

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

О производственных функциях, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу научно-технический прогресс

© 2023 А.Ф. Проневич

А.Ф. Проневич,

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь; e-mail: pranevich@grsu.by

Поступила в редакцию 04.08.2022

Аннотация. Статья посвящена вопросам учета научно-технического прогресса (НТП) в аналитическом задании динамических агрегированных производственных функций. Рассмотрены три концепции нейтральности экономических показателей относительно НТП: неизменность предельной нормы технического замещения (по Хиксу), неизменность предельной производительности капитала (по Харроду) и неизменность предельной производительности труда (по Солоу). Указаны аналитические виды динамических агрегированных производственных функций, учитывающие все три нейтральных НТП, а также приведены публикации, продолжением исследований которых является данная работа. Решена задача Х. Удзавы об аналитическом виде динамических агрегированных производственных функций, учитывающих одновременно три нейтральных НТП, и для них описаны все классы агрегированных динамических производственных функций. Полученные в статье результаты могут быть использованы для моделирования производственных процессов, учитывающих нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП.

Ключевые слова: научно-технический прогресс (НТП), производственная функция, нейтральность по Хиксу, нейтральность по Харроду, нейтральность по Солоу.

Классификация JEL: C65, O30.

Для цитирования: **Проневич А.Ф.** (2023). О производственных функциях, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу научно-технический прогресс // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 1. С. 16–21. DOI: 10.31857/S042473880021360-5

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамическую агрегированную производственную функцию (ПФ)

$$Y = F(K, L, t), \quad (1)$$

где Y — выпуск продукции, K — капитал, L — труд, t — параметр времени из числового луча $R_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП). Неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times R_+$, экономическая область G из первого квадранта $R_+^2 = \{(K, L): K \geq 0, L \geq 0\}$, R — множество действительных чисел.

Начиная с 1920-х годов исследователи пытались понять, в чем состоит НТП с точки зрения макроэкономической динамики, какие экономические показатели он оставляет неизменными (нейтральными, инвариантными) во времени, а какие — изменяет. На основании понятия нейтральности были построены различные классификации НТП относительно заданных инвариантных соотношений между экономическими показателями. Одна из первых классификаций НТП была предложена Дж.Р. Хиксом в книге (Hicks, 1932, p. 121–122) и основана на изменении с течением времени предельной нормы технического замещения: «Если рассматривать два фактора, “труд” и “капитал”, то изобретения можно классифицировать в соответствии с тем, увеличивают ли они, оставляют неизменным или уменьшают отношение предельной производительности капитала к предельной производительности труда по сравнению с ее первоначальным состоянием. Такие изобретения будем называть “трудосберегающими”, “нейтральными” и “капиталосберегающими” соответственно». Дж. Робинсон (Robinson, 1937) при обсуждении влияния технологий на положения долгосрочного равновесия в теории занятости использовала классификацию НТП по Хиксу при дополнительном условии: «фондовооруженность труда является величиной постоянной» (Robinson, 1938). В дальнейшем данная модификация определения нейтральности НТП по Хиксу получила широкое

распространение и сейчас в научной литературе принята в качестве основного понятия (см., например, (Uzawa, 1961; Sato, Beckmann, 1968; Stiglitz, Uzawa, 1969; Дадаян, 1973; Курзенев, Матвеев, 2018; Проневич, 2020)). Идея еще одной классификации НТП была заложена Р.Ф. Харродом в рецензии (Harrod, 1937) на книгу Дж.В. Робинсон «Очерки по теории занятости» (Robinson, 1937) и позднее в расширенном виде была изложена в монографии «К динамической экономической теории» (Harrod, 1948, с. 22–27). Понятие «нейтральность НТП по Солоу», которое является симметричным по отношению к понятию «нейтральность НТП по Харроду», было введено в работах американского экономиста Р.М. Солоу (Solow, 1960, 1962). Для неоклассических ПФ (1) в статье Р. Сато и М. Беккмана (Sato, Beckmann, 1968) в зависимости от инвариантности относительно НТП различных соотношений (в работе рассмотрены 15 случаев) между основными экономико-математическими характеристиками ПФ введены возможные определения нейтральности НТП и получены соответствующие им аналитические представления динамических линейно-однородных ПФ. В работе (Хацкевич, Проневич, 2020) классификация Сато–Беккмана обобщена и дополнена новыми условиями нейтральности НТП на общий случай аналитического задания динамической ПФ. Обсуждение возможности применения на практике концепций нейтральности НТП по Хиксу, Харроду и Солоу в моделях экономического роста приведено в статье (Fontejne, 2018).

Сформулируем точнее концепции нейтральности НТП по Хиксу, Харроду и Солоу:

1) если предельная норма технического замещения (труда капиталом) $MRTS_{LK}$ не изменяется с течением времени при фиксированной фондовооруженности труда, т.е.

$$MRTS_{LK} = \text{const}, K / L = \text{const}, \quad (2)$$

имеет место *нейтральный по Хиксу НТП*;

2) если предельная производительность капитала MP_K не изменяется с течением времени при фиксированной фондоотдаче, т.е.

$$MP_K = \text{const}, Y / K = \text{const}, \quad (3)$$

НТП является *нейтральным по Харроду*;

3) если предельная производительность труда MP_L не изменяется с течением времени при фиксированной производительности труда, т.е.

$$MP_L = \text{const}, Y / L = \text{const}, \quad (4)$$

НТП будет *нейтральным по Солоу*.

Общий вид агрегированных динамических ПФ, учитывающих нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП, описывают следующие утверждения.

Теорема 1. Динамическая агрегированная ПФ (1) учитывает:

1) *нейтральный по Хиксу НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде $Y = \Phi(\Psi(K, L), t)$ (Beckmann, 1974), где Φ — некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция переменных Ψ и t , а Ψ — линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция;*

2) *нейтральный по Харроду НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде $Y = \Phi(K, \Psi(L, t))$ (Morimoto, 1974), где Φ — некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция переменных K и Ψ , а Ψ — непрерывно дифференцируемая функция от переменных L и t ;*

3) *нейтральный по Солоу НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде $Y = \Phi(\Psi(K, t), L)$ (Beckmann, 1974), где Φ — некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция переменных Ψ и L , а Ψ — непрерывно дифференцируемая функция от переменных K и t .*

Когда ПФ (1) является линейно-однородной, то из теоремы 1 следует теорема 2.

Теорема 2. Линейно-однородная динамическая ПФ (1) учитывает:

1) *нейтральный по Хиксу НТП, если и только если она может быть представлена в аналитической форме $Y = A(t)\Phi(K, L)$ (см., например, работу (Sato, Beckmann, 1968));*

2) *нейтральный по Харроду НТП, если и только если она может быть представлена в аналитической форме $Y = \Phi(K, C(t)L)$ (Robinson, 1938; Uzawa, 1961);*

3) *нейтральный по Солоу НТП*, если и только если она может быть представлена в аналитической форме $Y = \Phi(B(t)K, L)$ (Sato, Veckmann, 1968), где Φ — неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция, а строго возрастающие функции A, B и C такие, что $A(0) = B(0) = C(0) = 1$ — индексы НТП.

В 1961 г. японский экономист Х. Удзава (Uzawa, 1961) поставил и решил для *линейно-однородных ПФ* задачу об аналитическом виде динамических ПФ, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП. В работе (Проневич, Хацкевич, 2020) результаты Удзавы были распространены на *однородные ПФ произвольной степени* и полностью решена задача Удзавы — выделены общие классы динамических агрегированных ПФ, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП. Основной результат данной работы выражает следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы динамическая агрегированная ПФ (1) одновременно учитывала нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП, необходимо и достаточно, чтобы она была представлена или в форме Кобба–Дугласа–Тинбергена*

$$F_1(K, L, t) = A(t) K^\alpha L^\beta \quad (5)$$

или в аналитической форме

$$F_2(K, L, t) = (aK^{1-\gamma} + bL^{1-\gamma} + A(t))^{1/(1-\gamma)}, \quad (6)$$

где числа $\alpha, \beta, \gamma, a, b \in R$, $\gamma \neq 1$, а функция A зависит только от параметра НТП t .

Из теоремы 3 при $A(t) = ce^{\delta t}$, где $c > 0$, а δ — постоянный темп прироста индекса НТП, получаем конкретные аналитические формы динамических ПФ

$$F_3(K, L, t) = AK^\alpha L^\beta e^{\delta t}, \quad F_4(K, L, t) = (aK^{1-\gamma} + bL^{1-\gamma} + Ae^{\delta t})^{1/(1-\gamma)}$$

для моделирования производственных процессов, учитывающих нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП на основе статистических данных эконометрическими методами.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Основываясь на понятиях (Клейнер, 1986, с. 48–49) предельной нормы технического замещения (труда капиталом), предельных производительностей капитала и труда, на основании определений нейтральности НТП по Хиксу (2), по Харроду (3) и по Солоу (4), получаем, что динамическая ПФ (1) одновременно учитывает НТП, нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу тогда и только тогда, когда существуют непрерывно дифференцируемые функции h_1, h_2, h_3 такие, что имеют место дифференциальные тождества

$$\frac{\partial_L F(K, L, t)}{\partial_K F(K, L, t)} = h_1\left(\frac{K}{L}\right), \quad \partial_K F(K, L, t) = h_2\left(\frac{F}{K}\right), \quad \partial_L F(K, L, t) = h_3\left(\frac{F}{L}\right), \quad (7)$$

где через ∂_K и ∂_L обозначены частные производные первого порядка по переменным K и L соответственно.

Необходимость. Из системы дифференциальных тождеств (7) следует, что функции h_1, h_2, h_3 связаны функциональным уравнением

$$h_3(\zeta) = h_1(\zeta/\xi)h_2(\xi), \quad (8)$$

где введены переменные $\zeta = F/K$, $\xi = F/L$.

Уравнение (8) — это обобщенное уравнение Коши относительно трех неизвестных функций, которое имеет единственное решение (Pexider, 1903; Castillo et al., 1999, p. 89–90)

$$h_1\left(\frac{\zeta}{\xi}\right) = C_1 \left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^\gamma, \quad h_2(\xi) = C_2 \xi^\gamma, \quad h_3(\xi) = C_3 \xi^\gamma, \quad (9)$$

где C_1, C_2 и $C_3 = C_1 C_2$ — произвольные вещественные числа, $\gamma \in R$.

Решим систему квазилинейных уравнений в частных производных (7) при условии (9), используя подход последовательного интегрирования квазилинейных дифференциальных уравнений (Камке, 1966, с. 75–76) методом характеристик (Зайцев, Полянин, 2003, с. 229).

1. Случай $\gamma = 1$. При $h_1(K/L) = C_1(K/L)$ из первого уравнения $C_1 K \partial_K F - L \partial_L F = 0$ системы уравнений в частных производных (7) находим функционально-независимые первые интегралы

$KL^{C_1} = \tilde{C}_1$ и $t = \tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — произвольные вещественные постоянные) характеристической системы $\frac{dK}{C_1 K} = \frac{dL}{-L} = \frac{dt}{0}$ и строим его общее решение $F(K, L, t) = \Phi(KL^{C_1}, t)$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя полученную функцию F во второе уравнение системы в частных производных (7) при $h_2(F/K) = C_2(F/K)$, для определения функции Φ получаем дифференциальное уравнение $\partial_u \Phi(u, t) = C_2 \Phi(u, t)/u$, где $u = KL^{C_1}$, с общим решением $\Phi(u, t) = A(t)u^{C_2}$. А значит, функция F примет вид $F(K, L, t) = A(t)K^{C_2}L^{C_1 C_2}$.

Подставляя функцию F в третье уравнение системы в частных производных (7) при $h_3(F/L) = C_3(F/L)$ получаем верное тождество. Следовательно, функция (5) является решением системы (7) при условиях (9) и $\gamma = 1$, где $\alpha = C_2$, $\beta = C_1 C_2$, а A — произвольная функция, зависящая только от параметра НТП.

2. Случай $\gamma \neq 1$. При $h_1(K/L) = C_1(K/L)^\gamma$ из первого уравнения $C_1 K^\gamma \partial_K F - L^\gamma \partial_L F = 0$ системы (7) находим функционально-независимые первые интегралы $K^{1-\gamma} + C_1 L^{1-\gamma} = \tilde{C}_1$ и $t = \tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — произвольные вещественные постоянные) характеристической системы $\frac{dK}{C_1 K^\gamma} = \frac{dL}{-L^\gamma} = \frac{dt}{0}$ и строим его общее решение $F(K, L, t) = \Phi(K^{1-\gamma} + C_1 L^{1-\gamma}, t)$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя полученную функцию F во второе уравнение системы (7) при $h_2(F/K) = C_2(F/K)^\gamma$, для определения функции Φ запишем дифференциальное уравнение $\partial_u \Phi(u, t) = (C_2/(1-\gamma))\Phi^\gamma(u, t)$, которое имеет общее решение $\Phi(u, t) = (C_2 u + A(t))^{1/(1-\gamma)}$, где $u = K^{1-\gamma} + C_1 L^{1-\gamma}$, A — произвольная функция, зависящая только от параметра НТП. А значит, функция F примет вид $F(K, L, t) = (C_2 K^{1-\gamma} + C_1 C_2 L^{1-\gamma} + A(t))^{1/(1-\gamma)}$.

Подставляя функцию F в третье уравнение системы (7) при $h_3(F/L) = C_3(F/L)^\gamma$, получаем верное тождество. Таким образом, функция (6) является общим решением системы квазилинейных уравнений (7) при условиях (9) и $\gamma \neq 1$, где $a = C_1$, $b = C_1 C_2$, A — произвольная функция, зависящая только от параметра НТП.

Достаточность. Пусть динамическая ПФ (1) представима в аналитической форме (5) или в форме (6). Тогда, вычисляя частные производные от функций F_1 и F_2 по факторам производства K и L , получаем:

1) $MRTS_{LK}(F_1) = \beta K / \alpha L$, $MP_K(F_1) = \alpha F / K$, $MP_L(F_1) = \beta F / L$, т.е. имеют место тождества (7) при $h_1(\xi) = \beta \xi / \alpha$, $h_2(\zeta) = \alpha \zeta$ и $h_3(\rho) = \beta \rho$, а значит, ПФ (5) учитывает НТП, одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу;

2) $MRTS_{LK}(F_2) = (b/a)(K/L)^\gamma$, $MP_K(F_2) = a(F/K)^\gamma$, $MP_L(F_2) = b(F/L)^\gamma$, т.е. имеют место тождества (7) при $h_1(\xi) = b\xi^\gamma / a$, $h_2(\zeta) = a\zeta^\gamma$ и $h_3(\rho) = b\rho^\gamma$, а значит, ПФ (6) учитывает НТП, одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Дадаян В.С. (1973). Моделирование народно-хозяйственных процессов. Под ред. В.С. Дадаяна. М.: Экономика. [Dadajan V.S. (1973). *Modeling of national economic processes*. V.S. Dadajan (ed.). Moscow: Ekonomika (in Russian).]
- Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. (2003). Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: ФИЗМАТЛИТ. [Zaitsev V.F., Polyaniin A.D. (2003). *Handbook of first-order partial differential equations*. Moscow: FIZMATLIT (in Russian).]
- Камке Э. (1966). Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука. [Kamke E. (1966). *Handbook of first-order partial differential equations*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Клейнер Г.Б. (1986). Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика. [Kleyner G.B. (1986). *Production functions: Theory, methods, application*. Moscow: Finansy i statistika (in Russian).]
- Курзев В., Матвеев В. (2018). Экономический рост. СПб.: Питер. [Kurzenev V., Matveenko V. (2018). *Economic growth*. Saint-Petersburg: Piter (in Russian).]

- Проневич А.Ф.** (2020). Продуктоувеличивающий научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу // *Вестник ЦЭМИ РАН*. № 3. С. 4–27. [**Pranevich A.F.** (2020). Product-augmenting technological progress and neutrality by Hicks. *Vestnik CEMI*, 3, 4–27 (in Russian).]
- Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.** (2020). Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение // *Белорусский экономический журнал*. № 3. С. 87–105. [**Pranevich A.F., Khatskevich G.A.** (2020). Technological progress and neutrality by Hicks, Harrod, and Solow: genesis, construction, and generalizations. *Belarusian Economic Journal*, 3, 87–105 (in Russian).]
- Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф.** (2020). Классификация Сато–Беккмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение // *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. № 2. С. 4–17. [**Khatskevich G.A., Pranevich A.F.** (2020). Sato–Beckmann classification of accounting for technological progress: Genesis, generalisation, and extension. *Journal of the Belarusian State University. Economics*, 2, 4–17 (in Russian).]
- Beckmann M.J.** (1974). Invariant relationships for homothetic production functions. *Production theory: Proceedings of an International seminar held at the university of Karlsruhe, May–July 1973. Lecture notes in Economics and mathematical systems: mathematical economics*. M.J. Beckmann, H.P. Kunzi (eds.). Berlin: Springer-Verlag, 99, 3–20.
- Castillo E., Cobo A., Gutiérrez J.M., Pruneda R.E.** (1999). *Functional networks with applications*. New York: Springer.
- Fontejne M.R. de la** (2018). Why the concept of Hicks, Harrod, Solow neutral and even non-neutral augmented technical progress is flawed in principle in any economic model. *MPRA Paper 107730*. University Library of Munich, Germany.
- Harrod R.F.** (1937). Review of Joan Robinson's "Essays in the theory of employment". *Economic Journal*, 47 (June), 326–330.
- Harrod R.F.** (1948). *Towards a dynamic economics*. London: Macmillan.
- Hicks J.R.** (1932). *The theory of wages*. London: Macmillan.
- Morimoto Y.** (1974). Neutral technical progress and the separability of the production function. *The Economic Studies Quarterly*, 25 (3), 66–69.
- Pexider H.W.** (1903). Hotiz über functional theorem. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 14 (1), 293–301.
- Robinson J.** (1937). *Essays in the theory of employment*. London: Macmillan.
- Robinson J.** (1938). The classification of inventions. *The Review of Economic Studies*, 5 (2), 139–142.
- Sato R., Beckmann M.J.** (1968). Neutral inventions and production functions. *The Review of Economic Studies*, 35 (1), 57–67.
- Solow R.M.** (1960). Investment and technical progress. *Mathematical methods in the social sciences: proceedings of the first Stanford Symposium, Stanford, Stanford University, 1959*. K.J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes (eds.). Stanford: Stanford University Press, 89–104.
- Solow R.M.** (1962). Technical progress, capital formation, and economic growth. *The American Economic Review*, 52 (2), 76–86.
- Stiglitz J.E., Uzawa H.** (1969). *Readings in the modern theory of economic growth*. Cambridge: MIT Press.
- Uzawa H.** (1961). Neutral inventions and the stability of growth equilibrium. *The Review of Economic Studies*, 28 (2), 117–124.

About production functions that take into account simultaneously Hicks-, Harrod- and Solow-neutral technological progress

© 2023 A.F. Pranevich

A.F. Pranevich,

Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus; e-mail: pranevich@grsu.by

Received 04.08.2022

Abstract. This article is devoted to the issues of accounting for technological progress in the analytical forms of dynamic aggregated production functions. We considered three concepts of the neutrality of economic indicators considering technological progress: constancy of marginal rate of technical substitution (Hicks-neutral technological progress), marginal product of capital (Harrod-neutral technological progress) and marginal product of labor (Solow-neutral technological progress). Analytical forms of dynamic aggregated production functions that take into account Hicks-neutral technological progress (Harrod-neutral technological progress, Solow-neutral technological progress) are indicated. The publication continues the author's research. The H. Uzawa problem on the analytical forms of dynamic aggregated production functions that takes into account simultaneously Hicks-, Harrod- and Solow-neutral technological progress is solved. All classes of aggregated dynamic production functions that take into account simultaneously Hicks, Harrod and Solow neutral technological progress are described. The results can be used to the modeling of production functions taking into account the Hicks-, Harrod- and Solow-neutral technological progress.

Keywords: technological progress, production function, Hicks neutrality, Harrod neutrality, Solow neutrality.

JEL Classification: C65, O30.

For reference: **Pranevich A.F.** (2023). About production functions that take into account simultaneously Hicks-, Harrod- and Solow-neutral technological progress. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 16–21. DOI: 10.31857/S042473880021360-5