
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Модель распределения доходов на основе конечной функциональной последовательности и ее применение для анализа неравенства

© 2020 г. А.Е. Варшавский

А.Е. Варшавский,

ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: varshav@cemi.rssi.ru, varshavae@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.02.2020

Аннотация. В статье развиваются результаты, полученные в опубликованных ранее работах автора, посвященных разработке новой модели распределения доходов, описываемой конечной функциональной последовательностью. Модель обеспечивает достаточно высокую точность аппроксимации распределения дохода по равным группам населения, что подтверждается результатами эмпирических исследований и обосновывается теоретически. При этом введение нового показателя неравенства, взаимосвязанного с коэффициентом Джини, а также с квинтильным и децильным коэффициентами фондов, позволяет с помощью разработанной модели рассчитать теоретические значения долей дохода 20- и 10%-ных групп (квинтилей и децилей) для различных уровней неравенства. Полученные результаты позволяют выявить особенности изменения доли доходов этих групп при росте неравенства. С помощью модели оказывается также возможным рассмотреть некоторые соотношения между доходами отдельных групп населения, характерные для различных уровней неравенства, а также получить для них аналитическое выражение; в частности, такое выражение получено для индекса Пальма. Эти соотношения могут в определенной степени служить нормативами при разработке политики перехода к снижению неравенства. Разработанная модель позволяет также обосновать оптимальный (гармоничный) уровень неравенства. В Приложении приводятся результаты оценки показателя неравенства для 18 стран.

Ключевые слова: неравенство, доход, модель, последовательность, многочлен, распределение, показатель неравенства.

Классификация JEL: D63, D31, D30, C51.

DOI: 10.31857/S042473880012411-1

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание стало уделяться проблемам, связанным со значительным ростом неравенства во многих странах, — как в наиболее развитых, так и в развивающихся (Alvaredo et al., 2013, 2017; Blanchet et al., 2017; Novokmet et al., 2017; Piketty, 2014; Saez, 2015; Stiglitz, 2012; Тихонова, 2018; Шевяков, 2010; Варшавский, 2019).

Для исследования этого процесса необходимы адекватные измерители. В настоящее время существует ряд методов, позволяющих получить представление о распределении неравенства, каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Помимо кривой Лоренца, широко используется индекс Джини, применяются также функция распределения Парето, лог-нормальное распределение (Айвазян, Мхитарян, 1998; Айвазян, 2012). Используются и более сложные индексы Аткинсона (Atkinson, 1970) и Тейла (Theil, 1967); Сен же предложил синтетический показатель бедности (Sen, 1976).

Используемые методы позволяют, как правило, получить агрегированную оценку уровня неравенства и бедности. Однако с их помощью представляется затруднительным выявить характер зависимости доли дохода каждой из 20- или 10%-ных групп населения от уровня неравенства; оценить уровень неравенства при определенных соотношениях между доходами различных групп населения; обосновать разумный диапазон уровня неравенства, за пределами которого значительно возрастает социальная напряженность в обществе, и т.д. Желательно также иметь возможность оценить влияние уровня неравенства доходов на экономический рост с помощью аналитической зависимости. Для этой цели автором ранее в ряде статей (Варшавский, 2007а, 2007б, 2010, 2017;

Varshavsky, 2008, 2009, 2010) был предложен подход, позволяющий подойти к решению указанных проблем.

В данной работе приводится обобщение и предлагается дальнейшее развитие разработанного автором метода, основанного на использовании модели неравенства, описываемой конечной функциональной последовательностью. Предложен новый показатель неравенства, взаимосвязанный с децильным и квинтильным коэффициентами фондов, а также с коэффициентом Джини. С помощью модели оказывается возможным получить теоретические оценки доли дохода 20- и 10%-ных групп населения для различных уровней неравенства, выявить особенности их изменения при росте неравенства и решить обратную задачу — рассчитать уровень неравенства при определенных соотношениях между доходами различных групп населения. С помощью предложенной модели становится также возможным обосновать оптимальный (гармоничный) уровень неравенства, а также определить диапазон изменения неравенства, при котором сохраняется социальная стабильность.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДА

В основе предложенной автором модели распределения дохода лежит предположение о том, что относительные (по отношению к доходу наиболее богатой группы) величины дохода всех равных по численности групп населения могут быть приближенно представлены в виде конечной функциональной последовательности $A(a, n)$, каждый член i которой определяется как отношение доходов соответствующей группы населения i к доходу наиболее богатой группы ($i = n$) и зависит от параметра a , характеризующего уровень неравенства и определяемого как *показатель неравенства*:

$$A(a, n) = \{A_1(a), \dots, A_i(a), \dots, A_n(a)\}, \quad (1)$$

где $A_i(a) = S_i(a)/S_n(a)$, $i = 1, \dots, n$; $A_n(a) = S_n(a)/S_n(a) \equiv 1$, $S_i(a)$ — доля доходов группы i в общем объеме доходов населения, i — номер группы ($i = 1$ соответствует наиболее бедной группе, $i = n$ — наиболее богатой), a — показатель неравенства, n — число равных групп населения.

На основе эмпирического анализа, а также теоретических предпосылок (см. указанные выше работы автора) в качестве базовой может быть выбрана конечная функциональная последовательность для наиболее часто используемого распределения доходов по 20%-ным группам (квинтилям), представляющая собой конечную степенную последовательность, образованную на базе конечной геометрической прогрессии, в которой изъяты второй и предпоследний члены. Эта последовательность имеет следующий вид:

$$A(a, 5) = \{a^{-6}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, 1\}, \quad (2)$$

т.е. $A_i(a) = a^{-(6-i)}$; $i = 2, 3, 4$; $A_5(a) = 1$, $A_1(a) = a^{-6}$, где $a \geq 1$.

Знаменатель прогрессии a очевидно характеризует уровень дохода каждой группы, он определен как показатель неравенства и находится с помощью метода наименьших квадратов (МНК) либо, например, через коэффициенты фондов (см. ниже).

Доли соответствующих 20%-ных доходных групп в общем доходе определяются по формулам:

$$Q_i(a) = a^{-(6-i)} / A(a^{-1}); \quad i = 2, 3, 4; \quad Q_5(a) = 1/A(a^{-1}), \quad Q_1(a) = a^{-6} / A(a^{-1}), \quad (3)$$

где

$$A(a^{-1}) = 1 + a^{-2} + a^{-3} + a^{-4} + a^{-6} \quad (4)$$

является характеристическим многочленом конечной степенной последовательности $A(a, 5)$.

На основе базового распределения доходов по квинтилям производится переход к распределению доходов для 10%-; 5%-; 2,5%-; 1,25%-ной и т.д. групп населения, при условии сохранения возможности обратного перехода к базовой последовательности (2).

С помощью выражений (3) и (4), а также представленного в следующем разделе выражения для распределения по децилям можно также решить обратную задачу — количественно оценить теоретическую величину дохода каждого квинтиля (дециля) при различных уровнях неравенства, задаваемых с помощью показателя a , который, как показано ниже, рассчитывается с помощью коэффициентов фондов и взаимосвязан с коэффициентом Джини.

Следует отметить, что в качестве базовой может быть также использована последовательность распределения доходов по 25%-ным группам (квартилям).

ПЕРЕХОД ОТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ ПО 20%-НЫМ ГРУППАМ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПО 10-; 5-; 2,5-; 1,25%-НОЙ ГРУППАМ

Модель (3)–(4) для 20%-ных групп может использоваться как базовая для перехода к распределению дохода по 10-; 5-; 2,5-; 1,25%-ной и т.д. группам населения путем построения соответствующей конечной последовательности. При этом необходимо, чтобы выполнялось условие обратимости перехода от распределения с номером $n = 5k$, $k = 2, 4, \dots$ к исходному распределению по квинтилям. Для этого следует изменить крайние (слева и справа) члены соответствующей исходной конечной последовательности (3)–(4).

Сконструируем конечную последовательность на основе базовой модели для $n=10$ следующим образом:

$$B(b, 10) = \{B_{10}, B_9, b^{-3}, b^{-4}, \dots, b^{-8}, B_2, B_1\},$$

где $b = a^{1/2}$, $B_{10} + B_9 = 1 + b$; $B_2 + B_1 = (1 + b)b^{-12}$, причем $B_{10} > B_9 > b^{-3}$, $b^{-8} > B_2 > B_1$.

Характеристический многочлен для последовательности $B(b, 10)$ будет иметь вид:

$$1 + b + b^{-3} + b^{-4} + \dots + b^{-8} + b^{-11} + b^{-12} = (1 + b)(1 + a^{-2} + a^{-3} + a^{-4} + a^{-6}) = (1 + b)A(a^{-1}).$$

Соотношение между B_{10} и B_9 , а также B_2 и B_1 можно определить, исходя из предположения, что при разбиении пятой и первой 20%-ных групп на два дециля соотношение доходов крайних групп с наиболее высоким и наиболее низким доходами, т.е. $B_{10}/B_9 = D10/D9$ и $B_2/B_1 = D2/D1$ сохраняется примерно таким же, как и соотношение доходов ($Q5/Q4$), а также ($Q2/Q1$), т.е. равно a^m , $m \approx 2$. Это предположение подтверждается анализом реальных данных. Так, расчеты, проведенные по двум выборкам — для 32 стран на основе информации, предоставленной в базе данных WIID¹, а также по данным для 35 стран OECD, показали, что средняя величина показателя m равна 1,82 и 1,79 соответственно, т.е. приблизительно можно принять $m \approx 2$.

Соответствующие децили распределения доходов как функции показателя неравенства при этом равны:

$$\begin{aligned} D10 &= (a^m / (1 + a^m)) / A(a^{-1}), \quad D9 = (1 / (1 + a^m)) / A(a^{-1}), \quad D8 = b^{-3} / ((1 + b)A(a^{-1})), \\ D3 &= b^{-8} / ((1 + b)A(a^{-1})), \quad D2 = b^{-12}(a^m / (1 + a^m)) / A(a^{-1}), \\ D1 &= b^{-12}(1 / (1 + a^m)) / A(a^{-1}), \quad b = a^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Переход к распределению по 5%-ным доходным группам ($n = 20$, $k = 4$) и т.д. может быть осуществлен аналогичным образом, предполагая, что при каждом последующем разделении группы с наибольшим доходом на две группы соотношение доходов двух пар крайних групп (слева и справа) остается примерно одинаковым и равным $K = a^m$, где $m \approx 2$. В этом случае доля доходов десятой группы (последнего дециля) будет равна $D10 = Q5[K / (1 + K)]$, доля доходов наиболее богатой 5%-ной группы $E20 = Q5[K / (1 + K)]^2$, доля 2,5%-ной группы равна $F40 = Q5[K / (1 + K)]^3$, 1,25%-ной группы наиболее богатых $G80 = Q5[K / (1 + K)]^4$ и т.д., где $K = a^m$, $m \approx 2$.

Например, при $a = 1,5$ – $1,6$ (коэффициент Джини порядка 44–49) доля доходов наиболее богатых 5% населения будет равна 24–28%, и доля 1,25% наиболее богатых — 11–14%, что хорошо согласуется с данными по США (Piketty, Saez, 2006; Atkinson, Piketty, Saez, 2011): доля 5% наиболее богатых (по уровню заработной платы) при коэффициенте Джини порядка 49–51 составляла в 1990–2002 гг. примерно 24–27%, а 1% самых богатых американцев — приблизительно 10–12%.

ЭМПИРИЧЕСКОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ

Возможность использования предложенной модели для исследования проблем распределения доходов и стратификации подтверждается эмпирическими наблюдениями и результатами оценки ее параметров по данным о распределении доходов между 20%-ными группами населения.

¹ World Income Inequality Database. The WIID3.4. UNU-WIDER, January 2017 (<https://www.wider.unu.edu/project/wiid-world-income-inequality-database>).

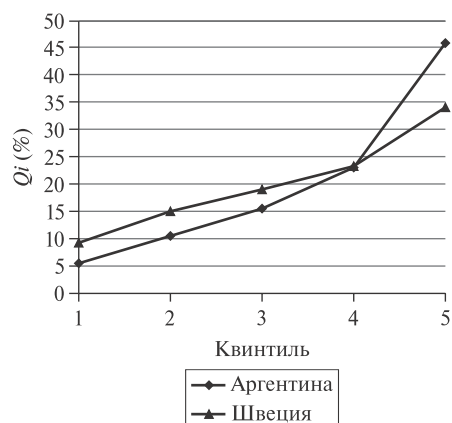


Рис. 1. Доля располагаемых доходов 20%-ных групп населения Аргентины и Швеции ($Q_1, \dots, Q_5$).

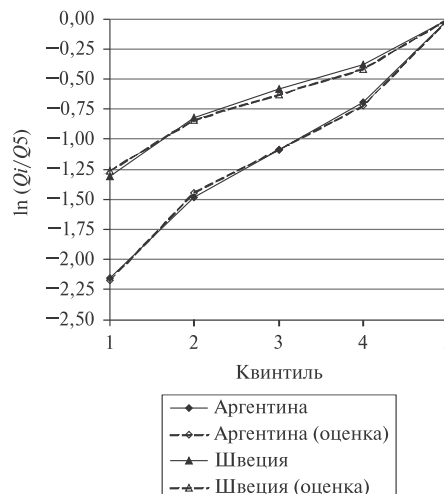


Рис. 2. Доля доходов каждого квинтиля населения Аргентины и Швеции по отношению к доле дохода 20% наиболее богатой части населения Q_5 в логарифмах: $\ln(Q_1/Q_5)$, $\ln(Q_2/Q_5)$, $\ln(Q_3/Q_5)$, $\ln(Q_4/Q_5)$, $\ln(Q_5/Q_5)=0$, фактические данные и результаты оценки

На рис. 1 приведены графики распределения располагаемых доходов по 20%-ным группам населения Аргентины (высокий уровень неравенства) и Швеции (низкий уровень неравенства).

На рис. 2 приведены в логарифмах фактические данные и полученные с помощью метода наименьших квадратов (МНК) результаты оценки относительной доли каждого квинтиля населения Аргентины и Швеции (по отношению к доле дохода 20% наиболее богатой части населения Q_5).

Как видно из рис. 2, крайние отрезки прямых, соответствующие Q_1 и Q_5 для Аргентины и Швеции — стран, значительно отличающихся по распределению располагаемых доходов, расположены симметрично и имеют больший наклон по сравнению со средней частью кривой. Этот факт, типичный, как показал анализ, для всех стран, подтверждает выбор распределения (2) для 20%-ных доходных групп.

Автором ранее были проведены с помощью метода наименьших квадратов (МНК) оценки показателя неравенства a для 20%-ных групп (по данным WIID для 39 стран и OECD для 32 стран), которые оказались достаточно точными: в первом случае среднее значение коэффициента детерминации R^2 составило 0,995, его минимальное значение было также близким к 1 (0,975), во втором — точность аппроксимации с помощью предложенного метода также была высокой — R^2 для уравнений регрессии находится в диапазоне 0,991—1,000 (см. указанные выше статьи).

В Приложении дополнительно приведены фактические данные и результаты оценки с помощью МНК доли доходов каждого квинтиля населения 18 стран по отношению к доле дохода 20% наиболее богатой части населения Q_5 в логарифмах; оценка показателя неравенства a , коэффициент детерминации R^2 , e — среднеквадратическая ошибка аппроксимации в %. Данные по странам взяты из баз данных WIID за различные годы с целью получения более объективных результатов. Как видно из приведенных в Приложении данных, точность аппроксимации логарифмической зависимости доходов от номера квинтиля достаточно высокая, при этом R^2 близок к 1 (см. также (Varshavsky, 2009)). Кроме того, ниже также приведены дополнительные подтверждения достаточно высокой точности предлагаемого метода, основанные на расчете показателя неравенства по данным о коэффициенте фондов.

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЯ НЕРАВЕНСТВА a

Показатель неравенства a можно определить не только с помощью МНК, как это было показано выше, но также, как это следует из (3)—(5), через коэффициенты фондов — квинтильного (Q_5/Q_1):

$$a = (Q_5/Q_1)^{(1/6)}, \quad (6)$$

или децильного ($D10 / D1$):

$$a = (D10 / D1)^{(1/8)}, \quad (7)$$

или по формуле $a = (Q4 / Q2)^{0.5}$ и т.п.

Оценки a для 18 стран по данным Приложения, полученные с помощью МНК и по формуле (6), отличаются крайне незначительно — стандартное отклонение равно 1,08%. Кроме того, для проверки точности гипотезы, лежащей в основе модели (2), показатель неравенства a был дополнительно рассчитан по формуле $a = (Q4 / Q2)^{0.5}$. В этом случае стандартное отклонение оказалось также незначительным, хотя и несколько большим — 2,08%. Очевидно, эти результаты могут служить дополнительным подтверждением возможности использования предложенной модели.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПОКАЗАТЕЛЯ НЕРАВЕНСТВА a И КОЭФФИЦИЕНТА ДЖИНИ

Показатель неравенства a , очевидно, связан с коэффициентом Джини. Приближенное соотношение между ними может быть получено двумя способами: 1) эмпирически, путем построения кривой Лоренца по дискретным точкам с помощью (5) и оценки соответствующих площадей методом трапеций с учетом поправочных коэффициентов, 2) либо с помощью регрессионной зависимости, построенной по фактическим данным. В табл. 1 приведены примерные данные о взаимозависимости показателя неравенства a и коэффициента Джини, полученные на основе результатов расчетов первым и вторым способом $Gini1$ и $Gini2$, там же приведено округленное среднее значение коэффициента $Gini_{cp} = 0,5(Gini1 + Gini2)$, а также даны соответствующие квинтильный и децильный коэффициенты фондов.

Таблица 1. Связь показателя неравенства a с коэффициентом Джини и коэффициентами фондов $Q5 / Q1$ и $D10 / D1$

Показатель неравенства	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5	1,55	1,6	1,65	1,7	1,75	1,8
$Gini1^*$	21,0	25,5	29,6	33,5	37,0	40,4	43,4	46,3	48,9	51,3	53,6	55,7	57,6
$Gini2^{**}$	22,7	26,5	30,3	33,8	37,3	40,6	43,8	46,9	49,9	52,8	55,7	58,4	61,1
$Gini_{cp}$	22	26	30	34	37	40	44	47	49	52	55	57	59
$Q5 / Q1$	3,0	3,8	4,8	6,1	7,5	9,3	11,4	13,9	16,8	20,2	24,1	28,7	34,0
$D10 / D1$	4,3	6,0	8,2	11,0	14,8	19,5	25,6	33,3	42,9	54,9	69,8	88,0	110,2

Примечание. В таблице символами «*» отмечены расчеты, сделанные на основе кривой Лоренца по дискретным точкам с помощью уравнения (5); «**» — на основе регрессионной зависимости, построенной на основе данных, приведенных в Приложении ($Gini = a_0 + a_1 \ln(a)$, $a_0 = 5,40$ ($t = 7,03$, $p\text{-value} = 2,85E-06$), $a_1 = 94,71$ ($t = 37,69$, $p\text{-value} = 4,68E-17$), $SEE = 0,872$, $R^2 = 0,989$, $F = 1420$).

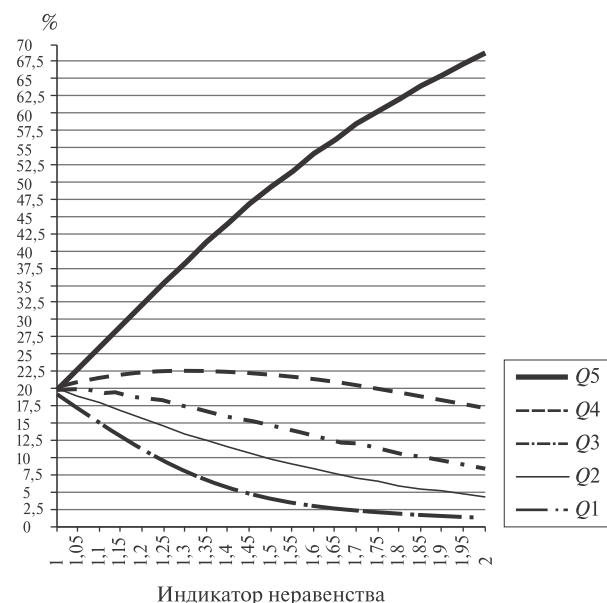


Рис. 3. Зависимости доли доходов 20%-ных групп населения $Q1$ – $Q5$ от показателя неравенства a

ХАРАКТЕР ЗАВИСИМОСТИ ДОЛИ ДОХОДА 20- И 10%-НЫХ ГРУПП ОТ УРОВНЯ НЕРАВЕНСТВА

С помощью модели (2)–(5) оказывается возможным выявить зависимости доли доходов богатых, бедных и среднего класса в совокупном доходе от уровня неравенства, а также их особенности (рис. 3 (доли доходов 20%-ных групп населения) и рис. 4 (доли доходов 10%-ных групп населения), а также табл. 2 и табл. 3, где приведены рассчитанные по формулам (3)–(5) доли дохода 1–5 квинтилей и 1–10 децилей в совокупном доходе при различных уровнях неравенства). Анализ этих данных позволяет сделать следующие выводы.

Доля доходов наиболее богатых 20% ($Q5$) с повышением неравенства стабильно возрастает, причем при $a > 1,5$ ($Gini$ примерно 44 и более) она превышает 50%. Этот рост определяется главным образом увеличением доли наиболее богатого дециля ($D10$).

Доля доходов наиболее бедных ($Q3 - Q1$) с ростом неравенства непрерывно сокращается.

Доля доходов среднего класса наиболее стабильна, особенно доля доходов четвертой группы $Q4$. При этом на начальном этапе роста неравенства она возрастает и достигает максимума при $a \approx 1,298$ ($Gini \approx 30$). В этой точке наблюдается следующее распределение доходов: $Q5 = 38,3$; $Q4 = 22,7$; $Q3 = 17,5$; $Q2 = 13,5$ и $Q1 = 8,0\%$. Однако затем доля четвертой группы начинает снижаться и при $a \approx 1,72$ ($Gini \approx 55$) становится такой же, как при равномерном распределении доходов ($a = 1$), т.е. 20% .

Более подробный анализ, основанный на рассмотрении четырех децилей среднего класса $D9, D8, D7$ и $D6$ (рис. 4), показывает, что наибольший выигрыш от роста неравенства получает дециль $D9$ — его доля постепенно возрастает до уровня неравенства, соответствующего $a \approx 1,56$ ($Gini \approx 47$), а затем снижается очень медленно. Максимум доли дециля $D8$ достигается при меньшем уровне неравенства ($a \approx 1,39$; $Gini \approx 37$), причем она остается достаточно стабильной и при очень высоком уровне неравенства. Наиболее существенно ощущают рост неравенства более низкие децили среднего класса — $D7$, и особенно $D6$: доля первого возрастает до $a \approx 1,21$ ($Gini \approx 21$) и затем постепенно снижается, а доля второго уменьшается, начиная с $a \approx 1,06$.

В определенной степени такое изменение доли доходов наиболее богатой части среднего класса частично подтверждает гипотезу нобелевского лауреата по экономике С. Кузнеця о том, что с началом индустриализации неравенство доходов возрастает, но затем, по достижении определенного уровня, снижается. Действительно, самые богатые 10% населения ($D10$) постоянно увеличивают свою долю дохода, но наиболее богатые 30% среднего класса получают выигрыш в доходах и, очевидно, оказываются заинтересованными в росте неравенства только до определенного уровня. При дальнейшем возрастании неравенства начинается последовательное снижение доли доходов этих слоев населения, что при существенном сокращении доли доходов нижних 60%, очевидно, в совокупности должно вести к усилению социальной напряженности в обществе, нестабильности, кризису и социальной революции, причем, как показывает исторический опыт, недовольство ситуацией первыми начинают проявлять представители верхних слоев среднего класса.

Приведенные в табл. 2 и 3 данные позволяют также оценить, как должна измениться доля дохода каждой 20%-ной группы при переходе к желаемому уровню дифференциации доходов путем изменения ставки НДФЛ (Варшавский, 2013). Например, при снижении уровня неравенства, характеризующегося $a = 1,8$ ($Gini \approx 60$), до уровня, соответствующего $a = 1,3$ ($Gini \approx 30$), доля дохода наиболее богатых 20% (5-я группа) должна сократиться на 23,9 п.п. (в 1,62 раза), а доля дохода первой группы

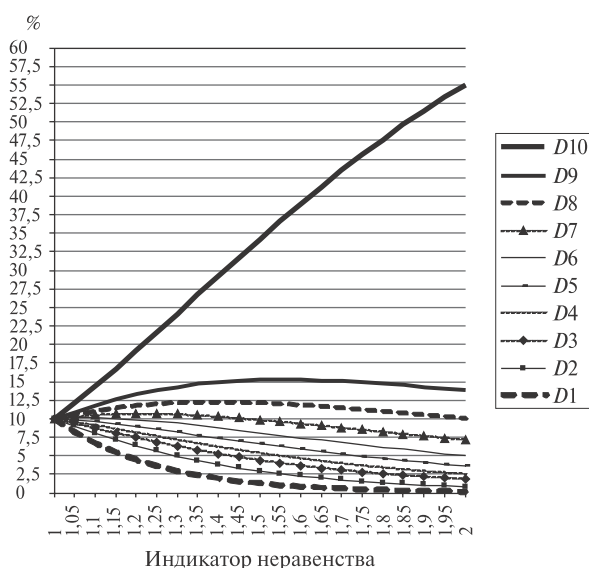


Рис. 4. Зависимости доли доходов 10%-ных групп населения ($D10 - D1$) от показателя неравенства a

Таблица 2. Доля дохода 1–5 квинтилей ($Q1 - Q5$) в совокупном доходе при различных уровнях неравенства, %

Показатель неравенства a	Коэффициент Джини*	Номер квинтиля (5-я группа — наиболее богатые 20%)				
		Q5	Q4	Q3	Q2	Q1
1,2	22	32,4	22,5	18,7	15,6	10,8
1,3	30	38,4	22,7	17,5	13,4	8,0
1,4	37	44,1	22,5	16,1	11,5	5,9
1,5	44	49,4	21,9	14,6	9,7	4,3
1,6	49	54,1	21,2	13,2	8,3	3,2
1,7	55	58,5	20,2	11,9	7,0	2,4
1,8	59	62,3	19,2	10,7	5,9	1,8

* Оценка — см. табл. 1.

Таблица 3. Доля дохода 1—10 децилей в совокупном доходе при различных уровнях неравенства, %

Показатель неравенства a	Коэффициент Джини*	Номер дециля (10-я группа — наиболее богатые 10%)									
		$D10$	$D9$	$D8$	$D7$	$D6$	$D5$	$D4$	$D3$	$D2$	$D1$
1,2	22	19,1	13,3	11,7	10,7	9,8	8,9	8,2	7,4	6,4	4,4
1,3	30	24,1	14,3	12,1	10,6	9,3	8,2	7,2	6,3	5,0	3,0
1,4	37	29,2	14,9	12,2	10,3	8,7	7,4	6,2	5,3	3,9	2,0
1,5	44	34,2	15,2	12,1	9,9	8,1	6,6	5,4	4,4	3,0	1,3
1,6	49	38,9	15,2	11,8	9,3	7,4	5,8	4,6	3,6	2,3	0,9
1,7	55	43,4	15,0	11,4	8,8	6,7	5,2	4,0	3,0	1,8	0,6
1,8	59	47,6	14,7	11,0	8,2	6,1	4,6	3,4	2,5	1,4	0,4

* Оценка — см. табл. 1.

(наиболее бедной) возрастет на 6,1 п.п. (в 4,34 раза), второй — на 7,5 п.п. (в 2,26 раза) и третьей — на 6,8 п.п. (в 1,64 раза).

Обоснование оптимального (гармоничного) уровня неравенства. Для определения уровня неравенства, при котором распределение доходов становится оптимальным (гармоничным), можно использовать методы, основанные на анализе вариантов соотношения доходов между наиболее богатыми и другими группами населения (эти соотношения могут использоваться в качестве нормативов при разработке политики снижения неравенства), а также на построении функции полезности и применении теории кооперативных игр с построением вектора Шепли (Варшавский, 2007а, 2010, 2017; Varshavsky, 2009, 2010).

УРОВЕНЬ НЕРАВЕНСТВА ПРИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ ДОХОДАМИ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП НАСЕЛЕНИЯ

Предложенная модель позволяет также решить и обратную задачу — определение уровня неравенства для выбранных соотношений доходов между отдельными доходными группами или их сочетаниями.

Анализ зависимости доли дохода 20- и 10%-ных групп населения от уровня неравенства позволяет рассмотреть несколько вариантов соотношения доходов между децилями и квинтилями, в первую очередь соотношение доходов между наиболее богатыми квинтилями или децилями и другими группами (значение показателя неравенства a находится при этом путем подстановки выражений для $Q_i(a)$ и $D_i(b)$, $b = a^{0.5}$ (см. (3)–(5)) в соответствующее уравнение для a и отыскания корня положительного корня этого уравнения).

Например, аналитическое выражение для широко используемого индекса (или отношения) Пальма — Palma ratio (Palma, 2014) легко находится из (3)–(5):

$$P = D10 / (Q1 + Q2) = a^8 / (1 + a^2)^2, \quad (8)$$

где a — показатель неравенства.

Можно выделить следующие варианты для располагаемого дохода.

1. Доход наиболее богатых 20% населения равен:

— доходу 60% наиболее бедной части населения, т.е. $Q5 = Q1 + Q2 + Q3$; в данном случае значение показателя неравенства a является корнем уравнения $a^6 = a^3 + a^2 + 1$, который равен $a = 1,304$ ($Gini \approx 30$);

— доходу двух следующих за ним квинтилей среднего класса: $Q5 = Q4 + Q3$ при близком уровне неравенства $a = 1,325$ ($Gini \approx 32$);

— 38,2% совокупного дохода, когда распределение доходов между наиболее богатыми 20% и остальными 80% населения соответствует правилу золотого сечения: $Q5 = 0,618(100 - Q5)$ — весь совокупный доход делится таким образом, что 38,2% находится у наиболее богатых 20% ($Q5 = 38,2\%$) и 61,8% приходится на остальные 80% населения ($Q1 + Q2 + Q3 + Q4 = 61,8\%$); $a = 1,297$ ($Gini \approx 30$);

— 50% совокупного дохода, т.е. $Q5 = 100 - Q5$; $a = 1,513$ ($Gini \approx 44$);

— 61,8% совокупного дохода, т.е. только 38,2% достается остальным 80% населения, уровень неравенства при этом значительно выше: $a = 1,786$ и $Gini \approx 58$.

2. Доход наиболее богатых 10% населения равен:

— доходу наиболее бедных 40% населения, т.е. $D10 = (Q1 + Q2)$, очевидно, в этом случае индекс Пальма $P = D10 / (Q1 + Q2) = 1$ (в работе (Doyle, Stiglitz, 2014) было предложено достичь этот уровень в США к 2030 г.), и это достигается при $a^4 = (1 + a^2)$, откуда $a^2 \approx 1,618$, что соответствует условию золотого сечения, или $a \approx 1,272$ ($Gini \approx 27$). При этом распределение доходов пяти 20%-ных групп населения будет следующим: $Q5 = 36,7$; $Q4 = 22,7$; $Q3 = 17,9$; $Q2 = 14,0$; $Q1 = 8,7$;

— доходу четвертого квинтиля, т.е. доходу среднего слоя среднего класса $D10 = Q4$, также при $a \approx 1,272$ ($Gini \approx 27$);

— доходу наиболее бедных 50% населения, т.е. $D10 = Q1 + Q2 + D5$; приблизительно $a = 1,35$ ($Gini \approx 34$);

— доходу наиболее богатых 20% среднего класса, т.е. $D10 = D9 + D8$, также приблизительно при $a = 1,35$ ($Gini \approx 34$);

— суммарному доходу третьего и второго квинтилей $D10 = Q3 + Q2$ при $a \approx 1,380$ ($Gini \approx 36$);

— доходу наиболее бедных 60% населения, т.е. $D10 = Q1 + Q2 + Q3$; приблизительно $a = 1,442$ ($Gini \approx 40$).

3. Доход среднего класса ($Q4 + D9 + D6$) достигает максимума примерно при $a = 1,33$ ($Gini \approx 33$), а доля дохода двух средних квинтилей ($Q4 + Q3$) становится равной 40% (уровень абсолютного равенства) при $a = 1,314$ ($Gini \approx 31$).

Использование функции полезности. Вид функции полезности был предложен автором на основе следующих предположений: с одной стороны, все слои общества (группы населения, получающие доход) равным образом заинтересованы в максимизации своего дохода (среднего дохода для данного слоя, группы); с другой — общество заинтересовано в долгосрочном поддержании такого уровня неравенства, при котором сохраняется низкая вероятность колебательных процессов, возникающих в результате шоковых воздействий при условиях, близких к полному равенству (Varshavsky, 2009, 2010).

Таким образом, в соответствии с первым условием каждая группа стремится получать одинаковый с другими группами доход, тогда как для достижения стабильности необходимо определенное неравенство доходов.

Исходя из этого, была предложена, на основе использования конечной последовательности для пяти доходных групп населения (3)–(4), функция полезности вида:

$$U(a) = a^k \left\{ \prod_{i=1}^5 Q_i \right\}^{1/5} = a^{-m} / (1 + a^{-2} + a^{-3} + a^{-4} + a^{-6}), \quad m = 3 - k, \quad k > 0, \quad (9)$$

где множитель a^k характеризует стремление общества к снижению нестабильности при перераспределении доходов.

При $k = 1$ ($m = 2$) функция полезности равна доле четвертой группы: $U(a) = Q4$ и ее максимум достигается при $a_{max} \approx 1,298$ (см. выше). Этот результат хорошо согласуется с полученными выше (пропорции между доходами отдельных 20- или 10%-ных групп населения, в том числе равенство индекса Пальма $P = 1$; а также показатель неравенства, соответствующий «золотому сечению»).

С ростом k , характеризующим наличие возможности обеспечения для наиболее богатой части населения максимально устойчивого положения, величина a_m возрастает: так, при $k = m = 1,5$ $a_{max} \approx 1,514$ (в этом случае доля дохода наиболее богатых 20% становится примерно равной доле дохода остальных 80%, $Gini \approx 0,44$ (см. выше)).

Дополнительный анализ взаимоотношения между группами населения с различным уровнем доходов можно провести с помощью теории кооперативных игр. В работах автора (Варшавский, 2007а, 2010; Varshavsky, 2010) приведены результаты оценки вариантов вектора Шепли, соответствующих различным значениям индикатора неравенства a в диапазоне (1,2–1,55). Анализ этих данных показывает следующее: для ($a = 1,3$ –1,4) система достаточно устойчива, так как влияние наиболее богатого квинтиля уравнивается совместным действием 2, 3 и 4-го квинтилей. При уменьшении уровня неравенства ($a = 1,20$ –1,25) система становится неустойчивой; см. также

(Варшавский, 2010), где тот же вывод получен с помощью моделирования переходных процессов, возникающих при перераспределении ресурсов между 20%-ными группами населения. При увеличении неравенства до уровня порядка ($a = 1,45-1,50$) роль 5-го квинтиля становится определяющей, а при еще большем неравенстве, начиная с $a = 1,55$, все группы, кроме 5-й, не имеют никакого веса при принятии решений.

Таким образом, можно отметить следующие соотношения доходов при различных уровнях неравенства:

— для оптимального (гармоничного) неравенства и близкому к нему уровню — уровню, который наблюдается в странах с социально ориентированной экономикой, где происходит значительное перераспределение доходов с помощью прогрессивного налогообложения (Скандинавские страны, Австрия, Бельгия, Германия, Франция, Нидерланды, Словакия, Словения, Чехия), а также был характерен для СССР, имеют место следующие соотношения: $D10 = (Q1 + Q2)$, $D10 = Q4$, $Q5 = 0,618(Q1 + Q2 + Q3 + Q4)$, $Q4 = \max$, $Q5 = Q1 + Q2 + Q3$, $a \approx 1,25-1,30$ ($Gini \approx 26-30$);

— для среднего уровня неравенства (Ирландия, Канада, Италия, Япония, Австралия, Португалия, Греция, Испания, Южная Корея): $(Q4 + Q3) = 40\%$, $Q5 = Q4 + Q3$, $(Q4 + D9 + D6) = \max$, $D10 = Q1 + Q2 + D5$, $D10 = D9 + D8$, $a = 1,31-1,35$ ($Gini \approx 31-34$);

— для уровня неравенства выше среднего (Великобритания, Израиль, Турция, США): $D10 = Q3 + Q2$, $D10 = Q1 + Q2 + Q3$, $a = 1,35-1,44$ ($Gini \approx 35-40$);

— для высокого неравенства: приблизительно $Q5 = 100 - Q5$, $a = 1,45-1,51$ ($Gini \approx 41-44$), — что характерно для стран Латинской Америки и в настоящее время, к сожалению, для России (Тихонова, 2018; Шевяков, 2010; Варшавский, 2019);

— для предельно высокого уровня неравенства, достигающего верхней границы, наблюдаемой в странах Африки: примерно $Q5 = 1,618(Q1 + Q2 + Q3 + Q4)$, $a = 1,786$ ($Gini \approx 58$).

Эти результаты могут в определенной степени служить также нормативами при разработке политики поэтапного перехода к уровню неравенства, характерному для стран с социально ориентированной экономикой.

Таким образом, как показано в данной статье, предложенная модель позволяет, в дополнение к существующим методам, оценить закономерности изменения доли дохода 5-, 10%-ных и т.д. групп населения в зависимости от уровня неравенства; выбрать и обосновать уровень оптимального (гармоничного) неравенства, а также разумный диапазон уровня неравенства, за пределами которого значительно возрастают социальная напряженность и нестабильность в обществе. Полученные соотношения доходов при различных уровнях неравенства могут также использоваться при разработке политики поэтапного снижения неравенства доходов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица. Фактические данные по странам OECD и результаты оценки в соответствии с моделью (3)–(4) доли доходов каждого квинтиля населения различных стран по отношению к доле дохода 20% наиболее богатой части населения, в логарифмах

Страна		Год	$\ln\left(\frac{Q1}{Q5}\right)$	$\ln\left(\frac{Q2}{Q5}\right)$	$\ln\left(\frac{Q3}{Q5}\right)$	$\ln\left(\frac{Q4}{Q5}\right)$	$\ln\left(\frac{Q5}{Q5}\right)$	a	$Gini$	$Gini$ (оц.)	R^2	SEE^{**}	p -value
Дания	факт	2012	-1,37	-0,89	-0,66	-0,45	0,00		24,7		0,999		
	оценка		-1,35	-0,90	-0,68	-0,45	0,00	1,25	26,8			0,01	1,9E-08
Словения	факт	2012	-1,23	-0,80	-0,58	-0,38	0,00		23,7		0,998		
	оценка		-1,21	-0,81	-0,60	-0,40	0,00	1,22	24,5			0,02	1,4E-07
Финляндия	факт	2000	-1,34	-0,96	-0,74	-0,50	0,00		26,8		0,993		
	оценка		-1,39	-0,93	-0,70	-0,46	0,00	1,26	27,4			0,04	1,7E-06
Швеция	факт	2012	-1,31	-0,82	-0,59	-0,38	0,00		27,2		0,994		
	оценка		-1,26	-0,84	-0,63	-0,42	0,00	1,23	25,3			0,04	1,5E-06
Норвегия	факт	2000	-1,35	-0,98	-0,77	-0,53	0,00		27,4		0,988		
	оценка		-1,42	-0,95	-0,71	-0,47	0,00	1,27	27,9			0,06	4,1E-06
Нидерланды	факт	1999	-1,62	-1,07	-0,81	-0,51	0,00		30,7		0,999		
	оценка		-1,61	-1,07	-0,81	-0,54	0,00	1,31	30,8			0,01	1,2E-08

Окончание таблицы

Страна		Год	$\ln\left(\frac{Q1}{Q5}\right)$	$\ln\left(\frac{Q2}{Q5}\right)$	$\ln\left(\frac{Q3}{Q5}\right)$	$\ln\left(\frac{Q4}{Q5}\right)$	$\ln\left(\frac{Q5}{Q5}\right)$	a	$Gini$	$Gini$ (оц.)	R^2	SEE^{**}	$p-value$
Тайвань (КНР)	факт	2000	-1,60	-1,16	-0,89	-0,60	0,00		31,9		0,991		
	оценка		-1,67	-1,12	-0,84	-0,56	0,00	1,32		32,0		0,06	2,3E-06
Бельгия	факт	2000	-1,58	-1,16	-0,92	-0,68	0,00		32,2		0,976		
	оценка		-1,68	-1,12	-0,84	-0,56	0,00	1,32		32,0		0,09	1,6E-05
Франция	факт	2012	-1,51	-1,09	-0,85	-0,60	0,00		30,5		0,988		
	оценка		-1,59	-1,06	-0,79	-0,53	0,00	1,30		30,4		0,06	4,1E-06
Ирландия	факт	2012	-1,54	-1,06	-0,79	-0,52	0,00		29,9		0,999		
	оценка		-1,56	-1,04	-0,78	-0,52	0,00	1,30		30,0		0,01	1,5E-08
Испания	факт	2012	-1,86	-1,18	-0,86	-0,54	0,00		34,5		0,995		
	оценка		-1,80	-1,20	-0,90	-0,60	0,00	1,35		33,9		0,05	1,1E-06
Италия	факт	2012	-1,73	-1,12	-0,82	-0,55	0,00		32,4		0,998		
	оценка		-1,70	-1,13	-0,85	-0,57	0,00	1,33		32,3		0,03	9,9E-08
Великобритания	факт	2012	-1,60	-1,10	-0,82	-0,55	0,00		31,3		0,999		
	оценка		-1,62	-1,08	-0,81	-0,54	0,00	1,31		31,0		0,02	2,0E-08
Южная Корея	факт	1998	-2,15	-1,30	-0,84	-0,53	0,00		36,9		0,975		
	оценка		-2,00	-1,34	-1,00	-0,67	0,00	1,40		37,0		0,13	3,1E-05
США	факт	2000	-2,16	-1,46	-1,08	-0,72	0,00		40,1		1,000		
	оценка		-2,16	-1,44	-1,08	-0,72	0,00	1,43		39,5		0,01	1,2E-09
Россия	факт	2012	-2,10	-1,57	-1,21	-0,82	0,00		41,6		0,985		
	оценка		-2,23	-1,49	-1,11	-0,74	0,00	1,45		40,6		0,10	6,4E-06
Аргентина	факт	2012	-2,16	-1,48	-1,09	-0,70	0,00		40,2		0,999		
	оценка		-2,17	-1,45	-1,09	-0,72	0,00	1,44		39,7		0,02	2,8E-08
Панама	факт	2000	-3,30	-2,32	-1,74	-1,16	0,00		57,8		0,998		
	оценка		-3,38	-2,25	-1,69	-1,13	0,00	1,76		58,8		0,06	1,7E-07

Примечание. a — оценка показателя неравенства и соответствующие показатели точности оценки: R^2 — коэффициент детерминации, SEE — стандартная ошибка оценки (Standard Error of Estimate); $Gini$ (оц.) — расчетное значение коэффициента Джини на основе оценки индикатора неравенства a (см. табл. 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Айвазян С.А. (2012). Анализ качества и образа жизни населения. М.: Наука. [Aivazian S.A. (2012). *Analysis of the quality and lifestyle of the population: An econometric approach*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Айвазян С.А., Мхитарян В.С. (1998). Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: Юнити. [Ayvazyan S.A., Mkhitaryan V.S. (1998). *Applied statistics and fundamentals of econometrics*. Moscow: UNITI (in Russian).]
- Варшавский А.Е. (2007а). Значительное снижение неравенства доходов — важнейшее условие перехода к инновационной экономике, основанной на знаниях // *Экономика и математические методы*. Т. 43. № 4. С. 35–55. [Varshavsky A.E. (2007a). Significant reduction of income inequality is the most important condition for the transition to an innovative economy based on knowledge. *Economics and Mathematical Methods*, 43, 4, 35–55 (in Russian).]
- Варшавский А.Е. (2007б). Замедление распространения инноваций и перехода к обществу знаний при росте экономического неравенства // *Концепции*. № 2. [Varshavsky A.E. (2007b). Slowing down diffusion of innovations and transition to knowledge-based society under income inequality growth. *Concepții*, 2 (in Russian).]
- Варшавский А.Е. (2010а). Проблемы взаимного изменения основных составляющих социальной стратификации при шоковых воздействиях // *Экономика и математические методы*. Т. 46. № 2. С. 3–22. [Varshavsky A.E. (2010a). Problems of mutual changes of the main components of social stratification under the shocks. *Economics and Mathematical Methods*, 46, 2, 3–22 (in Russian).]
- Варшавский А.Е. (2013). О выборе ставки налога на доходы физических лиц // *Концепции*. № 2 (31). С. 3–23. [Varshavsky A.E. (2013). On the choice of the tax rate on personal income. *Concepții*, 2 (31), 3–23 (in Russian).]
- Варшавский А.Е. (2017). Модель неравенства, описываемая конечной функциональной последовательностью с характеристическим многочленом, корни которого находятся на единичной окружности // *Концепции*. № 1. С. 73–83. [Varshavsky A.E. (2017). Model of inequality described by a finite functional sequence with a characteristic polynomial whose roots lie on the unit circle. *Concepții*, 1, 73–83 (in Russian).]

- Варшавский А.Е.** (2019). Чрезмерное неравенство доходов — проблемы и угрозы для России // *Социологические исследования*. Т. 10. № 19. С. 52–61. DOI: 10.31857/S013216250006136-2 [Varshavsky A.E. (2019). Excessive income inequality — problems and threats for Russia. *Sociological Studies*, 10, 19, 52–61 (in Russian).]
- Тихонова Н.Е.** (2018). Стратификация по жизненным шансам массовых слоев современного российского общества // *Социологические исследования*. № 6. С. 53–65. [Tikhonova N.E. (2018) Stratification by life chances of mass strata of modern Russian society. *Sociological Studies*, 6, 53–65 (in Russian).]
- Шевяков А.Ю.** (2010). Социальное неравенство: тормоз экономического и демографического роста // *Уровень жизни населения регионов России*. № 5. С. 38–52. [Shevyakov A. Yu. (2010). Social inequality: Impediment to the economic and demographic growth. *The Level of life of Population of Regions of Russia*, 5, 38–52 (in Russian).]
- Alvaredo F., Atkinson A.B., Piketty T., Saez E.** (2013). The top 1 percent in international and historical perspective. *Journal of Economic Perspectives*, 27 (3), 3–20.
- Alvaredo F., Chancel L., Piketty T., Saez E., Zucman G.** (2017). Global inequality dynamics: New findings from WID. World. *WID.World Working Paper*, 2017/1.
- Atkinson A., Piketty T., Saez E.** (2011). Top incomes in the long run of history. *Journal of Economic Literature*, 49, 1, 3–71.
- Atkinson A.B.** (1970). On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, 2 (3), 244–263.
- Blanchet T., Fournier J., Piketty T.** (2017). Generalized Pareto curves: Theory and applications. *WID.World Working Paper*, 2017/3.
- Doyle M., Stiglitz J.** (2014). Eliminating extreme inequality: A sustainable development goal, 2015–2030. *Ethics and International Affairs*, 28 (10), 1–7.
- Novokmet F., Piketty T., Zucman G.** (2017). From Soviets to oligarchs: Inequality and property in Russia, 1905–2016. *NBER Working Paper*. No. 23712. August.
- Palma J.G.** (2014). Has the income share of the middle and upper-middle been stable over time, or is its current homogeneity across the world the outcome of a process of convergence? The ‘Palma Ratio’ revisited. *Cambridge Working Papers in Economics 1437*. Faculty of Economics. University of Cambridge.
- Piketty T.** (2014). *Capital in the twenty-first century*. Cambridge: Harvard University Press.
- Piketty T., Saez E.** (2006). The evolution of top incomes: A historical and international perspective. *American Economic Review*, 96 (2), 200–205. Available at: <http://emlab.berkeley.edu/users/saez/piketty-saezOUP04US.pdf>
- Saez E.** (2015). Striking it Richer: The evolution of top incomes in the United States (updated with 2014 preliminary estimates). *WID.World Technical Note*, 6.
- Sen A.** (1976). Poverty: An ordinal approach to measurement. *Econometrica*, 44 (2), 219–231, March.
- Stiglitz J.** (2012). *The price of inequality: How today's divided society endangers our future*. N.Y., London: W.W. Norton&Company.
- Theil H.** (1967). *Economics and information theory*. Amsterdam: North-Holland.
- Varshavsky A.** (2010). Assessing reasonable limits of inequality on the basis of a new model of income distribution. *Intellectual Economics*, 1 (7), 63–75. Available at: <https://www.mruni.eu/upload/iblock/451/Varshavsky.pdf>
- Varshavsky A.** (2008). *Basic income and increasing income inequality in Russia*. 12th BIEN Congress 2008, Dublin. BIEN World Congress on Basic Income — Dublin, Ireland — Papers and Presentations. Available at: <https://www.socialjustice.ie/sites/default/files/attach/policy-issue-article/3321/5eiialexandervarshavskybiandrussia.doc>
- Varshavsky A.** (2009). A new model of income distribution based on polynomial with roots on the unit circle. *Ética del desarrollo humano y justicia global. Instituciones y ciudadanos responsables ante el reto de la pobreza*. VIII Congreso Internacional de IDEA. Valencia: Nau Llibres, del 2 al 4 de diciembre de 2009. ISBN: 978-84-7642-791-0.

Model of income distribution on the basis of a finite functional sequence and its application for inequality analysis

© 2020 A.E. Varshavsky

A.E. Varshavsky,

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences (CEMI RAS), Moscow, Russia;
e-mail: varshav@cemi.rssi.ru, varshavae@yandex.ru*

Received 10.02.2020

Abstract. The paper develops the results presented in the author's previously published articles on the elaboration of a new model of income distribution described by a finite functional sequence. The model provides a good accuracy of approximation of the distribution of income for equal groups of the population that is confirmed by the results of empirical studies and is justified theoretically. The introduction of a new indicator of inequality that is correlated with Gini coefficient as well as with the quintile and decile dispersion ratios makes it possible to estimate theoretically the income shares of 20 and 10% groups (quintiles and deciles) for different levels of inequality. The results obtained allow identifying the specific features of changes in the share of income of these groups with the growth of inequality. The model also makes it possible to consider certain ratios between the incomes of some population groups that are typical of different inequality levels as well as to obtain for them an analytical expression; for example, such expression is obtained for the Palm ratio. These ratios can serve to some extent as some normatives for the development of the inequality reducing policy. The developed model allows also justifying the optimal (harmonious) level of inequality. In the annex the results of the estimation of the new inequality indicator for 18 countries are given.

Keywords: inequality, income, model, sequence, polynomial, distribution, inequality indicator.

JEL Classification: D63, D31, D30, C51.

DOI: 10.31857/S042473880012411-1