ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2019, том 55, № 2, с. 130–139

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Модель определения времени заказа поставки с учетом неопределенности сроков доставки

© 2019 г. О.А. Косоруков[i,*], С.Е. Маслов[ii,**], Н.А. Семенова[iii,***]

[i] МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва
[ii] ООО "Продимекс", Москва
[iii] Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Москва
[*] E-mail: kosorukovoa@mail.ru [**] E-mail: maslov10@mail.ru
[***] E-mail: senata13@gmail.com

Поступила в редакцию 18.09.2018 г.

В России большинство торговых предприятий при управлении товарными запасами ориентируются на средние показатели спроса и длительности поставки. Только некоторые крупные компании используют моделирование логистических процессов, которое повышает эффективность и результативность их деятельности, уменьшая издержки хранения и дефицита. В статье представлена модель управления запасами, а именно определения оптимального момента заказа поставки с учетом неопределенности времени доставки. В качестве критерия эффективности рассматривается критерий минимизации интегральных издержек, учитывающий издержки избыточных запасов и издержки отсутствия товара на складе. В качестве закона распределения случайного объема спроса рассматривается треугольное распределение как одно из наиболее применимых в условиях недостаточности статистических данных. Данная экономико-математическая модель позволяет при условии минимизации рисков оптимизировать момент поставки, основываясь на статистических данных о сроках доставки за предыдущий период или оценках экспертов, если таких данных не имеется. Это позволяет построить распределение вероятностей для случайной величины спроса и при случайном времени доставки, представленном с помощью треугольного распределения, аналитическими методами определить день заказа поставки новой партии товара в нужном объеме и условии минимизации рисков, что является новым и отличает ее от предыдущих работ.

Ключевые слова: управление запасами, минимизация издержек, момент поставки, неопределенность времени доставки, треугольное распределение.

Классификация JEL: C61.

DOI: 10.31857/S042473880004685-2

1. ВВЕДЕНИЕ

Влияние стратегий управления запасами на экономические показатели предприятия широко освещены в научной литературе (Аникин, Тяпухин, 2012; Бродецкий, 2004, 2007, 2010; Просветов, 2008; Цвиринько, 2003; Шикин, Чхартишвили, 2002). Наибольшую сложность для анализа представляют собой процессы, содержащие случайные или неопределенные параметры (Бродецкий, 2004, 2007, 2010; Бродецкий, Гусев, 2012; Дубров, Лагоша, Хрусталев, 2004; Шапиро, 2006). Однако в России большинство торговых предприятий при управлении товарными запасами ориентируются на средние показатели спроса и длительности поставки. Только в некоторых крупных компаниях используется моделирование логистических процессов, что позволяет им повышать эффективность и результативность своей деятельности, уменьшая издержки хранения и дефицита. Как промежуточный альтернативный вариант между ориентацией на усредненные показатели и применение методов математического моделирования в ряде научных публикаций предлагаются для практического использования псевдооптимальные алгоритмы (например, в (Титов, Цомаева, 2012)).

На практике часто возникает неопределенность, связанная с неточностью или неполнотой информации о спросе, временными задержками поставок, порчей продукции и т.п. Вводя в модель фактор неопределенности, мы можем найти наиболее эффективную стратегию управления запасами. Различные модели, учитывающие неопределенность, были рассмотрены, в частности, в работах (Косоруков, Свиридова, 2009а, 2009б, 2012; Kosorukov, Sviridova, 2015; Косоруков, Маслов, 2018а, 2018б; Рубальский, 1977; Юдин, 1974) и др., однако в постановке, приведенной в данной статье, задача ранее не рассматривалась. Например, в статье (Петрусевич, 2011) неопределенность спроса моделировалась на основе вариационного спектра оценок экспертов, что, исходя из предположения о равнозначности экспертных оценок, приводило автора к рассмотрению равномерного распределения в отличие от подхода, представленного в данной статье.

Итак, для успеха любой торговой компании нужна оптимальная стратегия управления запасами. Иначе это приведет к увеличению издержек, следовательно, повышению цены на продукцию, а значит, и потере конкурентоспособности предприятия. Кроме того, финансовые ресурсы, излишне вкладываемые в запасы, могли бы приносить дополнительную прибыль. Следовательно, возникает потребность в оптимальной бизнес-модели управления товарными запасами в условиях неопределенности, целевой функцией которой является минимизация дополнительных затрат с учетом ограничений, обусловленных экономической средой и спецификой деятельности предприятия. Задача оптимального использования финансовых ресурсов для формирования логистической структуры в данной работе не рассматривается (об этом см. в (Kosorukov, 2016)).

В статье под риском понимается отклонение реального значения времени доставки товара от ожидаемого. Считаем, что вероятность отклонения спроса на товар от прогнозного значения отсутствует (например, товар поставляется строго под заказ).

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим стохастическую модель с неопределенностью реального времени прихода товара на склад. Как правило, данную неопределенность нельзя полностью ликвидировать, можно лишь уменьшить, даже если грамотно спланировать весь процесс поставки.

Предположим, что спрос детерминирован, т.е. что из статистических данных известен момент окончания товара α в объеме Q. Неопределенность относительно момента реального прихода товара на склад x выражается формулой $x = t^* + \Delta t$, где t^* — момент назначения доставки товара; Δt — случайная величина, описывающая отклонение реального времени поставки от ожидаемого.

Будем считать, что случайная величина Δt распределена по треугольному закону на отрезке $[a, b]$. Параметры a, b, c определяются из статистических данных либо из экспертных оценок при соблюдении условия $a \le c \le b$, $a < b$, где a — нижний предел, b — верхний предел, c — мода (значение, встречающееся в распределении наиболее часто). В частном случае $a = c$ или $c = b$ треугольное распределение строится по двум точкам. Тогда время прихода товара x имеет также треугольное распределение случайной величины на отрезке $[t^* + a,\ t^* + b]$.

В функцию затрат включим издержки на хранение и издержки дефицита товара, содержащие риск упущенной выгоды и риск отсутствия требуемого товара на складе. Аналогичный подход к построению целевой функции издержек, а именно рассмотрение двух типов издержек — дефицита и хранения — представлен, например, в работе (Бухвалов, Петрусевич, 2011).

Издержки хранения объема Q от момента поставки x и до реального обнуления товара α, в случае когда поставка товара произошла раньше срока $x\,(x < \alpha)$, равны $I = pQ(\alpha - x)$, где $p = \text{const}$ — суточная стоимость хранения единицы продукции.

Издержки дефицита товара от момента реального обнуления товара α и до момента поставки x в объеме Q, в случае когда поставка товара произошла позже срока $x\,(x > \alpha)$, равны $D = Qz(x - \alpha)/\alpha$, где $z = \text{const}$ — прибыль от продажи единицы продукции; Q/α — средний суточный объем продаваемого товара.

Общие издержки рассчитываются по формуле:

$$I + D = \begin{cases} pQ(\alpha - x), & x < \alpha; \\ \dfrac{Qz(x - \alpha)}{\alpha}, & x > \alpha. \end{cases}$$

В качестве функции суммарных затрат рассматриваем ее математическое ожидание.

В описываемой модели неопределенность времени поставки характеризуется непрерывной случайной величиной Δt, имеющей треугольный закон распределения с плотностью

$$\rho(\Delta t)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } \Delta t<a; \\ \dfrac{2(\Delta t-a)}{(b-a)(c-a)} \quad \text{при } a\le \Delta t<c; \\ \dfrac{2}{b-a} \quad \text{при } \Delta t=c; \\ \dfrac{2(b-\Delta t)}{(b-a)(b-c)} \quad \text{при } \tilde{n}<\Delta t\le b; \\ 0 \quad \text{при } b<\Delta t. \end{cases}$$

Математическое ожидание суммарных издержек принимает вид:

$$F(t^*)=\int_a^b \frac{Q}{\alpha} z(t^*+\Delta t-\alpha)\rho(\Delta t)\,d\Delta t+\int_a^b pQ(\alpha-t^*-\Delta t)\rho(\Delta t)\,d\Delta t. \tag{1}$$

Поставленная задача минимизации рисков управления запасами, описанная выражением

$$F(t^*)\to \min_{t^*}, \tag{2}$$

состоит в отыскании такого момента назначения поставки t^*, при котором математическое ожидание суммарных издержек будет минимальным.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Разделим выражение (1) на две части:

$$F(t^*)=F_D(t^*)+F_I(t^*). \tag{3}$$

Первое слагаемое в (3) имеет вид:

$$F_D(t^*)=\int_a^b \frac{Q}{\alpha} z(t^*+\Delta t-\alpha)\rho(\Delta t)\,d\Delta t. \tag{4}$$

Интеграл в формуле (4) существует при $x>\alpha$, что равносильно $t^*+\Delta t>\alpha,$ а значит, интеграл (4) существует и при $\Delta t>\alpha-t^*$.

Рассмотрим четыре возможных случая.

1. При $\alpha-t^*<a<b$ неравенство $t>\alpha-t^*$ выполняется на всем отрезке $[a, b]$, следовательно:

$$F_{D_1}(t^*)=\int_a^c \underbrace{\frac{Q}{\alpha}}_{K_1} z(t^*+\Delta t-\alpha)\frac{2(\Delta t-a)}{(b-a)(c-a)}d\Delta t+\int_c^b \underbrace{\frac{Q}{\alpha}}_{K_1} z(t^*+\Delta t-\alpha)\frac{2(b-\Delta t)}{(b-a)(b-c)}d\Delta t=$$

$$=\frac{2K_1}{(b-a)}\left[\frac{1}{(c-a)}\int_a^c (t^*+\Delta t-\alpha)(\Delta t-a)\,d\Delta t+\frac{1}{(b-c)}\int_c^b (t^*+\Delta t-\alpha)(b-\Delta t)\,d\Delta t\right].$$

Опуская вычисления определенного интеграла, приведем лишь конечный результат для $F_D(t^*)$:

$$F_{D_1}(t^*)=\frac{K_1(3t^*+a+b+c-3\alpha)}{3}. \tag{5}$$

2. При $a\le\alpha-t^*<c<b$ неравенство $\Delta t>\alpha-t^*$ выполняется на отрезках $[\alpha-t^*; c]$ и $[c; b]$ и не выполняется на $[a; \alpha-t^*],$ следовательно:

$$F_{D_2}\left(t^*\right)=\int\limits_{\alpha-t^*}^{c}\underbrace{\frac{Q}{\alpha}}_{K_1}z\left(t^*+\Delta t-\alpha\right)\frac{2(\Delta t-a)}{(b-a)(c-a)}d\Delta t+\int\limits_{c}^{b}\underbrace{\frac{Q}{\alpha}}_{K_1}z\left(t^*+\Delta t-\alpha\right)\frac{2(b-\Delta t)}{(b-a)(b-c)}d\Delta t=$$
$$=\frac{2K_1}{(b-a)}\left[\frac{1}{(c-a)}\int\limits_{\alpha-t^*}^{c}\left(t^*+\Delta t-\alpha\right)(\Delta t-a)\,d\Delta t+\frac{1}{(b-c)}\int\limits_{c}^{b}\left(t^*+\Delta t-\alpha\right)(b-\Delta t)\,d\Delta t\right].$$

Как и в случае 1, опускаем вычисления определенного интеграла. $F_D\left(t^*\right)$ во втором случае примет вид:

$$F_{D_2}\left(t^*\right)=\frac{K_1}{3(b-a)}\left[\frac{1}{(c-a)}\left(\alpha-t^*-c\right)^2\left(\alpha-t^*-3a+2c\right)+(b-c)\left(3t^*+b+2c-3\alpha\right)\right]. \quad (6)$$

3. При $a<c\le\alpha-t^*<b$ неравенство $\Delta t>\alpha-t^*$ выполняется на отрезке $[\alpha-t^*;b]$ и не выполняется на отрезке $[a;\alpha-t^*]$, следовательно:

$$F_{D_3}\left(t^*\right)=\int\limits_{\alpha-t^*}^{b}\underbrace{\frac{Q}{\alpha}}_{K_1}z\left(t^*+\Delta t-\alpha\right)\frac{2(b-\Delta t)}{(b-a)(b-c)}d\Delta t=$$
$$=\frac{2K_1}{(b-a)(b-c)}\int\limits_{\alpha-t^*}^{b}\left(t^*+\Delta t-\alpha\right)(b-\Delta t)\,d\Delta t=\ldots=F_{D_3}\left(t^*\right)=\frac{-K_1}{3(b-a)(b-c)}\left(\alpha-t^*-b\right)^3. \quad (7)$$

4. При $b<\alpha-t^*$ неравенство $\Delta t>\alpha-t^*$ не выполняется, следовательно, интеграл $F_D\left(t^*\right)$ в области $\left(b;+\infty\right)$ не существует, а значит,

$$F_{D_4}\left(t^*\right)=0. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое выражения (3):

$$F_I\left(t^*\right)=\int\limits_a^b pQ\left(\alpha-t^*-\Delta t\right)\rho(\Delta t)\,d\Delta t. \quad (9)$$

Интеграл в формуле (9) существует при $x<\alpha$, это равносильно тому, что $t^*+\Delta t<\alpha$, или $\alpha-t^*>\Delta t$. Рассмотрим четыре возможных случая.

1. При $\alpha-t^*<a$ неравенство $\alpha-t^*>\Delta t$ не выполняется, следовательно, интеграл $F_I\left(t^*\right)$ в области $(-\infty;a)$ не существует, а значит,

$$F_{I_1}\left(t^*\right)=0. \quad (10)$$

2. При $a\le\alpha-t^*<c<b$ неравенство $\alpha-t^*>\Delta t$ выполняется на $[a;\alpha-t^*]$ и не выполняется на $[\alpha-t^*;b]$, следовательно,

$$F_{I_2}\left(t^*\right)=\int\limits_a^{\alpha-t^*}\underbrace{pQ}_{K_2}\left(\alpha-t^*-\Delta t\right)\frac{2(\Delta t-a)}{(b-a)(c-a)}d\Delta t=$$
$$=\frac{2K_2}{(b-a)(c-a)}\int\limits_a^{\alpha-t^*}\left(\alpha-t^*-\Delta t\right)(\Delta t-a)\,d\Delta t=\ldots=\frac{K_2}{3(b-a)(c-a)}\left(\alpha-a-t^*\right)^3. \quad (11)$$

3. При $a<c\le\alpha-t^*<b$ неравенство $\alpha-t^*>\Delta t$ выполняется на $[a;c]$ и $[c;\alpha-t^*]$ и не выполняется на $[\alpha-t^*;b]$, следовательно,

$$F_{I_3}(t^*)=\int_a^c \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha-t^*-\Delta t)\frac{2(\Delta t-a)}{(b-a)(c-a)}d\Delta t+\int_c^{\alpha-t^*}\underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha-t^*-\Delta t)\frac{2(b-\Delta t)}{(b-a)(b-c)}d\Delta t=$$
$$=\frac{2K_2}{(b-a)}\left[\frac{1}{(c-a)}\int_a^c(\alpha-t^*-\Delta t)(\Delta t-a)d\Delta t+\frac{1}{(b-c)}\int_c^{\alpha-t^*}(\alpha-t^*-\Delta t)(b-\Delta t)d\Delta t\right]=\ldots \quad (12)$$
$$=\frac{K_2}{3(b-a)}\left[(a-c)(3t^*+a+2c-3\alpha)+\frac{1}{(b-c)}(t^*+c-\alpha)^2(t^*+3b-2c-\alpha)\right].$$

4. При $a<b\le\alpha-t^*$ неравенство $\alpha-t^*>\Delta t$ выполняется на всем отрезке [a; b], следовательно:

$$F_{I_4}(t^*)=\int_a^c \underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha-t^*-\Delta t)\frac{2(\Delta t-a)}{(b-a)(c-a)}d\Delta t+\int_c^{b}\underbrace{pQ}_{K_2}(\alpha-t^*-\Delta t)\frac{2(b-\Delta t)}{(b-a)(b-c)}d\Delta t=$$
$$=\frac{2K_2}{(b-a)}\left[\frac{1}{(c-a)}\int_a^c(\alpha-t^*-\Delta t)(\Delta t-a)d\Delta t+\frac{1}{(b-c)}\int_c^{b}(\alpha-t^*-\Delta t)(b-\Delta t)d\Delta t\right]= \quad (13)$$
$$=\ldots=\frac{K_2}{3}(3\alpha-a-b-c-3t^*).$$

Найдем математическое ожидание суммарных издержек в каждой из областей. Для этого сложим полученные формулы (5) и (10), (6) и (11), (7) и (12), (8) и (13) и получим:

$$F_1(t^*)=F_{D_1}(t^*)+F_{I_1}(t^*)=\frac{K_1(3t^*+a+b+c-3\alpha)}{3},$$

$$F_2(t^*)=F_{D_2}(t^*)+F_{I_2}(t^*)=\frac{K_1}{3(b-a)}\left[\frac{(\alpha-t^*-c)^2(\alpha-t^*-3a+2c)}{c-a}+(b-c)(3t^*+b+2c-3\alpha)\right]+$$
$$+\frac{K_2}{3(b-a)(c-a)}(\alpha-a-t^*)^3, \quad (14)$$

$$F_3(t^*)=F_{D_3}(t^*)+F_{I_3}(t^*)=\frac{-K_1}{3(b-a)(b-c)}(\alpha-t^*-b)^3+$$
$$+\frac{K_2}{3(b-a)}\left[(a-c)(3t^*+a+2c-3\alpha)+\frac{(t^*+c-\alpha)^2(t^*+3b-2c-\alpha)}{b-c}\right], \quad (15)$$

$$F_4(t^*)=F_{D_4}(t^*)+F_{I_4}(t^*)=\frac{K_2(3\alpha-a-b-c-3t^*)}{3}.$$

Найдем минимум ожидаемых издержек в каждой из областей.

1. $F_1(t^*)=K_1(3t^*+a+b+c-3\alpha)/3$ — линейная возрастающая функция, минимальное значение достигается при $F_1(t^*)=0$. Определим точку, в которой $F_1(t^*)=0$:

$$\frac{K_1}{3}(3t^*+a+b+c-3\alpha)=0\Rightarrow 3t^*+a+b+c-3\alpha=0\Rightarrow t^*=\alpha-\frac{a+b+c}{3}/\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -a+\frac{a+b+c}{3}=\frac{b+c-2a}{3}>0.$$

Следовательно, $F_1(t^*)$ пересекает ось 0t правее области $(-\infty;\alpha-a]$, а значит, в этой области $F_1(t^*)$ отрицательная, что противоречит области значений.

2. Чтобы найти минимум $F_2(t^*)$, возьмем производную функции (14) и приравняем ее к нулю. Опуская промежуточные вычисления, получим:

$$\frac{\partial F_2(t^*)}{\partial t^*}=-\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(c-a)}(\alpha-a-t^*)^2+K_1. \quad (16)$$

Приравняем выражение (16) к нулю:

$$-\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(c-a)}(\alpha-a-t^*)^2+K_1=0\Rightarrow\ldots\Rightarrow\alpha-a-t^*=\pm\sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}^*=\alpha-a\pm\sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}.$$

Графиком функции $-\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(c-a)}(\alpha-a-t^*)^2+K_1=0$ является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $-(K_1+K_2)/[(b-a)(c-a)]<0,$ а производная $\partial F_2(t^*)/\partial t^*$ меняет знак с минуса на плюс в точке t_1^*:

$$t_1^*=\alpha-a-\sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}. \tag{17}$$

Значит, t_1^* — минимум функции $F_2(t^*)$. Найдем значение функции $F_2(t^*)$ в точке минимума, для этого подставим (17) в (14) и, опуская промежуточные преобразования, получим

$$F_2(t_1^*)=\frac{K_1}{3}\left(b+c-2a-2\sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}\right).$$

Таким образом, минимальное значение функции $F_2(t^*)$ находится из формулы

$$\min_{t^*=\alpha-a-\sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}} F_2(t^*)=\frac{K_1}{3}\left(b+c-2a-2\sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}\right). \tag{18}$$

3. Чтобы найти минимум $F_3(t^*)$, возьмем производную функции (15) и приравняем ее к нулю. Опуская промежуточные вычисления, получим:

$$\frac{\partial F_3(t^*)}{\partial t^*}=\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(b-c)}(\alpha-b-t^*)^2-K_2.$$

Приравняем это выражение к нулю и после несложных вычислений имеем:

$$t_{1,2}^*=\alpha-b\pm\sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}.$$

Графиком функции $\frac{(K_1+K_2)}{(b-a)(b-c)}(\alpha-b-t^*)^2-K_2=0$ является парабола, ветви направлены вверх, так как $(K_1+K_2)/[(b-a)(b-c)]>0.$ Производная $\partial F_3(t^*)/\partial t^*$ меняет знак с минуса на плюс в точке t_2^*:

$$t_2^*=\alpha-b+\sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}. \tag{19}$$

Значит, t_2^* является минимумом функции $F_3(t^*)$.

Найдем значение функции $F_3(t^*)$ в точке минимума, для этого подставим (19) в (15), после несложных вычислений имеем:

$$F_3(t_2^*)=\frac{K_2}{3}\left(2b-a-c-2\sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}\right).$$

Таким образом, минимальное значение функции $F_3(t^*)$ находится по формуле

$$\min_{t^*=\alpha-b+\sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}} F_3(t^*)=\frac{K_2}{3}\left(2b-a-c-2\sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}\right). \quad (20)$$

Так как $F_4(t^*)=\frac{K_2}{3}(3\alpha-a-b-c-3t^*)$ — линейная убывающая функция, ее минимальное значение достигается при $F_4(t^*)=0.$ Определим точку, в которой $F_4(t^*)=0.$

Этой точкой будет $t^*=\alpha-(a+b+c)/3.$ Следовательно, $F_4(t^*)$ пересекает ось $0t$ левее области $[\alpha-b;+\infty),$ а значит, в этой области $F_4(t^*)$ отрицательная, что противоречит области значений.

Чтобы найти минимальное значение функции $F(t^*),$ сравним выражения (18) и (20) и найдем среди них минимальное. Для этого вычтем выражение (20) из выражения (18):

$$\frac{K_1}{3}\left(b+c-2a-2\sqrt{\frac{K_1(b-a)(c-a)}{(K_1+K_2)}}\right)-\frac{K_2}{3}\left(2b-a-c-2\sqrt{\frac{K_2(b-a)(b-c)}{(K_1+K_2)}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left((K_1-2K_2)b+(K_2-2K_1)a+(K_1+K_2)c-2\sqrt{\frac{(b-a)}{(K_1+K_2)}}\left(K_1\sqrt{K_1(c-a)}-K_2\sqrt{K_2(b-c)}\right)\right).$$

В полученном выражении знак зависит от параметров: a, b, c, $K_1=Qz/\alpha_0$, $K_2=Qp.$

Тогда:

если $p\left(2b-a-c-2\sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{(z/\alpha+p)}}\right)>\frac{z}{\alpha}\left(b+c-2a-2\sqrt{\frac{z(b-a)(c-a)/\alpha}{(z/\alpha+p)}}\right),$ то

$$t^*=\alpha-a-\sqrt{\frac{z(b-a)(c-a)/\alpha}{(z/\alpha+p)}}; \quad (21)$$

если $p\left(2b-a-c-2\sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{(z/\alpha+p)}}\right)<\frac{z}{\alpha}\left(b+c-2a-2\sqrt{\frac{z(b-a)(c-a)/\alpha}{(z/\alpha+p)}}\right),$ то

$$t^*=\alpha-b+\sqrt{\frac{p(b-a)(b-c)}{(z/\alpha+p)}}. \quad (22)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанная модель позволяет при случайном времени поставки определить день заказа поставки новой партии товара в определенном объеме при условии минимизации рисков. В случае треугольного распределения данная оптимизационная задача имеет аналитическое решение, сводящееся к вычислению по формулам (21)—(22).

В подавляющем большинстве стохастических моделей управления запасами не удается получить аналитического решения. В этих случаях применяются методы имитационного моделирования, представленные, например, в работах (Дубров и др., 2004; Емельянов и др., 2006; Иваненко, Лабковский, 1990). Использование имитационных моделей существенно затрудняет нахождение оптимальных параметров алгоритмов управления запасами в силу вычислительной сложности задачи и необходимости привлекать специальное программное обеспечение. Возникает нетривиальная задача создания алгоритмов имитации спроса, представленная, например, в работе (Косоруков и др., 2014).

Результат, а именно вид аналитического выражения и его содержание, зависят от входных параметров модели: момента времени окончания товара (α); суточной стоимости хранения единицы продукции (p); прибыли от продажи единицы продукции (Z), а также параметров треугольного распределения a, b, c случайной величины Δt, описывающей отклонение реального времени поставки товара на склад от ожидаемого.

В работе (Косоруков, Маслов, 2018а) рассматривалась аналогичная задача для случая неопределенности спроса; в (Косоруков, Свиридова, 2009б), 2012; Kosorukov, Sviridova, 2015) — задача в аналогичной постановке, но для случая, когда случайную величину, описывающую отклонение реального времени поставки товара на склад от ожидаемого, можно считать нормально распределенной. Во-первых, не всегда верно описывать неопределенность времени доставки нормальным законом распределения, а во-вторых, зачастую компания не располагает достаточным объемом статистических данных для тестирования выборки реализаций случайной величины на ее соответствие нормальному закону распределения. В этой связи хотелось бы отметить практическую реализуемость полученных в данной статье результатов, поскольку оценка параметров треугольного распределения в случае отсутствия достаточного объема статистических данных может быть произведена экспертным путем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аникин Б.А., Тяпухин А.П. (2012). Коммерческая логистика. М.: Проспект.

Бродецкий Г.Л. (2004). Методы стохастической оптимизации. Математические модели управления запасами. Учебное пособие. М.: РЭА.

Бродецкий Г.Л. (2007). Управление запасами. М.: Эксмо.

Бродецкий Г.Л. (2010). Системный анализ в логистике. Выбор в условиях неопределенности. М.: Академия.

Бродецкий Г.Л., Гусев Д.А. (2012). Экономико-математические методы и модели в логистике. Процедуры оптимизации. М.: Академия.

Бухвалова В.В., Петрусевич А.В. (2011). Определение оптимальных объемов производства в условиях информационной неопределенности спроса // *Экономика и математические методы*. Т. 47 (2). С. 3—23.

Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. (2004). Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе. М.: Финансы и статистика.

Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В. (2006). Имитационное моделирование экономических процессов. М.: Финансы и статистика.

Иваненко В.И., Лабковский В.А. (1990). Проблемы неопределенности в задачах принятия решений. Киев: Наукова думка.

Косоруков О.А., Свиридова О.А. (2009а). Модель минимизации издержек в системах управления запасами с учетом неопределенности спроса // *Логистика и управления цепями поставок*. № 5 (34). С. 52—58.

Косоруков О.А., Свиридова О.А. (2009б). Модель минимизации издержек в системах управления запасами // *Вестник Российской экономической академии имени Г.В. Плеханова*. № 6 (30). С. 94—102.

Косоруков О.А., Свиридова О.А. (2012). Стохастическая непрерывная модель управления запасами // *Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова*. № 4 (46). С. 91—95.

Косоруков О.А., Максимов Д.А., Шимченко Е.Д. (2014). Некоторые аспекты моделирования спроса в имитационных моделях управления запасами // *Логистика*. № 12. С. 48—50.

Косоруков О.А., Маслов С.Е. (2018а). Модель определения времени поставки с учетом неопределенности спроса // *Логистика и управление цепями поставок*. № 4 (87). С. 45—52.

Косоруков О.А., Маслов С.Е. (2018б). Инновационные подходы к управлению запасами в условиях неопределенности. В: “Инновационная экономика и менеджмент: Методы и технологии”. Сборник материалов III Международной научно-практической конференции. Москва, 16 мая 2018 г. МГУ имени М.В. Ломоносова. Косоруков О.А., Печковская В.В., Красильников С.А. (ред.). М.: Аспект Пресс. С. 205—208.

Петрусевич А.В. (2011). Оптимальное управление объемами выпуска в условиях неопределенности спроса // *Российский журнал менеджмента*. Т. 9. № 4. С. 35—50.

Просветов Г.И. (2008). Математические методы в логистике. Задачи и решения. М.: Альфа-Пресс.

Рубальский Г.Б. (1977). Управление запасами при случайном спросе (модели с непрерывным временем). М.: Советское радио.

Титов В.В., Цомаева И.В. (2012). Управление серийным производством на предприятиях машиностроения в условиях неопределенности спроса на продукцию // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки*. № 2. С. 101—106.

Цвиринько И.А. (2003). Методология, методы и модели управления логистическими бизнес-процессами. СПб.: СПбГИЭУ.

Шапиро Дж. (2006). Моделирование цепи поставок. СПб.: Питер.

Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. (2002). Математические методы и модели в управлении. М.: Дело.

Юдин Д.Б. (1974). Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Советское радио.

Kosorukov O.A., Sviridova O.A. (2015). "Effective Strategy Formation Models for Inventory Management under the Conditions of Uncertainty" // *International Education Studies*. Vol. 8. No. 5. Doi: http://dx.doi.org/10.5539/.

Kosorukov O.A. (2016). Optimization Problems of Transportation in Communication Networks with Variable Capacities // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. Vol. 55. No. 6. P. 1010—1015. DOI: 10.1134/S1064230716060083.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Anikin B.A., Tyapuhin A.P. (2012). Commercial Logistic. Moscow: Prospekt (in Russian).

Brodezkiy G.L. (2004). Methods of Stochastic Optimization. Mathematical Models of Inventory Management: Textbook. Moscow: REA (in Russian).

Brodezkiy G.L. (2007). Inventory Management. Moscow: Eksmo (in Russian).

Brodezkiy G.L. (2010). System Analysis in Logistic. The Choice under Uncertainty. Moscow: Akademija (in Russian).

Brodezkiy G.L., Gusev D.A. (2012). Economical-Mathematical Methods and Models in Logistics. Optimization Procedures. Moscow: Akademija (in Russian).

Buhvalov V.V., Petrusevich A.V. (2011). Determination of Optimal Production Volumes in the Context of Demand Information Uncertainty. *Economics and Mathematical Methods*, 47 (2), 3—23 (in Russian).

Dubrov A.M., Lagosha B.A., Khrustalev E.Yu. (2004). Modelling of Risk Situations in Economy and Business. Moscow: Finansy i statistika (in Russian).

Emelianov A.A., Vlasov E.A., Duma R.V. (2006). Economical Process Simulation. Moscow: Finansy i statistika (in Russian).

Ivanenco V.I., Labcovskiy V.A. (1990). The Problems of Uncertainty in Decision Making. Kiev: Naukova dumka (in Russian).

Kosorukov O.A. (2016). Optimization Problems of Transportation in Communication Networks with Variable Capacities. Journal of Computer and Systems Sciences International, 55, 6, 1010—1015. DOI: 10.1134/S1064230716060083.

Kosorukov O.A., Maksimov D.A., Shimchenco E.D. (2014). Some Aspects of Demand Modelling in Inventory *Management Simulation Models. Logistics*, 12, 48—50 (in Russian).

Kosorukov O.A., Maslov S.E. (2018a). Model of Determining Delivery Time with Ucertainty of Demand. *Logistics and Supply Chain Management*, 4 (87), 45—52 (in Russian).

Kosorukov O.A., Maslov S.E. (2018b). Innovative Methods of Inventory Management under Uncertainty. In: "Innovative Economy and Management: Methods and Technologies". III International scientific-practical conference, Moscow, 16 May 2018, Lomonosov MSU. Kosorukov O.A., Pechkovskaja V.V., Krasil'nikov S.A. (eds). Moscow: Aspekt Press, 205—208 (in Russian).

Kosorukov O.A., Sviridova O.A. (2009a). Model of Cost Minimization in Inventory Management Systems with Uncertainty of Demand. *Logistics and Supply Chain Management*, 5 (34), 52—58 (in Russian).

Kosorukov O.A., Sviridova O.A. (2009b). Model of Cost Minimization in Inventory Management Systems. *Bulletin of the Russian Economic Academy named after G.V. Plekhanova*, 6 (30), 94—102 (in Russian).

Kosorukov O.A., Sviridova O.A. (2012). Stochastic Continuous Model of Inventory Management. *Bulletin of the Russian Economic Academy named after G.V. Plekhanova*, 4 (46), 91—95 (in Russian).

Kosorukov O.A., Sviridova O.A. (2015). Effective Strategy Formation Models for Inventory Management under the Conditions of Uncertainty. *International Education Studies*, 8, 5. Doi: http://dx.doi.org/10.5539/.

Petrusevich A.V. (2011). Optimal Control of Production Volumes in Conditions of Demand Uncertainty. *Russian Journal of Management*, 9, 4, 35—50 (in Russian).

Prosvetov G.I. (2008). Mathematical Methods in Logistics. Problems and Solutions. Moscow: Al'fa-Press (in Russian).

Rubalskiy G.B. (1977). Inventory Management under Uncertain Demand (Continuous Models). Moscow: Sovetskoe radio (in Russian).

Shapiro J. (2006). Supply Chains Modelling. Saint Petersburg: Piter (in Russian).

Shikin E.V., Chhartishwilly A.G. (2002). Mathematical Methods and Models in Management. Moscow: Delo (in Russian).

Titov V.V., Zomaeva I.V. (2012). Management of Serial Production at the Enterprises of Mechanical Engineering in the Conditions of Uncertainty in the Demand for Products. *Scientific and Technical Bulletins of the St. Petersburg State Polytechnic University*, 2, 101—106 (in Russian).

Tsvirin'ko I.A. (2003). Methodology, Methods and Models of Logistics Business-Process Control. Saint Petersburg: SPbGIEU (in Russian).

Udin D.B. (1974). Mathematical Methods of Control under Conditions of Incomplete Information. Moscow: Sovetskoe radio (in Russian).

Model of Determining the Moment of the Order of Delivery with the Account of Uncertainty of Delivery Time

O.A. Kosorukov[i,*], **S.E. Maslov**[ii,**], **N.A. Semenova**[iii,***]

[i] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[ii] *"Prodimex" Ltd., Moscow, Russia*
[iii] *Russian Economic University named after G.V. Plekhanov, Moscow, Russia*
[*] *E-mail: kosorukovoa@mail.ru* [**] *E-mail: maslov10@mail.ru*
[***] *E-mail: senata13@gmail.com*

Received 18.09.2018

In Russia, most of the trading enterprises in the management of commodity stocks are guided by the average demand and the duration of supply, and only some large companies use the modeling of logistics processes, which increases the efficiency and effectiveness of their operations, reducing the costs of storage and deficit. The article presents a model of inventory management, namely, determining the optimal delivery order moment, taking into account the uncertainty of delivery time. As a criterion of efficiency, a criterion for minimizing integral costs is considered, taking into account the costs of surplus stocks and the costs of the lack of goods in the warehouse. As a law of distribution of a random volume of demand, a triangular distribution is considered, as one of the most applicable under conditions of insufficient statistical data. The considered economic-mathematical model allows to optimize the moment of delivery provided that risks are minimized, based on the statistical data on delivery time for the previous period, or if such data are not available to use expert estimates. These data are sufficient for constructing the probability distribution for a random quantity of demand. The novelty of the work lies in the fact that the model presented in the article allows, with a random delivery time, represented by a triangular distribution, using analytical methods to determine the day of ordering the delivery of a new batch of goods in a certain volume, provided that risks are minimized.

Keywords: inventory management, cost minimization, delivery time, uncertainty of delivery order moment, triangular distribution.

JEL Classification: C61.

DOI: 10.31857/S042473880004685-2