
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Верхняя граница коэффициентов годности подержанных машин, подвергающихся случайным отказам

© 2020 г. С.А. Смоляк

С.А. Смоляк,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: smolyak1@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.09.2019

Аннотация. Рассматривается одна из задач стоимостной оценки подержанных машин. В процессе эксплуатации технико-экономические характеристики машины имеют тенденцию к ухудшению, изменяется и вероятность ее катастрофического (ресурсного) отказа. Соответственно рыночная стоимость подержанной машины снижается по сравнению с аналогичной новой машиной. Отношение рыночных стоимостей подержанной машины и аналогичной новой, выраженное в долях единицы (или в процентах), называется коэффициентом (процентом) годности. В общем случае он зависит от технического состояния машины. Однако количественно и достаточно надежно оценить его во многих случаях (например, при массовой оценке) затруднительно, и оценщики вынуждены опираться только на возраст машины. В оценочной литературе даются многочисленные рекомендации по установлению зависимости коэффициентов годности (или дополнений их до единицы — коэффициентов физического износа) от возраста. Мы приводим модель зависимости рыночной стоимости машин от возраста, позволяющую установить точную верхнюю границу для их коэффициентов годности. Показано, что рекомендуемые некоторыми авторами зависимости не удовлетворяют полученному ограничению и потому могут приводить к ошибочным результатам.

Ключевые слова: машины и оборудование, стоимостная оценка, возраст, износ, срок службы, коэффициент годности.

Классификация JEL: D46.

DOI: 10.31857/S042473880012431-3

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой заметке рассматривается одна из задач стоимостной оценки массово производимых машин и оборудования (далее — машин) определенной марки (модели, модификации). Техническое состояние всех новых (выпущенных, но еще не введенных в эксплуатацию) машин этой марки одинаково, но в процессе эксплуатации оно ухудшается — процесс такого ухудшения обычно именуется *износом* (или изнашиванием).

При оценке *рыночной стоимости* (далее — стоимости) машины принимается, что она используется по назначению типичным для рынка рациональным способом: производит какой-то продукт (товар, работу или услугу), необходимый участникам рынка, и потребляет необходимые для этого материальные и трудовые ресурсы. Стоимость производимого в малую единицу времени продукта за вычетом стоимости потребляемых при этом ресурсов отражает *интенсивность* генерируемых машиной *чистых доходов*¹ (ИЧД).

В процессе эксплуатации возможен (катастрофический, в технической литературе — ресурсный) отказ машины, после которого она утилизируется (выбывает из эксплуатации). Интенсивность таких отказов (которая с возрастом может меняться) обычно определяют по данным ускоренных испытаний или наблюдений за эксплуатируемыми машинами. В то же время утилизации подлежат и машины, оказавшиеся в плохом (в технической литературе — предельном) техническом состоянии. При утилизации владелец получает некоторый доход от продажи лома и годных

¹ У машин, производящих продукт, обращающийся на рынке, или сдаваемых в аренду, чистый доход близок по величине и содержанию к прибыли до начисления амортизации и уплаты налогов (Earnings before interest, taxes, depreciation and amortization, EBITDA).

остатков, но несет определенные расходы (например, на демонтаж и доставку лома и годных остатков покупателям). Получаемый владельцем при рационально проведенной утилизации чистый доход — утилизационная стоимость машины — обычно незначителен. Отметим, что рыночная стоимость любой машины не меньше ее утилизационной стоимости.

Поскольку все новые машины идентичны, их стоимость оценивают по данным о ценах производителей или дилеров. Однако оценивать поддержанную машину, исходя из цен ее аналогов, затруднительно, поскольку все поддержанные машины эксплуатировались по-разному и не всегда рационально, так что их техническое состояние различается. Практически стоимость поддержанной машины оценивают умножая стоимость новой машины той же марки на понижающий *коэффициент годности*, нередко выражаемый в процентах (percent good factor, PGF), учитывающий износ оцениваемой машины (российские оценщики чаще уменьшают стоимость новой машины на *процент износа*, что эквивалентно). Чаще всего значения коэффициентов годности связываются с *возрастом* машины, для чего в литературе предложено много таблиц и формул (см., например, (Федотова, 2018; Лейфер, 2007, 2019; 2019 Cost index..., 2019; Personal property depreciation..., 2019)). В связи с этим представляет интерес установить точную верхнюю границу для этих коэффициентов. Для этого мы используем модель зависимости стоимости машины от возраста, предложенную в (Смоляк, 2016).

МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТОИМОСТИ МАШИНЫ

В модели для определения стоимости машины ее техническое состояние на дату оценки характеризуется возрастом машины (t). Поэтому стоимость, интенсивность отказов и ИЧД являются функциями возраста — соответственно $V(t)$, $\lambda(t)$ и $b(t)$. Функцией возраста будет и коэффициент годности машины $k(t) = V(t)/V(0)$. Поскольку с возрастом техническое состояние машины не улучшается, функция $b(t)$ — невозрастающая, и мы считаем ее непрерывной слева. Принимается, что утилизационная стоимость машины U не зависит от ее возраста, а плохому техническому состоянию отвечает некоторый возраст T (предельный возраст, назначенный срок службы). Таким образом, машина, дожившая до возраста T , утилизируется.

Согласно методу дисконтированного денежного потока² стоимость машины равна ожидаемой сумме дисконтированных чистых доходов от ее рациональной эксплуатации в некотором периоде времени и стоимости машины в конце периода. Применим это к машине возраста $t < T$ и малому периоду dt после даты оценки и учтем, что в этом периоде:

— с вероятностью $\lambda(t)dt$ произойдет отказ машины, тогда машина должна утилизироваться, принесет владельцу чистый доход U ;

— с вероятностью $1 - \lambda(t)dt$ машина будет использоваться по назначению и принесет за период чистый доход $b(t)dt$. Кроме того, в конце периода возраст машины составит $t + dt$ и, поскольку инфляция отсутствует, ее стоимость будет такой же, как у машины возраста $t + dt$ на дату оценки, т.е. $V(t + dt)$.

Отсюда вытекает, что (с точностью до малых более высокого порядка)

$$V(t) = U\lambda(t)dt + [b(t)dt + (1 - rdt)V(t + dt)][1 - \lambda(t)dt], \quad (1)$$

где r — рыночная ставка дисконтирования (эта ставка — безрисковая и доналоговая, поскольку применяется к доналоговым чистым доходам, в которых учтен риск отказов).

Введем обозначения:

$$\Omega(z) = \int_0^z [\lambda(x) + r] dx, \quad J(z) = \int_z^T e^{-\Omega(s)} ds, \quad K(t) = e^{\Omega(t)} J(t) / J(0).$$

Преобразуя (1), получаем уравнение $V'(t) - [\lambda(t) + r]V(t) + \lambda(t)U + b(t) = 0$. Его решением с крайним условием $V(T) = U$ будет

$$V(t) = U + \int_t^T [b(z) - rU] e^{\Omega(t) - \Omega(z)} dz. \quad (2)$$

Из (2) следует, что $b(T) \geq rU$, иначе у машин возраста немного меньшего T стоимость будет меньше U , чего не может быть.

Заметим, кстати, что формально равенство (2) справедливо только для машин. Однако построенная модель применима и к некоторым типам зданий и сооружений, имеющих определенное

² International Valuation Standards. Effective 31 January 2020. International Valuation Standards Council, IVS105, para 50.

функциональное назначение, у которых с возрастом эксплуатационные характеристики имеют тенденцию к ухудшению.

Обычно у оценщиков нет информации об ИЧД у машин разного возраста. Поэтому прямо применить формулу (2) для оценки подержанной машины не удастся. Правда, можно задать ту или иную динамику функции $b(t)$ и получить отвечающую ей зависимость $k(t)$ — такой подход рассматривался в (Смоляк, 2016). Однако функциям $b(t)$ с разной динамикой будут отвечать и разные коэффициенты $k(t)$. Ниже мы даем выражение для их верхней границы.

Теорема. При наших предположениях имеет место неулучшаемая оценка

$$k(t) \leq u + (1-u)K(t), \quad (3)$$

где $u = U/V(0)$ — относительная утилизационная стоимость машин.

Доказательство. Положим $k_0(t) = [V(t) - U]/[V(0) - U]$. Тогда в силу (2) имеем $k_0(t) = e^{\Omega(t)} Y / (X + Y)$, где $X = \int_0^t [b(z) - rU] e^{-\Omega(z)} dz$, $Y = \int_t^T [b(z) - rU] e^{-\Omega(z)} dz$. Но функция $b(t) - rU$ неотрицательная и невозрастающая, поэтому

$$\begin{aligned} X &= \int_0^t [b(z) - rU] e^{-\Omega(z)} dz \geq [b(t) - rU] \int_0^t e^{-\Omega(z)} dz = [b(t) - rU][J(0) - J(t)], \\ Y &= \int_t^T [b(z) - rU] e^{-\Omega(z)} dz \leq [b(t) - rU] \int_t^T e^{-\Omega(z)} dz = [b(t) - rU]J(t). \end{aligned}$$

Учитывая, что $k_0(t)$ возрастает по Y и убывает по X , отсюда следует, что

$$k_0(t) \leq \frac{e^{\Omega(t)} J(t)}{[J(0) - J(t)] + J(t)} = e^{\Omega(t)} \frac{J(t)}{J(0)} = K(t).$$

Утверждение теоремы получается отсюда, поскольку $k(t) \leq u + (1-u)k_0(t)$. Легко увидеть, что полученная оценка неулучшаема, так как равенство $k_0(t) = K(t)$ достигается для функций $b(s)$, постоянных на отрезке $[0, T]$.

К доказанной теореме следует добавить несколько важных комментариев.

Нетрудно убедиться, что $K'(0) < 0$, поэтому и $k'(0) < 0$. Между тем, некоторые оценщики считают, что график функции $k(t)$ при $t=0$ имеет горизонтальную касательную, либо (как, например, в (Цуканов, 2013; Patry, 2007)) предлагают описывать зависимость $k(t)$ функциями, имеющими это свойство.

Установление зависимостей стоимости конкретных видов машин от возраста является актуальной задачей. Нередко такие зависимости описываются формулами и таблицами, но, как показывает анализ в (Смоляк, 2016), при этом неравенство (3) выполняется отнюдь не всегда.

Величина $K(t)$ отражает максимально возможный коэффициент годности машин с нулевой утилизационной стоимостью. Из доказанной теоремы при отсутствии отказов следует, что $K(t) = (1 - e^{-(\lambda+r)(T-t)}) / (1 - e^{-\lambda T})$ (для этого случая теорема доказана в (Смоляк, 2016)). В (Ковалев и др., 2003; Трифонов, 2013) и ряде других публикаций именно такую функцию $K(t)$, по существу, предлагается использовать для нахождения коэффициентов годности любых зданий и машин, что, по нашему мнению, неправомерно (о том же говорится и в (Лейфер, 2007)).

Легко проверить, что если интенсивность отказов не зависит от возраста, то $\Omega(s) = (\lambda + r)s$ и $K(t) = (1 - e^{-(\lambda+r)(T-t)}) / (1 - e^{-(\lambda+r)T})$. Это согласуется с общепринятой у оценщиков практикой учета риска путем увеличения ставки дисконтирования. Однако такой прием оказывается некорректным, если риск отказа машины зависит от ее возраста. Так, при линейной зависимости $\lambda(t) = \lambda + \mu t$ будет

$$K(t) = e^{(r+\lambda)t+0,5\mu t^2} \left[\Phi\left(\frac{r+\lambda+\mu T}{\sqrt{\mu}}\right) - \Phi\left(\frac{r+\lambda+\mu t}{\sqrt{\mu}}\right) \right] / \left[\Phi\left(\frac{r+\lambda+\mu T}{\sqrt{\mu}}\right) - \Phi\left(\frac{r+\lambda}{\sqrt{\mu}}\right) \right],$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения.

Как мы видим, зависимость надежности машины от возраста уже нельзя учесть путем корректировки ставки дисконтирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Ковалев А.П., Кушель А.А., Хомяков В.С. и др. (2003). Оценка стоимости машин, оборудования и транспортных средств. М.: Интерреклама. [Kovalev A.P., Kushel' A.A., Khomjakov V.S. et al. (2003). *Machinery, equipment and vehicles valuation*. Moscow: Interreclama (in Russian).]
- Лейфер Л.А. (2007). Доходный подход при оценке недвижимости. Типизация моделей прогнозируемых денежных потоков // *Вопросы оценки*. № 3. С. 19–28. [Leifer L.A. (2007). Income approach to real estate appraisal. Typification of forecast cash flow models. *Voprosy otsenki*, 3, 19–28 (in Russian).]
- Лейфер Л.А. (ред.). (2019). Справочник оценщика машин и оборудования. Корректирующие коэффициенты и характеристики рынка машин и оборудования. 2-е изд. Нижний Новгород: Приволжский центр методического и информационного обеспечения оценки. [Leifer L.A. (ed.). (2019). *Handbook of machinery and equipment appraiser. Correction factors and characteristics of the machinery and equipment market*. 2nd ed. Nizhny Novgorod: Volga Center for Methodological and Information Support of Valuation (in Russian).]
- Смоляк С.А. (2016). Стоимостная оценка машин и оборудования (секреты метода ДДП). М.: Издательский дом «Опцион». [Smolyak S.A. (2016). *Valuation of machinery and equipment (secrets of the DCF method)*. Moscow: Publishing House "Option" (in Russian).]
- Трифонов М.Ю. (2013). Метод описания ускоренного износа объектов оценки // *Вопросы оценки*. № 3. С. 39–41. [Trifonov M. Yu. (2013). Method for describing accelerated depreciation of valuation objects. *Voprosy otsenki*, 3, 39–41 (in Russian).]
- Федотова М.А. (ред.). (2018). Оценка машин и оборудования: учебник. 2-е изд. М.: ИНФРА-М. [Fedotova M.A. (ed.). (2018). *Machinery and equipment valuation: Textbook*. 2nd ed. Moscow: INFRA-M (in Russian).]
- Цуканов В.Н. (2013). Модифицированный метод срока жизни для оценки физического износа при массовой оценке // *Вопросы оценки*. № 3. С. 42–43. [Tsukanov V.N. (2013). Modified lifetime method for estimating physical depreciation in mass assessment. *Voprosy otsenki*, 3, 42–43 (in Russian).]
- 2019 Cost Index & Depreciation Schedules (n.d.). Raleigh: North Carolina Department of Revenue.
- Personal property depreciation schedules and trend tables 2019 (n.d.). Helena: Montana Department of Revenue.
- Patry A. (2007). *Economic depreciation and retirement of Canadian assets: A comprehensive empirical study*. Ottawa: Minister of Industry.

Least upper bound of percent good factors of used machinery items undergone random failures

© 2020 S.A. Smolyak

S.A. Smolyak,

Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
e-mail: smolyak1@yandex.ru

Received 12.09.2019

Abstract. We consider one of the problems of valuation of used machinery items. During operation, the technical and economic characteristics of the machinery item tend to deteriorate and the probability of its catastrophic (resource) failure changes. Accordingly, the market value of a used machinery item is reduced compared to value of a similar new one. The ratio of the market value of a used machinery item and value of a similar new one, expressed in a percentage (or as fractions of a unit) is called the percent good factor (goodness factor). In general, it depends on the technical condition of the machinery item. However, it is difficult to quantify and reliably estimate it in many cases (for example, in mass assessment), and appraisers are forced to rely only on the machine's age. There are numerous articles containing recommended by the authors dependencies of goodness factors (or their additions to one, namely physical depreciation factors) on age. We present a model of the dependence of the machine's market value on age, which allows us to establish the exact upper limit for its goodness factors. We show that a number of recommended dependencies do not satisfy the obtained restriction and therefore can lead to erroneous results.

Keywords: machinery and equipment, valuation, age, depreciation, service life, wear, percent good factor (PGF).

JEL Classification: D46.

DOI: 10.31857/S042473880012431-3