
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

О возможности последовательного приближения к равновесию в коалиционной игре при повторении коллективных действий

© 2020 г. Е.М. Скаржинская, В.И. Цуриков

Е.М. Скаржинская,

Костромской государственный университет, Кострома; e-mail: yelena.skarzhinsky@gmail.com

В.И. Цуриков,

Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Кострома; e-mail: tsurikov@inbox.ru

Поступила в редакцию. 30.09.2019

Аннотация. Исследуются возможности участников коллективных действий для выхода из ловушки неэффективного равновесия по Нэшу, в которую коллектив попадает в бескоалиционной игре, и достижения предпочтительного по Парето исхода. Предполагается, что индивидуальные усилия всех членов коллектива создают общий доход, из которого каждому причитается определенная доля. Усилия каждого агента оказывают положительное влияние на величину предельного дохода по усилиям любого другого агента. Цель каждого состоит в максимизации собственного индивидуального выигрыша. Предполагается, что отсутствие доверия не позволяет всем членам коллектива скоординировать свои усилия способом, позволяющим преодолеть первоначальное неэффективное по Нэшу равновесие, достигаемое в бескоалиционной игре. Малая группа (коалиция), объединяющая доверяющих друг другу агентов, осуществляет коалиционную стратегию, направленную на максимизацию коалиционного выигрыша. В результате повышаются не только выигрыши всех членов коллектива, но и величина предельного дохода по усилиям каждого. Соответствующее смещение точки максимума индивидуального выигрыша каждого некооперированного агента в сторону увеличения объема прилагаемых им усилий создает предпосылки для последовательного увеличения в повторяющихся играх размера усилий, прилагаемых как членами коалиции, так и некооперированными агентами. Показано, что исход в каждой игре доминирует по Парето над исходом в предыдущей игре. Предел бесконечной последовательности исходов совпадает с равновесным по Нэшу исходом коалиционной игры, в которой некооперированные агенты исходят из того, что все члены коалиции будут следовать коалиционной стратегии.

Ключевые слова: коллективные действия, равновесие по Нэшу, предпочтение по Парето, доверие, коалиция, предельный доход.

Классификация JEL: C31, C71, D81, D84.

DOI: 10.31857/S042473880012405-4

ВВЕДЕНИЕ

Если попытаться описать проблему коллективных действий в простейшем варианте, то можно сказать, что взаимодействие членов коллектива имеет два альтернативных исхода: равновесный, но неэффективный, и эффективный, но неравновесный (Капелюшников, 2010, с. 9). Вот к этому «плохому» равновесному и склоняются члены коллектива. Для достижения эффективного результата требуется координация действий и приложение усилий со стороны членов коллектива в объемах, превышающих равновесные. Казалось бы, если все члены коллектива понимают проблему и способны видеть перспективы сотрудничества, то проблема должна легко разрешаться путем заключения соответствующего соглашения и неуклонного его выполнения. Однако на этом пути встают проблемы безбилетника и оппортунизма. Каждому члену коллектива выгодно прилагать собственные усилия только в равновесном объеме, но чтобы при этом остальные члены коллектива прилагали усилия в объемах, превышающих равновесные.

Полевые и лабораторные исследования Элинора Остром показали, что наряду с факторами, подталкивающими членов коллектива к неэффективному равновесию, существуют и такие, которые позволяют преодолеть «плохое» равновесие и в течение длительного промежутка времени

(на протяжении веков) осуществлять эффективное управление общим ресурсом (Остром, 2011). В цикле наших статей, посвященных математическому моделированию коллективных действий (Скаржинская, Цуриков, 2014; 2017а; 2017б; 2017в, 2019), на первое место среди такого рода факторов претендует доверие. Именно доверие позволяет снизить трансакционные издержки и мониторинга, и улаживания конфликтов, и достижения кооперативного соглашения, и применения наказаний за его нарушение. Однако межличностное доверие среди всех членов сколько-нибудь многочисленного коллектива очень маловероятно. Поэтому в наших моделях центральная роль отводится малой группе (коалиции), выделившейся в большом коллективе на основе достаточно глубокого чувства взаимного доверия среди ее членов¹.

В предлагаемой здесь модели рассматривается коллектив, производящий на принципах самоуправления и самоорганизации делимое, конкурентное благо и обладающий исключительным правом на его потребление. Вклады (усилия) членов коллектива в его производство, являющиеся индивидуальными невозвратными (специфическими) инвестициями, как и величина самого блага, выражаются в денежном эквиваленте. Постановка задачи и модель наиболее близки к тем, которые фигурируют в работе Бенгта Хольмстрёма (Holmstrom, 1982) и в (Цуриков, 2010), а также в самых общих чертах к моделям неполного контракта Гроссмана–Харта–Мура² и Тироля–Фуруботна–Рихтера³. Общими для указанных работ являются проблемы достижения эффективного результата, роли ex ante правила распределения ожидаемого дохода, стимулов и асимметрии информации.

Следует отметить, что в моделях неполного контракта рассматривается, как правило, взаимодействие двух агентов и поэтому многие проблемы коллективной деятельности никак не проявляются и не затрагиваются. В модели Хольмстрёма рассматривается многочисленный коллектив, но он предстает в виде однородной массы, не способной к самоорганизации и самоуправлению и потому нуждающийся в центральном агенте.

В работах (Скаржинская, Цуриков, 2017а, 2017б) были найдены условия для преодоления коллективом неэффективного равновесия Нэша и достижения предпочтительного по Парето равновесия Штакельберга. В этих работах предполагается образование в коллективе малой группы агентов (коалиции), объединенных доверием друг к другу, позволяющее им не опасаться оппортунистического поведения⁴. Необходимым условием достижения равновесия по Штакельбергу выступает достаточно высокий уровень доверия со стороны всех некооперированных агентов к членам коалиции. В предлагаемой статье, напротив, рассматривается возможность преодоления неэффективного равновесия Нэша при отсутствии всякого доверия со стороны некооперированных агентов к членам коалиции⁵.

Здесь мы предполагаем, что межличностным доверием охвачены только члены коалиции. Все остальные члены коллектива верят только тому, что видят. Фактически мы считаем, что коалиция представляет собой своеобразный очень небольшой островок доверия в океане недоверия. Кроме того, мы предполагаем, что усилия каждого члена коллектива, направленные на создание совокупного дохода, оказывают положительное влияние на величину предельного дохода по усилиям любого другого члена коллектива.

Цель работы состоит в том, чтобы показать, что в повторяющихся играх коалиционная стратегия создает стимулы для постоянного повышения уровня усилий, прилагаемых каждым членом коллектива. Поэтому в каждой последующей игре достигаемый исход доминирует по Парето над исходом предыдущей игры. Доказано, что бесконечная последовательность исходов имеет предел, совпадающий с равновесным по Нэшу исходом в той коалиционной игре, в который коалиция играет роль агента, максимизирующего коалиционный выигрыш, а все некооперированные агенты воспринимают ее именно в этом качестве.

¹ В полном соответствии с концепцией Мансура Олсона некоторые проблемы, непреодолимые в большой группе, разрешаются в малой (Olson, 1965).

² См., например, (Grossman, Hart, 1986; Hart, Moore, 1988; Харт, 2001; Скоробогатов, 2007).

³ См. (Тироля, 2000, т. 1, с. 50–54; Фуруботн, Рихтер, 2005, с. 293–301; Шаститко, 2001).

⁴ Результаты полевых и лабораторных исследований Э. Остром однозначно указывают на необходимость некоторого уровня доверия между членами коллектива для успешной кооперации локальных сообществ, совместно использующих общий ресурс (Остром, 2011).

⁵ Нужно отметить, что в современной России получило распространение недоверчивое отношение друг к другу. Для этого имеются свои причины, которых мы здесь касаться не будем. Однако «если в обществе сложился низкий уровень доверия, то стратегия взаимной “проверки” партнеров, или стратегия взаимного недоверия, может оказаться взаимно наилучшей, т.е. равновесной» (Белянин, Зинченко, 2010, с. 35–36).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через n число индивидов, составляющих коллектив, в котором путем осуществления индивидуальных усилий $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ создается совокупный доход $D = D(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Величина дохода возрастает с ростом прилагаемых усилий и поэтому

$$\partial D / \partial \sigma_i > 0, \sigma_i \in (0, \infty). \quad (1)$$

Потребуем выполнение закона убывающей отдачи, т.е.

$$\partial^2 D / \partial \sigma_i^2 < 0. \quad (2)$$

Предполагаем, что усилия каждого агента оказывают положительное влияние на величину предельного дохода по усилиям любого другого члена коллектива:

$$\partial^2 D / \partial \sigma_i \partial \sigma_k > 0 \text{ при } i \neq k. \quad (3)$$

Для того чтобы решение не уходило в нуль или на бесконечность, выполняются условия:

$$\lim_{\sigma_i \rightarrow +0} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \infty, \lim_{\sigma_i \rightarrow \infty} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 0. \quad (4)$$

Отметим, что в (1)–(4) индексы $i, k = 1, \dots, n$.

Согласно стандартному в неоклассической экономике условию мы считаем, что функция совокупного дохода D строго выпукла вверх. Такая функция может иметь не более одной стационарной точки, т.е. той точки, в которой выполняются условия максимума первого порядка, причем в этой точке (при ее наличии) функция достигает свой глобальный максимум. Поэтому при отыскании максимума достаточно ограничиться условиями первого порядка. Важно подчеркнуть, что, как будет ясно ниже, именно закон убывающей отдачи наряду с эгоистическими устремлениями агентов порождает проблемы безбилетника и оппортунистического поведения. Ниже будет подробно рассмотрен демонстрационный пример с использованием конкретной функции дохода, удовлетворяющей всем перечисленным условиям.

Будем считать, что функция дохода известна всем членам коллектива, а размеры инвестирования являются наблюдаемыми для них. Но данная информация является неverifiedируемой, что влечет за собой исключительно внутренний характер управления коллективными действиями и улаживания конфликтов (Шаститко, 2007, с. 85). С точки зрения теории игр мы будем рассматривать повторяющуюся игру с коалиционной структурой и ограниченной коммуникацией (Парилина, Седаков, 2018; Петросян, Зенкевич, 2009). На этапе *ex ante* в коллективе устанавливается правило распределения ожидаемого совокупного дохода D , согласно которому агенту i принадлежит относительная доля α_i : $0 < \alpha_i < 1$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Преследуемая каждым агентом цель состоит в максимизации собственного выигрыша. Выигрыш (чистый доход, прибыль) каждого из них равен разности между получаемой частью дохода и денежным эквивалентом приложенных им усилий, т.е. выигрыш агента i

$$U_i = \alpha_i D - \sigma_i \rightarrow \max, \sigma_i \geq 0; i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

В условиях полной автономии всех членов коллектива выбираемые ими уровни усилий удовлетворяют условиям

$$\alpha_i \partial D / \partial \sigma_i = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Система уравнений (6) имеет единственное решение, которое мы обозначим как

$$\sigma_i^{(1)} = \sigma_{iN}. \quad (7)$$

Соответствующие решению (7) индивидуальные выигрыши агентов обозначим через U_{iN} . Легко видеть, что решение (7) отвечает равновесному по Нэшу исходу $N(\sigma_{1N}, \dots, \sigma_{nN})$, достигаемому в бескоалиционной игре G . Как показано в работе (Скаржинская, Цуриков, 2017в), этот исход не является эффективным по Парето, так как справа от него (т.е. при $\sigma_i > \sigma_{iN}$) находятся Парето-предпочтительные состояния. В этом нетрудно убедиться, если обратиться к полному дифференциалу индивидуального выигрыша:

$$dU_i = \alpha_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial D}{\partial \sigma_j} d\sigma_j - d\sigma_i = \left(\alpha_i \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} - 1 \right) d\sigma_i + \alpha_i \sum_{k \neq i} \frac{\partial D}{\partial \sigma_k} d\sigma_k. \quad (8)$$

В таком виде дифференциал (8) представляет собой сумму двух слагаемых, из которых первое определяется приращением инвестиций самого агента i , а второе — приращением инвестиций его партнеров.

Из второго слагаемого следует, что i -му агенту всегда выгодно, чтобы его партнеры инвестировали как можно больше, так как чем больше $d\sigma_k$, где $k \neq i$, тем выше доход агента i . А вот самому агенту i всегда наиболее выгодно осуществлять инвестирование в том объеме, при котором его индивидуальный предельный доход равен величине предельных издержек, т.е. в объеме, отвечающем уравнению (6).

В равновесном по Нэшу исходе первое слагаемое в правой части (8), согласно уравнениям (6), равно нулю. Следовательно, повышение выигрыша игрока i при переходе от равновесного исхода N к доминирующему его исходу может осуществляться *только за счет приращения усилий остальных участников игры*. Если приращение усилий осуществит только один игрок, то его выигрыш не увеличится⁶. Поэтому переход к исходу, в котором индивидуальные выигрыши всех членов коллектива выше, чем в равновесном N , осуществим только при условии, что помимо игрока i объем прилагаемых усилий увеличит относительно равновесного еще хотя бы один член коллектива.

Мы считаем, что наши агенты рациональны, но недоверчивы. А так как любому агенту выгодно, чтобы доинвестирование сверх равновесного уровня осуществил не он, а его партнер, то каждый из них, опасаясь обмана со стороны партнера, предпочитает не рисковать. Соответственно, *недоверчивые агенты оказываются запертыми в «плохом» (неэффективном) равновесии* (Капелюшников, 2010).

КОАЛИЦИОННАЯ СТРАТЕГИЯ

Предположим, что к началу повторения игры в коллективе сложилась малая группа агентов (коалиция), объединившая тех членов коллектива, которые испытывают друг к другу чувство доверия, позволяющее им не опасаться проявления оппортунистического поведения. Множество членов коалиции обозначим через C , а множество не вошедших в коалицию агентов (некооперированных) обозначим через NC . Для повышения индивидуальных выигрышей члены коалиции принимают решение осуществить собственные усилия в тех объемах, при которых достигается максимум их суммарного коалиционного выигрыша $U_C = \sum_{k \in C} U_k = D \sum_{k \in C} \alpha_k - \sum_{k \in C} \sigma_k$.

С использованием обозначения $\sum_{k \in C} \alpha_k = \alpha_C$ найдем, что члены коалиции выбирают уровень своих усилий из условий:

$$\alpha_C \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 1, i \in C, \quad (9)$$

$$\sigma_j = \sigma_{jN}, j \in NC. \quad (10)$$

Условие (10) означает, что коалиция не рассчитывает на то, что некооперированные агенты учтут стремление членов коалиции максимизировать не собственные индивидуальные выигрыши, а коалиционный.

Система (9) при условии (10) имеет единственное решение, которое мы обозначим как

$$\sigma_k = \sigma_k^{(2)}, \text{ где } k = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Соответствующие этому решению индивидуальные выигрыши и коалиционный обозначим через $U_k^{(2)}$ и $U_C^{(2)}$ соответственно. Так как, согласно (9), величина совокупного предельного дохода по усилиям члена коалиции $\partial D / \partial \sigma_i = 1 / \alpha_C < 1 / \alpha_i$, то в соответствии с (2) и (4) объем прилагаемых им усилий превысил равновесный⁷, т.е.

$$\sigma_i^{(2)} > \sigma_{iN}, i \in C. \quad (12)$$

Так как решение (11) отвечает единственному максимуму коалиционного выигрыша, то суммарный выигрыш членов коалиции стал выше, чем в равновесном по Нэшу исходе N :

$$U_C^{(2)} > \sum_{i \in C} U_{iN}. \quad (13)$$

Итак, в результате успешно осуществленной коалиционной стратегии, направленной на максимизацию коалиционного выигрыша, все члены коалиции увеличили размер своих усилий, что привело к росту совокупного дохода и к росту коалиционного выигрыша. Так как все некооперированные агенты сохранили и свои относительные доли в совокупном доходе, и уровни своих усилий, то выигрыш каждого из них возрос. Естественно считать, что члены коалиции распределят в своем кругу возросший коалиционный выигрыш так, что индивидуальный выигрыш каждого

⁶ Точнее, в силу условия (2) его выигрыш понизится на бесконечно малую второго порядка.

⁷ Строгое доказательство этого утверждения приводится в Приложении.

члена коалиции увеличится по сравнению с равновесным. Таким образом, *коалиционная стратегия (9)–(10) приводит к росту индивидуального выигрыша каждого члена коллектива*⁸.

Так как, согласно условию (3), увеличение усилий со стороны того или иного агента ведет к росту предельного дохода по усилиям любого другого агента, то успешно осуществленная коалиционная стратегия приводит к росту предельных доходов по инвестициям всех некооперированных агентов. Поэтому к началу третьей игры некооперированные агенты обнаруживают, что им следует скорректировать свои оптимальные стратегии, с учетом того что члены коалиции увеличили свои усилия относительно их значений в равновесии Нэша. Возрастание в результате успешной коалиционной стратегии выигрышей всех членов коллектива позволяет некооперированным агентам быть уверенными в том, что и в третьей игре члены коалиции опять осуществят инвестирование в объемах (12). Соответственно (см. следствие 2 Приложения), каждому некооперированному агенту выгодно увеличить размер своих усилий до уровня, отвечающего максимуму его индивидуального выигрыша в новых условиях:

$$\alpha_j \frac{\partial D}{\partial \sigma_j} = 1, j \in NC; \sigma_i = \sigma_i^{(2)}, i \in C. \quad (14)$$

Обозначим решение системы (14) через

$$\sigma_k = \sigma_k^{(3)}, \text{ где } k = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Так как $\sigma_i^{(3)} = \sigma_i^{(2)} > \sigma_{iN}$, где $i \in C$, то, согласно условию (3),

$$\sigma_j^{(3)} > \sigma_j^{(2)} = \sigma_{jN}, j \in NC. \quad (16)$$

Как видно, коалиционная стратегия вынуждает некооперированных агентов в силу их стремления к максимизации собственных индивидуальных выигрышей повысить уровень своих усилий. В результате этого повышения возрастает совокупный доход и увеличиваются индивидуальные выигрыши всех членов коллектива.

Теперь перед началом четвертой игры члены коалиции, наблюдая инвестирование со стороны некооперированных агентов в объеме (16), понимают, что для максимизации коалиционного выигрыша им следует учесть возрастание усилий, предпринятое некооперированными агентами. Поэтому в четвертой игре коалиция выберет уровень усилий своих членов, исходя из уравнений (9) и условий:

$$\sigma_j = \sigma_j^{(3)}, j \in NC. \quad (17)$$

Обозначим соответствующее решение через

$$\sigma_k = \sigma_k^{(4)}, k = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Как видно, согласно следствию 3 из Приложения,

$$\sigma_i^{(4)} > \sigma_i^{(3)} = \sigma_i^{(2)} > \sigma_{iN}, i \in C, \quad (19)$$

$$\sigma_j^{(4)} = \sigma_j^{(3)} > \sigma_j^{(2)} = \sigma_{jN}, j \in NC. \quad (20)$$

В результате обобщения приходим к рекуррентным соотношениям. Коалиция в каждой четной по номеру игре проявляет инициативу и корректирует уровень усилий своих членов в сторону увеличения. В игре с номером $2k$ коалиция выбирает уровень усилий $\sigma_i = \sigma_i^{(2k)}$ своих членов, согласно уравнениям (9) и усилиям некооперированных агентов:

$$\sigma_j = \sigma_j^{(2k-1)}, j \in NC. \quad (21)$$

Некооперированные агенты реагируют на инициативу членов коалиции в следующей (с нечетным номером) игре, корректируя в сторону повышения уровень своих усилий. В игре с номером $2k+1$ некооперированные агенты выбирают размер своих усилий $\sigma_j = \sigma_j^{(2k+1)}$ исходя из уравнений (14) и усилий членов коалиции:

$$\sigma_i = \sigma_i^{(2k)}, i \in C. \quad (22)$$

В результате последовательно выбираемые в процессе повторений игры объемы прилагаемых усилия удовлетворяют следующим условиям:

$$\sigma_i^{(2k+1)} = \sigma_i^{(2k)} > \sigma_i^{(2k-1)}, i \in C, k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

$$\sigma_j^{(2k+1)} > \sigma_j^{(2k)} = \sigma_j^{(2k-1)}, j \in NC, k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

⁸ В силу этого обстоятельства члены коалиции могут в соответствии с концепцией С. Кроуфорда и Э. Острома о дельта-параметрах (Crawford, Ostrom, 1995) получить от осознания своей миссии еще и дополнительную полезность в нематериальной форме.

Как мы видим, по мере повторения игры члены коллектива увеличивают свои выигрыши, иначе говоря, последовательности размеров их усилий (23) и (24) являются возрастающими. Обратимся к вопросу о пределах этих последовательностей.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ К РАВНОВЕСНОМУ ИСХОДУ

В исходной игре G , в которой все члены коллектива независимо друг от друга выбирают размеры своих усилий для максимизации собственных индивидуальных выигрышей, коллектив достигает равновесный по Нэшу исход N , определяемый системой уравнений (6) с решением (7). Эта игра G в результате образования коалиции C , реализующей свою коалиционную стратегию, преобразуется в другую игру G_C , в которой стремятся максимизировать свои выигрыши коалиция как единый агрегированный агент и некооперированные агенты. Теперь равновесие по Нэшу достигается в исходе, определяемом системой уравнений, состоящей из уравнений (14), отвечающих условиям максимума выигрышей некооперированных агентов, и уравнений (9), отвечающих условиям максимума коалиционного выигрыша. Эта система имеет единственное решение, определяющее равновесие по Нэшу в игре G_C , которое мы обозначим через N_C .

Здесь важно отметить следующее. Если бы предельный доход каждого агента i не зависел от величины усилий агента j , где $j \neq i$ (иными словами, если бы все недиагональные элементы матрицы Гессе функции D равнялись нулю), то решение каждого уравнения i систем (9) и (14) также не зависело бы от значений усилий агентов j . В этом случае сразу в первой же игре G_C , в которой коалиция реализует свою стратегию, было бы достигнуто равновесие по Нэшу N_C .

В силу условий (3) левые части уравнений (14), которые можно интерпретировать как предельные индивидуальные доходы некооперированных агентов, являются возрастающими функциями по усилиям членов коалиции. Соответственно, левые части уравнений (9) являются возрастающими функциями по усилиям некооперированных агентов. Следовательно, исход игры зависит от взаимных ожиданий агентов относительно размера усилий, которые они намерены в этой игре осуществить.

Обозначим кортеж значений, которые согласно предположениям членов коалиции принимают усилия некооперированных агентов, как $[\sigma_j]$. Тогда решения системы уравнений (9), получаемые при соответствующих значениях усилий некооперированных агентов, являются функциями от $[\sigma_j]$, которые мы обозначим как

$$\sigma_i = F_i([\sigma_j]), i \in C, j \in NC. \quad (25)$$

Аналогично, усилия некооперированных агентов

$$\sigma_j = R_j([\sigma_i]), i \in C, j \in NC \quad (26)$$

представляют собой решения уравнений (14), получаемые при убежденности некооперированных агентов в том, что члены коалиции приложат усилия в размерах $[\sigma_i]$. Согласно условиям (3) функции (25) и (26) являются монотонно возрастающими по всем аргументам. Будем считать их непрерывными.

Совместное решение уравнений (9) и (14) удовлетворяет, таким образом, следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_i = F_i([\sigma_j]), i \in C, j \in NC, \\ \sigma_j = R_j([\sigma_i]), i \in C, j \in NC. \end{cases} \quad (27)$$

Обозначим размеры усилий, прилагаемых членами коалиции в равновесном исходе N_C через σ_{iC} , где $i \in C$, а равновесные значения усилий некооперированных агентов — через $\sigma_{jC} = R_j([\sigma_{iC}])$, $i \in C, j \in NC$. Соответственно, в равновесном по Нэшу исходе N_C игры G_C , и только в нем, справедливы следующие выражения для величины усилий некооперированных агентов:

$$\sigma_{jC} = R_j([F_i([\sigma_{jC}]))], i \in C, j \in NC. \quad (28)$$

Следует еще раз подчеркнуть, что равновесный исход N_C может быть достигнут только при выполнении двух условий.

Условие 1: все некооперированные агенты максимизируют свои индивидуальные выигрыши, исходя из предположения, что все члены коалиции следуют коалиционной стратегии, т.е. максимизируют коалиционный выигрыш.

Условие 2: члены коалиции максимизируют коалиционный выигрыш исходя из предположения, что условие 1 строго выполняется.

Для выполнения условия 1 необходимо, чтобы информация о том, что сформирована коалиция C , все члены которой неукоснительно будут следовать коалиционной стратегии, была воспринята всеми некооперированными агентами как достоверный сигнал. Если члены коалиции не проявляют, по крайней мере в рамках коалиции, оппортунистического поведения и доверяют друг другу, то сигнал об осуществлении коалиционной стратегии будет соответствовать действительности. В этом случае усилия некооперированных агентов, удовлетворяющие системе (27), действительно обеспечат им максимальные индивидуальные выигрыши. Однако на этом пути коллектив могут подстергать различные препятствия.

Во-первых, нельзя исключить возможности, что коалиция не сможет осуществить свою стратегию в силу оппортунистического поведения кого-либо из ее членов. Во-вторых, само предположение о возможности проявления оппортунизма среди членов коалиции способно оказывать отрицательное влияние на размер усилий некооперированных агентов. В-третьих, условие (3) создает стимулы для блефа, так как каждому агенту выгодна ошибочная, а именно завышенная, оценка любым другим агентом объемов усилий, которые намерены осуществить его партнеры. Таким образом, некооперированные агенты оценивают достоверность информации о коалиционной стратегии в зависимости от их мнения относительно сплоченности коалиции.

Теперь непосредственно обратимся к возрастающей последовательности усилий, прилагаемых членами коллектива в повторяющихся играх G_C в случае отсутствия у некооперированных агентов уверенности в сплоченности членов коалиции. Так как, согласно изложенному в предыдущем разделе статьи, а также (25) и (26),

$$\sigma_j^{(2k+1)} = R_j([\sigma_i^{(2k)}]), \text{ а } \sigma_i^{(2k)} = F_i([\sigma_j^{(2k-1)}]), \text{ где } i \in C, j \in NC, k = 1, 2, \dots,$$

то для значений усилий некооперированных членов коллектива в игре с номером $2k+1$ получим выражение

$$\sigma_j^{(2k+1)} = R_j([F_i([\sigma_j^{(2k-1)}])]). \quad (29)$$

Как видно из (24) и из того, что функции (25) и (26) являются монотонно возрастающими (доказательство приводится в Приложении), $\sigma_j^{(2k+1)} > \sigma_j^{(2k)} = \sigma_j^{(2k-1)}$, т.е. в каждой игре усилия некооперированных агентов ниже равновесных σ_{jC} :

$$\sigma_j^{(k)} < \sigma_{jC}, \quad j \in NC, \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Аналогичные неравенства, как нетрудно видеть, справедливы и для последовательности значений усилий членов коалиции, а значит, и для соответствующих последовательностей совокупного дохода и выигрыша всего коллектива.

Итак, значения усилий, прилагаемых членами коалиции и некооперированными агентами в повторяющейся игре, представляют собой бесконечные, возрастающие и ограниченные сверху последовательности. Следовательно, каждая из них имеет конечный предел, не превышающий значений усилий, прилагаемых соответствующим агентом в равновесном по Нэшу исходе N_C :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_i^{(k)} = \sigma_i^\infty \leq \sigma_{iC}, i \in C; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_j^{(k)} = \sigma_j^\infty \leq \sigma_{jC}, j \in NC.$$

В результате предельного перехода в выражениях (29) получим

$$\sigma_j^{(\infty)} = R_j([F_i([\sigma_j^{(\infty)}])]), \quad i \in C, j \in NC. \quad (31)$$

Из сравнения (31) с (28) следует, что в силу единственности решения (28) предельные значения усилий некооперированных агентов совпадают с равновесными значениями

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_j^{(k)} = \sigma_j^\infty = \sigma_{jC}, j \in NC.$$

Для усилий членов коалиции справедливо аналогичное заключение:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_i^{(k)} = \sigma_i^\infty = \sigma_{iC}, i \in C.$$

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что в результате бесконечного повторения коалиционной игры G_C образуется последовательность исходов, каждый из которых является доминирующим по Парето над предыдущим, причем последовательность исходов стремится к равновесию по Нэшу N_C .

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим несколько упрощенный вариант функции дохода, использованной нами в (Скаржинская, Цуриков, 2017б). Пусть величина совокупного дохода задана выражением:

$$D = \lambda \prod_{i=1}^n \sigma_i^a, \quad (32)$$

где λ — постоянный положительный коэффициент, а показатель степени: $0 < a < 1/n$. В этом случае функция (32) строго выпукла вверх и полностью удовлетворяет условиям (1)–(4). Для определенности будем считать, что коалиция состоит из m первых членов коллектива и все агенты имеют одинаковые доли в доходе. Так как выигрыш агента i в этом случае равен

$$U_i = D / n - \sigma_i, \quad (33)$$

то в условиях полной автономии всех членов коллектива размер усилий каждого из них будет определяться системой уравнений

$$\frac{\lambda a}{n} \sigma_i^{a-1} \prod_{k \neq i} \sigma_k^a = 1; \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (34)$$

Решение системы (34) отвечает равновесному по Нэшу исходу N , достигаемому в бескоалиционной игре G :

$$\sigma_i^{(1)} = \sigma_N = (\lambda a / n)^{1/(1-an)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (35)$$

Во всех последующих играх с четными порядковыми номерами коалиция выбирает уровень усилий своих членов из условия максимума коалиционного выигрыша:

$$U_C = \frac{m}{n} D - \sum_{h=1}^m \sigma_h. \quad (36)$$

Так как некооперированные агенты в этих играх сохраняют тот размер своих усилий $\sigma_{j \in NC}^{(2k-1)}$, которые они выбирали в предыдущей игре, то функцию дохода можно представить в виде

$$D = \lambda \prod_{h=1}^m \sigma_h^a \prod_{j=m+1}^n \left(\sigma_j^{(2k-1)} \right)^a = \lambda \left(\sigma_{j \in NC}^{(2k-1)} \right)^{a(n-m)} \prod_{h=1}^m \sigma_h^a, \quad k = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Система уравнений (9) принимает вид

$$m \frac{\lambda a}{n} \left(\sigma_{j \in NC}^{(2k-1)} \right)^{a(n-m)} \sigma_i^{a-1} \prod_{h \neq i} \sigma_h^a = 1, \quad i, h \in C. \quad (38)$$

Прологарифмируем обе части уравнения (38) и с учетом симметрии относительно неизвестных σ_i перепишем его в виде

$$\ln m + \ln \frac{\lambda a}{n} + a(n-m) \ln \sigma_j^{(2k-1)} = (1-am) \ln \sigma_i. \quad (39)$$

Используя (35), преобразуем уравнение (39) следующим образом:

$$\ln m + (1-an) \ln \sigma_N + a(n-m) \left(\ln \sigma_N + \ln \left(\sigma_j^{(2k-1)} / \sigma_N \right) \right) = (1-am) \ln \sigma_i,$$

откуда получим:

$$\ln \frac{\sigma_i}{\sigma_N} = \ln \frac{\sigma_i^{(2k)}}{\sigma_N^{(2k)}} = \frac{1}{1-am} \ln m + \frac{a(n-m)}{1-am} \ln \frac{\sigma_j^{(2k-1)}}{\sigma_N}; \quad i \in C; \quad j \in NC. \quad (40)$$

Выражение (40) связывает размеры усилий, которые прилагают члены коалиции в четной по порядку следования игре под номером $2k$, с теми усилиями, которые прилагают некооперированные агенты в играх с номерами $2k-1$ и $2k$. Найдем, к примеру, с его помощью размер усилий членов коалиции, в первый раз реализующих коалиционную стратегию. Для этого положим в (40) $k = 1$. Так как $\sigma_j^{(1)} = \sigma_N$, то получим

$$\sigma_i^{(2)} = \sigma_N m^{1/(1-am)}, \quad (41)$$

т.е. каждый член коалиции более чем в m раз (при $m > 1$) увеличивает объем своих усилий.

Аналогично, найдем соотношение между оптимальными значениями усилий некооперированных агентов в нечетной по порядку игре и членов коалиции в предыдущей игре

$$\ln \frac{\sigma_j^{(2k+1)}}{\sigma_N} = \frac{am}{1-a(n-m)} \ln \frac{\sigma_i^{(2k)}}{\sigma_N}; \quad i \in C, \quad j \in NC. \quad (42)$$

Подставив в правую часть (42) соответствующее выражение из (40), найдем, как изменяются усилия некооперированных агентов в результате двух последовательных корректировок:

$$\ln(\sigma_j^{(2k+1)} / \sigma_N) = \frac{am}{(1-am)(1-a(n-m))} (\ln m + a(n-m) \ln(\sigma_j^{(2k-1)} / \sigma_N)). \quad (43)$$

Воспользуемся для краткости следующими обозначениями:

$$\ln(\sigma_j^{(2k+1)} / \sigma_N) = x_{2k+1}; \quad \frac{am}{(1-am)(1-a(n-m))} \ln m = \alpha; \quad \frac{a^2 m(n-m)}{(1-am)(1-a(n-m))} = \beta, \quad (44)$$

тогда соотношение (43) примет вид

$$x_{2k+1} = \alpha + \beta x_{2k-1}. \quad (45)$$

Используя (45), имеем

$$x_{2k+1} = \alpha + \beta x_{2k-1} = \alpha + \beta(\alpha + \beta x_{2k-3}) = \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{k-1} + \beta^k x_1. \quad (46)$$

Уравнение (46) показывает, что последовательность x_{2k+1} является возрастающей, т.е. действительно некооперированные агенты воспринимают действия коалиции как сигналы к наращиванию собственных усилий. Так как $x_1 = 0$, а $0 \leq \beta < 1$, то

$$x_{2k+1} = (\alpha - \alpha\beta^k) / (1 - \beta). \quad (47)$$

В пределе при $k \rightarrow \infty$ для усилий некооперированных агентов получим $x_\infty = \ln(\sigma_j^{(\infty)} / \sigma_N) = \alpha / (1 - \beta) \Rightarrow \sigma_j^{(\infty)} = \sigma_N e^{\alpha/(1-\beta)}$, откуда следует

$$\sigma_j^{(\infty)} = \sigma_N m^{am/(1-an)}, \quad j \in NC. \quad (48)$$

Так как условия максимума (9) и (14) для функции (32) можно записать в виде $maD / (n\sigma_i) = 1$, $aD / n\sigma_j = 1$, $i \in C$, $j \in NC$, то для предельного случая получим $D^{(\infty)} = n\sigma_i^{(\infty)} / am = n\sigma_j^{(\infty)} / a$, откуда следует $\sigma_i^{(\infty)} = m\sigma_j^{(\infty)}$, т.е. усилия члена коалиции превосходят усилия некооперированного агента ровно в m раз. Соответственно, с учетом (48) имеем

$$\sigma_i^{(\infty)} = \sigma_N m^{[1-a(n-m)]/(1-an)}, \quad i \in C. \quad (49)$$

Путем непосредственной подстановки величин (48) и (49) в уравнения (9) и (14) нетрудно убедиться в том, что эти объемы усилий, найденные в результате предельного перехода, являются единственными решениями этой системы уравнений. Таким образом, значения усилий (48) и (49) отвечают равновесному по Нэшу исходу, достигаемому в коалиционной игре. При выполнении условий (3) и $m > 1$ совместная система уравнений (9) и (14) предполагает достаточно высокий уровень доверия между всеми членами коллектива.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если бы все некооперированные агенты были уверены, что все члены коалиции придерживаются коалиционной стратегии, то они максимизировали бы свои индивидуальные выигрыши исходя из условий (9). Если бы при этом члены коалиции были уверены, что все некооперированные агенты исходят из условий (9), и некооперированные агенты знали бы об этом, то оптимальные значения усилий каждого агента определялись бы из решения системы уравнений (9), (14). В результате сразу же достиглось бы равновесие N_C , в котором оптимальные значения усилий определяются уравнениями (27). Однако в условиях недостаточного уровня доверия и коалиция, и некооперированные агенты предпочитают действовать наощупь, пошагово, реагируя только на сигналы, получаемые в предыдущей игре.

Необходимой предпосылкой для такого процесса последовательного повышения уровня усилий в условиях взаимного недоверия между некооперированными агентами и членами коалиции является существование положительного влияния усилий членов коалиции на отдачу от усилий некооперированного агента, и наоборот. Его математическая суть выражается в положительном значении второй смешанной производной от величины совокупного дохода по усилиям члена коалиции и некооперированного агента. Здесь мы исходили из предположения о том, что такая связь существует между усилиями всех без исключения членов коллектива. На самом деле для вовлечения того или иного некооперированного агента в процесс последовательного повышения величины прилагаемых им усилий достаточно, чтобы такая связь существовала только между его усилиями и усилиями хотя бы одного из членов коалиции. Этого достаточно для вовлечения данного некооперированного агента и соответствующего члена коалиции в рассмотренный здесь процесс последовательного повышения уровня прилагаемых усилий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Теорема. Пусть действительная функция n действительных аргументов $f(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) определена и непрерывна при всех $x_i \geq 0$, где $i = 1, \dots, n$;

2) дважды непрерывно дифференцируема при $x_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$);

3) при всех $x_i > 0, x_k > 0$, где $i, k = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} > 0 \text{ при } i \neq k; \quad (\text{П1})$$

4) при всех положительных значениях аргументов строго выпукла вверх, и $\forall i, k = 1, \dots, n, \forall x_k > 0$

$$\lim_{x_i \rightarrow +0} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \infty, \lim_{x_i \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{П2})$$

Тогда система уравнений

$$\partial f / \partial x_i = a_i, \quad (\text{П3})$$

где параметры $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), имеет решение $x_1, \dots, x_n$, представляющее собой функции правых частей $x_i = x_i(a_1, \dots, a_n)$, каждая из которых является убывающей функцией аргумента a_i .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность решения системы (1) при любой заданной правой части доказаны в работе (Скаржинская, Цуриков, 2017в). Поэтому каждому набору значений параметров a_i соответствует решение системы (П3), представимое в виде вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$. Докажем, что при уменьшении значения параметра a_1 каждая координата решения x системы (П3) возрастает.

Запишем систему (П3) в виде:

$$\partial f / \partial x_1 = a_1; \quad (\text{П4})$$

$$\partial f / \partial x_j = a_j, \quad j = 2, \dots, n. \quad (\text{П5})$$

Обозначим через $[x_j]$ кортеж значений x_j , где $j = 2, \dots, n$. Так как в систему (П5) параметр a_1 не входит, то при любом положительном конкретном значении x_1 кортеж $[x_j]$ определяется только значениями параметров $a_2, \dots, a_n$. Соответственно, каждую величину x_j ($j \neq 1$) можно рассматривать как функцию этих параметров и x_1 , т.е.

$$x_j = F_j(a_2, \dots, a_n, x_1), \quad j \neq 1. \quad (\text{П6})$$

Величина x_1 , согласно уравнению (П4), определяется значениями a_1 и x_j с $j \neq 1$:

$$x_1 = F_1(a_1, [x_j]). \quad (\text{П7})$$

Так как $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_j > 0$, рост x_1 влечет за собой возрастание левой части каждого уравнения системы (П5), и, соответственно, в силу условий $\partial^2 f / \partial x_j^2 < 0$ рост функций $x_j = F_j(a_2, \dots, a_n, x_1)$. Другими словами, каждая из функций (П6) является возрастающей по x_1 . По той же причине функция $x_1 = F_1(a_1, [x_j])$ возрастает по всем аргументам x_j с $j = 2, \dots, n$ и убывает, согласно условию $\partial^2 f / \partial x_1^2 < 0$, по аргументу a_1 . С учетом (П6) перепишем (П7) в виде:

$$x_1 = F_1(a_1, [F_j(a_2, a_3, \dots, a_n, x_1)]). \quad (\text{П8})$$

Зафиксируем произвольные положительные значения параметров правых частей системы (П3) $a_1, \dots, a_n$ и обозначим соответствующее решение системы через $x_i^{(0)}$ с $i = 1, \dots, n$. Уравнение (П8) примет вид:

$$x_1^{(0)} = F_1(a_1, [F_j(a_2, \dots, a_n, x_1^{(0)})]). \quad (\text{П9})$$

Рассмотрим систему уравнений, состоящую из уравнений (П5) и уравнения

$$\partial f / \partial x_1 = b_1, \quad (\text{П10})$$

где $0 < b_1 < a_1$. Обозначим решение системы уравнений (П5) и (П10) как x_i^* с $i = 1, \dots, n$ и покажем, что $x_1^* > x_1^{(0)}$, $x_j^* > x_j^{(0)}$, где $j = 2, \dots, n$. Запишем x_1^* в виде

$$x_1^* = F_1(b_1, [F_j(a_2, a_3, \dots, a_n, x_1^*)]). \quad (\text{П11})$$

Составим следующую последовательность $\{x_i^{(k)}\}$: для $k = 1$

$$x_1^{(1)} = F_1(b_1, [F_j(a_2, \dots, a_n, x_1^{(0)})]) \text{ и } x_1^{(k)} = F_1(b_1, [F_j(a_2, a_3, \dots, a_n, x_1^{(k-1)})]), \quad k = 2, 3, \dots \quad (\text{П12})$$

Из сравнения $x_1^{(0)}$ из (П9) с $x_1^{(1)}$ из (П12) при $k=1$ видно, что они отличаются только значениями первого аргумента. А так как функция F_1 убывает по этому аргументу и $b_1 < a_1$, то

$$x_1^{(1)} > x_1^{(0)}. \quad (\text{П13})$$

В силу того что функция $x_1 = F_1(a_1, [x_j])$ возрастает по своим аргументам $x_j = F_j(a_2, \dots, a_n, x_1)$ с $j=2, \dots, n$, а функции F_j возрастают по аргументу x_1 , из (П12) и неравенства (П13) следует неравенство $x_1^{(2)} > x_1^{(1)}$. Соответственно, для любого натурального k справедливы неравенства

$$x_1^{(k)} > x_1^{(k-1)}. \quad (\text{П14})$$

Так как возрастающая последовательность $\{x_1^{(k)}\}$ является ограниченной, то она имеет предел $x_1^{(\infty)}$, для которого, в силу (П14), справедливо неравенство:

$$x_1^{(\infty)} > x_1^{(0)}. \quad (\text{П15})$$

Устремив к бесконечности k в уравнении (П12), в пределе получим:

$$x_1^{(\infty)} = F_1(b_1, [F_j(a_2, \dots, a_n, x_1^{(\infty)})]). \quad (\text{П16})$$

Из сравнения (П11) и (П16) с учетом единственности решения системы уравнений (П5) и (П10) найдем, что $x_1^{(\infty)} = x_1^*$. Откуда с учетом (П15) следует:

$$x_1^* > x_1^{(0)}. \quad (\text{П17})$$

Так как, согласно (П6), значения x_j^* с $j=2, \dots, n$ определяются выражениями $x_j^* = F_j(a_2, \dots, a_n, x_1^*)$, где все F_j являются возрастающими функциями по аргументу x_1 , из неравенства (П13) следуют неравенства

$$x_j^* > x_j^{(0)}, \quad j=2, \dots, n. \quad (\text{П18})$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие 1. Теорема справедлива и в том случае, в котором снижение правой части имеет место в одном любом уравнении системы (П3).

Следствие 2. Уменьшение правых частей в нескольких уравнениях системы (П3) также приводит к возрастанию каждой из величин $x_1, \dots, x_n$, образующих решение системы (П3). Для доказательства рассмотрим наряду с системой, состоящей из уравнений (П5) и (П10), систему $\partial f / \partial x_1 = b_1$, $\partial f / \partial x_2 = b_2$, $\partial f / \partial x_j = a_j$, $j=3, \dots, n$, где $0 < b_2 < a_2$. Обозначим решение этой системы как x_i^{**} с $i=1, \dots, n$. Так как, согласно доказанной выше теореме и следствию 1, $x_i^{**} > x_i^*$, то с учетом (П17) и (П18) получим $x_i^{**} > x_i^{(0)}$ и $x_j^{**} > x_j^{(0)}$, что и требовалось доказать. Аналогично получаем доказательство для случая снижения значений правых частей в произвольном количестве уравнений.

Следствие 3. Пусть первые m ($1 \leq m < n$) уравнений системы (П3) заменены условиями $x_k = C_k$, где $k=1, \dots, m$, а C_k — заданные положительные числа. Если $C_k > x_k^{(0)}$, где $x_k^{(0)}$ — первые m координат вектора, являющегося решением (П3), то в результате такой замены остальные координаты вектора—решения системы увеличатся. Действительно, для фиксированных значений $x_k > x_k^{(0)}$ с $k=1, \dots, m$ при $x_j = x_j^{(0)}$, где $j=m+1, \dots, n$, согласно (П1), $\partial f / \partial x_j = a_j + \Delta a_j$, где $\Delta a_j > 0$. Отсюда, согласно доказанной теореме, следует, что для выполнения условий $\partial f / \partial x_j = a_j$ необходим рост всех координат x_j с $j=m+1, \dots, n$.

Следствие 4. Пусть в условиях теоремы (П1) строгие неравенства $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_k > 0$ заменены на нестрогие $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_k \geq 0$ для всех $i, k=1, \dots, n$ при $i \neq k$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) уменьшение правых частей в первых m ($1 \leq m < n$) уравнениях системы (П3) приводит к возрастанию каждой из величин $x_1, \dots, x_m$ и неубыванию каждой из остальных, где $x_1, \dots, x_n$ — решение соответствующей системы;

2) в результате замены первых m ($1 \leq m < n$) уравнений системы (П3) условиями $x_k = C_k$, где $k=1, \dots, m$, а C_k — заданные числа, причем $C_k \geq x_k^{(0)}$, величины x_j с $j > m$, образующие решение соответствующей системы, не уменьшатся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Белянин А.В., Зинченко В.П. (2010). Доверие в экономике и общественной жизни. М.: Фонд «Либеральная миссия». [Belyanin A.V., Zinchenko V.P. (2010). *Trust in economics and public life*. Moscow: Liberal Mission Foundation (in Russian).]
- Капелюшников Р.И. (2010). Множественность институциональных миров: Нобелевская премия по экономике 2009. Препринт WP3/2010/02. Часть 1. М.: НИУ ВШЭ. [Kapelushnikov R. (2010). The multiplicity of institutional

- worlds: The Nobel Prize in economic sciences 2009. *Working paper WP3/2010/02*. Part 1. Moscow: National Research University “Higher School of Economics” (in Russian).]
- Остром Э.** (2011). Управляя общим: эволюция институтов коллективной деятельности. Пер. с англ. М.: ИРИСЭН, Мысль. [Ostrom E. (2011). *Governing the commons. The evolution of collective institutions for collective action*. Moscow: IRISSEN, Mysl’ (in Russian).]
- Парилина Е.М., Сedaков А.А.** (2018). Устойчивые кооперативные структуры в играх с главным игроком. В кн.: Сedaков А.А. «Социофизика и социоинженерия». М.: ИПУ РАН. С. 181–182. [Parilina E.M., Sedakov A.A. (2018). Stable cooperative structures in games with the main player. In: *Sociophysics and socioengineering*. Moscow: Institute of Control Sciences (ICS) RAS, 181–182 (in Russian).]
- Петросян Л.А., Зенкевич Н.А.** (2009). Принципы устойчивой кооперации // *Математическая теория игр и ее приложения*. № 1. С. 106–123. [Petrosyan L.A., Zenkevich N.A. (2009). Principles of sustainable cooperation. *Mathematical Game Theory & Its Applications*, 1, 1, 106–123 (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.** (2014). К вопросу об эффективности коллективных действий // *Российский журнал менеджмента*. № 3. С. 87–106. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2014). On the issue of the effectiveness of collective action. *Russian Management Journal*, 12, 3, 87–106 (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.** (2017а). Модель коллективных действий. Часть 1. Равновесие, справедливость, эффективность // *Экономика и математические методы*. № 2. С. 118–133. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2017a). Model of collective action. Part 1: Equilibrium, justice, efficiency. *Economics and Mathematical Methods*, 53, 2, 118–133 (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.** (2017б). Модель коллективных действий. Часть 2. Лидирующая коалиция // *Экономика и математические методы*. № 4. С. 89–104. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2017b). Model of collective action. Part 2: The leading coalition. *Economics and Mathematical Methods*, 53, 4, 89–104 (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.** (2017в). Экономико-математический анализ эффективности принципа «От каждого — по способностям, каждому — по труду» // *Журнал экономической теории*. № 2. С. 110–122. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2017c). Economic-mathematical analysis of the efficiency conditions of the principle “from each according to his ability, to each according to his work”. *Russian Journal of Economic Theory*, 2, 110–122 (in Russian).]
- Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.** (2019). Моделирование коллективных действий: значимость кооперативных соглашений // *Российский журнал менеджмента*. № 3. С. 337–366. [Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. (2019). Modelling of collective actions: The significance of cooperative agreements. *Russian Management Journal*, 17, 3, 337–366 (in Russian).]
- Скоробогатов А.** (2007). Теория организации и модели неполных контрактов // *Вопросы экономики*. № 12. С. 71–95. [Skorobogatov A. (2007). Organization theory and models of incomplete contracts. *Voprosy Ekonomiki*, 12, 71–95 (in Russian).]
- Тиrole Ж.** (2000). Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности. СПб.: Экономическая школа. [Tirole J. (2000). *Markets and market power of the theory of industrial organization*. Vol. 1. St. Petersburg: The School of Economics. (in Russian).]
- Фуруботн Э.Г., Рихтер Р.** (2005). Институты и экономическая теория: достижения новой институциональной экономической теории. СПб.: Издательский Дом СПбГУ. [Furubotn E.G., Richter R. (2005). *Institutions and economic theory: The contribution of the new institutional economics*. St. Petersburg: Publishing house of St. Petersburg State University (in Russian).]
- Харт О.Д.** (2001). Неполные контракты и теория фирмы. В кн.: «Природа фирмы». М.: ДЕЛО. С. 206–236. [Hart O.D. (2001). Incomplete contracts and the theory of the firm. In: *Nature of the firm*. Moscow, BUSINESS, 206–236 (in Russian).]
- Цуриков В.И.** (2010). Модель неполного контракта и постконтрактного перераспределения прав на доход // *Экономика и математические методы*. № 1. С. 104–116. [Tsurikov V.I. (2010). Model of incomplete contract and redistribution of income rights ex post. *Economics and Mathematical Methods*, 46, 1, 104–116 (in Russian).]
- Шаститко А.** (2001). Неполные контракты: проблемы определения и моделирования // *Вопросы экономики*. № 6. С. 80–99. [Shastitko A. (2001). Incomplete contracts: Problems of definition and modeling. *Voprosy Ekonomiki*, 6, 80–99 (in Russian).]
- Шаститко А.Е.** (2007). Экономическая теория организаций. М.: ИНФРА-М. [Shastitko A. (2007). *The economic theory of organizations*. Moscow: INFRA-M (in Russian).]
- Crawford S.E.S., Ostrom E.** (1995). A grammar of institutions. *American Political Science Review*, 3, 582–600.
- Grossman S., Hart O.** (1986). The cost and benefits of ownership: A theory of vertical and lateral integration. *Journal of Political Economy*, 4, 691–719.
- Hart O.D., Moore J.** (1988). Incomplete contracts and renegotiation. *Econometrica*, 4, 755–785.
- Holmstrom B.** (1982). Moral hazard in teams. *The Bell Journal of Economics*, 2, 324–340.
- Olson M.** (1965). *The logic of collective action. Public goods and the theory of groups*. Cambridge: Harvard University Press.

On the possibility of successive approximation towards an equilibrium in a coalition game with reiterating collective action

© 2020 E.M. Skarzhinskaya, V.I. Tsurikov

E.M. Skarzhinskaya,

Kostroma State University, Kostroma, Russia; e-mail: yelena.skarzhinsky@gmail.com

V.I. Tsurikov,

Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia; e-mail: tsurikov@inbox.ru

Received 30.09.2019

Abstract. The study investigates the possibility for the participants of collective action of avoiding a Nash equilibrium trap resulting from a non-coalition game, and of achieving a Pareto-preferable outcome. It is assumed that individual efforts invested by all members of a collective create revenue of which each member is entitled to a certain share. Each agent's efforts have a positive effect on the value of marginal revenue per effort of any other agent. Each agent aims to maximize their own individual gain. It is further assumed that the lack of trust prevents members of the collective to coordinate their efforts in such a way that allows them to break out of the initial Nash-ineffective equilibrium which occurs in a non-coalition game setting. A small group (coalition) in which agents are united by mutual trust deploys a coalition strategy aimed at maximizing coalitional gains. As a result, not only do gains increase for each member of the larger collective, but also their marginal revenue per effort. The corresponding shift of the individual gain maximum point per each non-cooperated agent towards increasing the volume of effort invested thereby creates the prerequisites for the successive increase of effort invested in a reiterating game not only by coalition members, but also by non-cooperated agents. It is shown that the outcome in each consecutive game dominates over Pareto in the preceding game. Limit of an infinite sequence of outcomes corresponds with a Nash-balanced outcome of a coalition game, where non-cooperated agents assume that all coalition members will necessarily adhere to the coalition strategy.

Keywords: collective actions, Nash equilibrium, Pareto efficiency, trust, coalition, marginal revenue.

JEL Classification: C31, C71, D81, D84.

DOI: 10.31857/S042473880012405-4