. \end{aligned}$$

Сопоставляя эти два выражения, а также выражение для волатильности из (35), мы видим, что функция $f(t, p)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rp \frac{\partial f}{\partial p} + bp^2 \left(\delta_0^2 - \left(\ln \frac{p}{p_f} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = rf(t, p)$$

вместе с начальным условием

$$f(T, p) = \varphi(p),$$

выбор которого обусловлен тем, что по определению портфеля его стоимость в момент времени $t = T$ должна совпадать со стоимостью опциона.

Для практического применения доказанного утверждения и связанного с этим численного решения задачи Коши для функции $f(t, p)$ заметим, что в рассматриваемой модели цена P_t является ограниченной $l_m \leq P_t \leq l_M$, где $l_m = e^{-\delta_0} p_f$ и $l_M = e^{\delta_0} p_f$, поэтому для решения уравнения (36) на прямоугольнике $[0, T] \times [l_m, l_M]$, следуя (Ekström, 2011), зададим граничные условия, формально подставив $p = l_m$ и $p = l_M$ в (36):

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, l_m) + r l_m \frac{\partial f}{\partial p}(t, l_m) = rf(t, l_m), \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, l_M) + r l_M \frac{\partial f}{\partial p}(t, l_M) = rf(t, l_M). \quad (41)$$

Функция $f(t, p)$, служащая решением задачи (36), (37), (41), будет искомой функцией, позволяющей находить стоимость хеджирующего портфеля при заданных t и $p = P_t$.

Таким образом, стоимость европейского колл-опциона, покупатель которого в момент времени T получает выплату в размере $P_T - K$, если $P_T > K$, и 0 в противном случае, равна $f(0, P_0)$, где P_0 — текущее значение цены. С позиции продавца это утверждение также представляется интересным в том смысле, что рассчитывая цену по изложенному выше алгоритму и закладывая к ней некоторую дополнительную премию, продавец имеет возможность застраховать свои риски, связанные с предстоящей выплатой по заключенному контракту. Для этого ему необходимо сформировать портфель, состоящий из $\alpha_0 = \partial f(0, P_0) / \partial p$ единиц акции и $\beta_0 = f(0, P_0) - \alpha_0 P_0$ денежных единиц, вложенных в безрисковый актив. Управляя данным портфелем в соответствии с формулами для α_t и β_t , к моменту времени T он получит стоимость портфеля, равную $\varphi(P_T)$, которая необходима для выплаты покупателю данного контракта.

Приведем пример решения задачи по определению стоимости европейского колл-опциона. Параметры ценового процесса выберем, как и прежде, равными $b = 0,07$, $\delta_0 = 1,75$ и $p_f = 1,0$. Величину страйка положим равной $K = 3,0$, момент исполнения $T = 1,0$ и безрисковую ставку $r = 0,07$. Решение задачи (36), (37), (41) для данного случая представлено на рис. 6. Видно, что с приближением времени к моменту T график стоимости опциона постепенно приближается к графику функции выплат $\varphi(P)$.

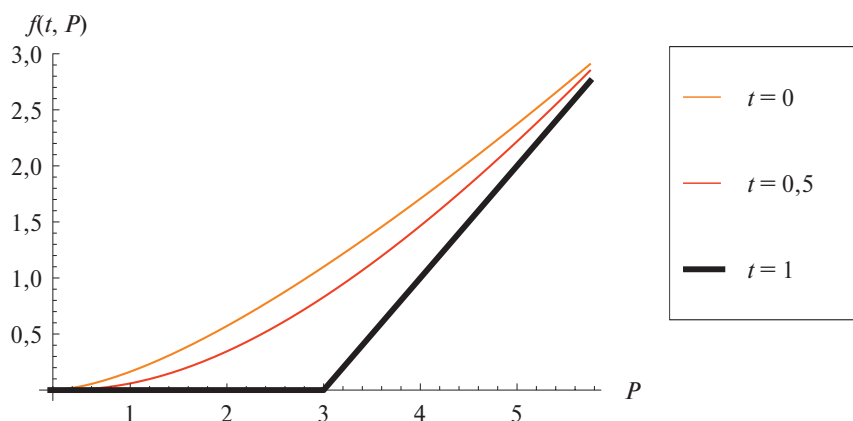


Рис. 6. График зависимости стоимости европейского колл-опциона от цены акции для различных моментов времени t

Отметим, что волатильность σ_P цены акции, в значительной степени влияющая на стоимость опциона, определяется параметрами b , δ_0 и p_f и является зависимой от значения цены P_t . Для представленного выше примера расчета цены опциона график волатильности приведен на рис. 7. Для рассматриваемой нами модели цены акции на рынке со стадным поведением волатильность не является постоянной. Напротив, она достигает своего максимума в точке $P = p_f$, а по приближению к границам ценового диапазона $[p_f e^{-\delta_0}, p_f e^{\delta_0}]$ убывает до нуля.

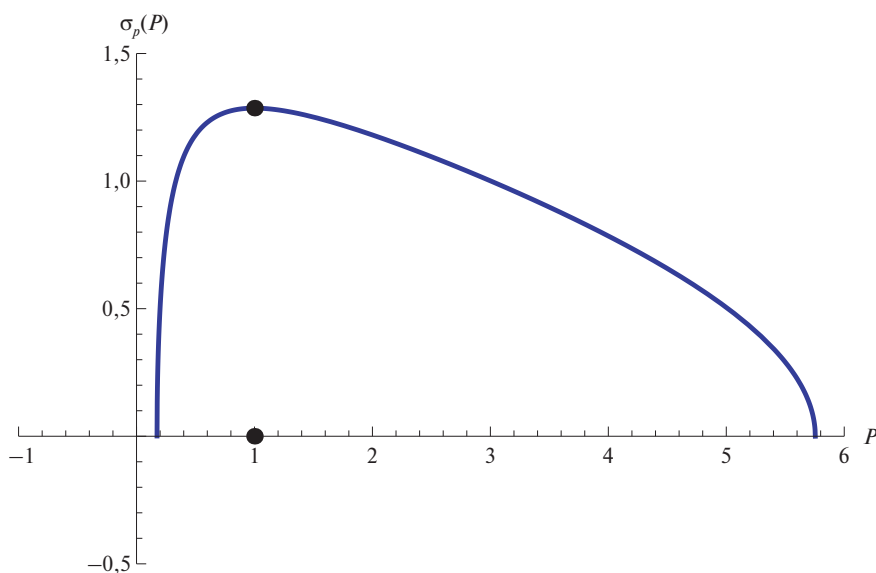


Рис. 7. График волатильности $\sigma_P(P)$ в зависимости от значения цены акции P

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели модель, предложенную (Alfarano et al., 2008), описывающую цену акции и учитывающую наличие на рынке так называемых шумовых трейдеров, проявляющих стадное поведение при принятии решений о покупке или продаже данного актива.

Нами представлен подход к исследованию поведения цены акции, основанный на диффузионном приближении процесса, характеризующего соотношение оптимистично и пессимистично настроенных трейдеров. В роли указанного приближения выступает так называемый процесс Якоби. Проведено исследование поведения данного процесса в зависимости от входных параметров модели. В частности, доказано что при $a < b$ точки $\{-1, 1\}$ являются регулярными границами пространства состояний данного процесса, а при $a \geq b$ они являются границами входа. Далее, основы-

ваясь на спектральном методе, представлено выражение для плотности переходных вероятностей данного процесса и получено аналитическое выражение для математического ожидания будущих значений цены акции. Исследован вопрос вычисления цен на производные финансовые инструменты в рамках рассматриваемой модели, в частности, доказано, что модель (Alfarano et al., 2008) цены акции является полной, для нее возможно выписать формулы для нахождения стоимости европейского колл-опциона и построить для него хеджирующий портфель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бородин А.Н.** (2013). Случайные процессы. СПб.: Лань.
- Бьорк Т.** (2010). Теория арбитража в непрерывном времени. М.: МЦНМО. [Björk T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. New York: Oxford University Press.]
- Гихман И.И., Скороход А.В.** (1965). Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука.
- Оксендаль Б.** (2003). Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: АСТ. [Øksendal B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg.]
- Abramowitz M., Stegun I.** (eds) (1965). *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications Inc.
- Alfarano S., Lux T., Wagner F.** (2008). Time Variation of Higher Moments in a Financial Market with Heterogeneous Agents: An Analytical Approach // *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 32. No. 1. P. 101–136.
- Bhattacharya R.N., Waymire E.C.** (2009). *Stochastic Processes with Applications*. In: “Society for Industrial and Applied Mathematics”. Berlin: Springer Berlin Heidelberg
- Cont R., Bouchaud J.P.** (2000). Herd Behavior and Aggregate Fluctuations in Financial Markets // *Macroeconomic Dynamics*. Vol. 4. No. 2. P. 170–196.
- Delbaen F., Shirakawa H.** (2002). An Interest Rate Model with upper and Lower Bounds // *Asia-Pacific Financial Markets*. Vol. 9. No. 3. P. 191–209.
- Ekström E., Tysk J.** (2011). Boundary Conditions for the Single-Factor Term Structure Equation // *The Annals of Applied Probability*. Vol. 21. No. 1. P. 332–350.
- Föllmer H., Schweizer M.** (1993) A Microeconomic Approach to Diffusion Models for Stock Prices // *Mathematical Finance*. Vol. 3. No. 1. P. 1–23.
- Karlin S., Taylor H.E.** (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*. New York: Academic Press.
- Kirman A.** (1993). Ants, Rationality, and Recruitment // *The Quarterly Journal of Economics*. Vol. 108. No. 1. P. 137–156.
- Kovalevsky D.V.** (2016). Modeling Herding Behavior on Financial Markets Affected by Exogenous Climate-Related Shocks. The 8th International Congress on Environmental Modelling and Software (iEMSs 2016), 10–14 July 2016, Toulouse, France. [Электронный ресурс] Conference paper in Brigham Young University ScholarsArchive Режим доступа: <https://scholarsarchive.byu.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://redir1.springer.com/&context=iemssconference>, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: ноябрь 2017 г.).

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Abramowitz M., Stegun I.** (eds) (1965). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Vol. 55). New York: Dover Publications Inc.
- Alfarano S., Lux T., Wagner F.** (2008). Time Variation of Higher Moments in a Financial Market with Heterogeneous Agents: An Analytical Approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32, 1, 101–136.
- Bhattacharya R.N., Waymire E.C.** (2009). *Stochastic Processes with Applications*. In: “Society for Industrial and Applied Mathematics”. Berlin: Springer Berlin Heidelberg.
- Björk T.** (2010). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Moscow: Lan'. [Björk T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. New York: Oxford University Press.]
- Borodin A.N.** (2013). *Random Processes*. Saint-Petersburg: Lan' (In Russian).
- Cont R., Bouchaud J.P.** (2000). Herd Behavior and Aggregate Fluctuations in Financial Markets. *Macroeconomic Dynamics*, 4, 2, 170–196.

- Delbaen F., Shirakawa H. (2002). An Interest Rate Model with upper and Lower Bounds. *Asia-Pacific Financial Markets*, 9, 3, 191–209.
- Ekström E., Tysk J. (2011). Boundary Conditions for the Single-Factor Term Structure Equation. *The Annals of Applied Probability*, 21, 1, 332–350.
- Föllmer H., Schweizer M. (1993). A Microeconomic Approach to Diffusion Models for Stock Prices. *Mathematical Finance*, 3, 1, 1–23.
- Gihman I.I., Skorohod A.V. (1979). The Theory of Stochastic Processes III. New York: Springer New York.
- Karlin S., Taylor H.E. (1981). A Second Course in Stochastic Processes. New York: Academic Press.
- Kirman A. (1993). Ants, Rationality, and Recruitment. *The Quarterly Journal of Economics*, 108, 1, 137–156.
- Kovalevsky D.V. (2016). Modeling Herding Behavior on Financial Markets Affected by Exogenous Climate-Related Shocks. The 8th International Congress on Environmental Modelling and Software (iEMSs 2016), 10–14 July 2016, Toulouse, France. Available at: <https://scholarsarchive.byu.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://redir1/article=1586&context=iemssconference> (accessed: November 2017).
- Øksendal B. (2003). Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin: Springer Berlin Heidelberg.

Herding Behaviour on Stock Market: Analysis and Forecasting

K.V. Svetlov

Bank 'Saint-Petersburg' PJSC, Saint-Petersburg, Russia

E-mail: kir.svetloff@gmail.com

Received 20.11.2017

This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-06-05625-a) “Consumer choice and herding behaviour in microeconomics: from analytical description towards realistic agent-based models”.

The author is grateful to the project co-ordinator — Dr. D.V. Kovalevsky for helpful comments. The organization providing the conditions for the project implementation is the Scientific Foundation “Nansen International Environmental and Remote Sensing Centre” (NIERSC, St. Petersburg).

We study the Alfarano model, which describes the dynamics of the stock price under the influence of the herding behavior of market participants. Within the framework of this model, two types of economic agents are distinguished: investors and noise traders. It is assumed that among traders there are optimistic traders expecting price value to rise and pessimistic traders expecting it to decline. The stochastic nature of the price in this model is formed by the changes of noise traders expectations. Unlike other stochastic models of price dynamics the price obtained within the framework of this model is bounded, while its boundaries are determined by the parameter of the market sensitivity to the changes of traders expectations. Using the diffusion approximation for the Markov process describing the ratio of numbers of optimistic and pessimistic traders, we analyze this model. Depending on the input parameters, we study such aspects of this model as the possibility of reaching price boundaries, when absolutely all traders have optimistic or pessimistic expectations. The main objective of the work is to build a forecast for future price values, including their long term asymptotics, as well as to derive the formulas for determining the value of derivatives (such as European call option) and to investigate the possibility of their hedging.

Keywords: herding behavior, stochastic dynamics, option pricing.

JEL Classifications: C63, G13.

DOI: 10.31857/S042473880003987-4