ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2023, том 59, № 2, с. 26–38

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Оптимизация структурной динамики экономики в рамках методологии «затраты–выпуск»

Е.Л. Торопцев,
Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь; e-mail: eltoroptsev@yandex.ru

М.М. Кандохова,
Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик; e-mail: mrkand@mail.ru

Н.Г. Гудиева
Научно-образовательный математический центр «Северо-Кавказский центр математических исследований», Ставрополь; e-mail; gudieva82@bk.ru

Поступила в редакцию 28.12.2022

Аннотация. Модель динамического межотраслевого баланса в виде системы дифференциальных уравнений, оцифрованная в соответствии с уже опубликованной авторской методикой, позволяет ставить и решать широкий круг задач структурной статической устойчивости экономических систем. Оптимизация структурной динамики может быть выполнена при включении в вектор варьируемых параметров любых, а в пределе — всех элементов модели. В настоящей работе для этого выбраны межотраслевые инерционности и предложен метод, который на шаге поиска использует вектор параметров произвольной (допускаемой самой моделью) длины. Это отличает предлагаемый метод от существующих, делая его уникальным. Указанная уникальность заключается в снятии так называемого «проклятия размерности», присущего классическим задачам оптимизации (численного поиска) с применением методов от покоординатного спуска до богатых инструментов ньютоновского типа. В этом смысле метод является конкурентом оптимизации на основе машинного обучения искусственных нейронных сетей. При этом не важно, как именно формализована задача: в ней должны быть выделены целевые показатели и вектор варьируемых параметров. Можно поставить и решить массу оптимизационных задач, изменяя содержание вектора варьируемых параметров по соответствующему плану вычислительного эксперимента. В работе же представлен только один пример и один шаг оптимизации. Ограничивающим и функциональным условием работы метода является сохранение линейной зависимости между желаемыми приращениями вещественных частей собственных значений матрицы состояния модели и их чувствительностей к параметрам управления. Такие «малые» шаги оптимизации представляют собой самостоятельные задачи, численное решение которых можно повторять.

Ключевые слова: динамический межотраслевой баланс, оцифровка, оптимизация, чувствительности, сингулярное разложение матрицы.

Классификация JEL: B41, C02, C61, C68.

Для цитирования: **Торопцев Е.Л., Кандохова М.М., Гудиева Н.Г.** (2023). Оптимизация структурной динамики экономики в рамках методологии «затраты–выпуск» // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 26–38. DOI: 10.31857/S042473880025859-3

1. МОДЕЛЬНЫЙ БАЗИС ИССЛЕДОВАНИЯ

Неудовлетворительные структурные (собственные, внутренние) динамические свойства (СДС) являют собой источник системных проблем экономического развития и роста в любой экономике (Дужински, Торопцев, Мараховский, 2017). Указанная «системность проблем» говорит об их многоплановости, объединяющей и материально-техническую базу, и кадровый потенциал (Гринберг, 2015). Сюда же примыкают многочисленные недофинансирования, связанные как с пресловутой «ограниченностью финансовых ресурсов», так и с масштабной коррупцией, которая является компонентой общей современной эрозии человеческого капитала (Гринберг, Рубинштейн, 2008). В этих условиях процессы модернизации, реструктуризации, перехода к новому технологическому укладу и т.п. рискуют иметь черепашьи темпы, и это — в лучшем случае (Глазьев, 2016). Запрос на такие высокие (требуемые, желаемые) показатели СДС, как степень экономического роста, наблюдаемость составляющих движения, управляемость ими, их возбуждаемость в отраслях и иные характеристики, представляется существующим, но неосознанным со стороны рядовых членов общества и естественным, первоочередным — для лиц, принимающих экономические и политические решения (Широв, Янтовский, 2017).

В конце концов, высокие характеристики экономической динамики важны не «для галочки» (Светуньков, Абдуллаев, 2009), а как факторы достижения страной лидирующих позиций в мире по всем измеряемым координатам: от обороноспособности до привлекательности для проживания и экономической активности в любых регионах.

Показатели СДС вычислимы, а их носителем является динамическая модель межотраслевого баланса (МОБ), формализованная в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$X(t) = \hat{B}\, dX(t)/dt + AX(t) + Y(t), \quad X(0) = X_0, \tag{1}$$

содержащей традиционные обозначения, введенные еще В. Леонтьевым, например из (Леонтьев, 1990, с. 68), где A — матрица коэффициентов прямых материальных затрат; $Y(t)$ — вектор конечного спроса (потребления); $X(t)$ — вектор валовых выпусков по видам экономической деятельности (ВЭД), а вектор $\hat{B}\, dX(t)/dt$ характеризует динамику накопления/сокращения всех видов «капитала» в разрезе ВЭД. Матрица $\hat{B}$ с традиционным названием «матрица коэффициентов приростных фондоемкостей» у нас изменилась на «матрицу межотраслевых инерционностей» (о чем — ниже). Здесь следует заметить, что все коэффициенты модели не могут быть безразмерными — это очевидно из уравнения (1), когда его проверка по размерностям коэффициентов и переменных заканчивается неудачей. Такие модели невозможны нигде. В (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б) мы показали, что элементы матрицы B из модели (1) представляют собой межотраслевые инерционности формирования основного капитала в экономике и имеют размерность времени. Эта матрица имеет нулевые элементы, но вырожденной не бывает никогда, если инвестиции следуют во все виды экономической деятельности (ВЭД): связанные звенья экономики инерционны, режимы функционирования отраслей не меняются внезапно, скачком, т.е. все переменные интегрируемы, алгебраических уравнений модель не содержит — все они дифференциальные. В наших работах (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б) решена и проблема оцифровки модели (1). А если линейно связать валовое производство и конечный спрос соотношением $Y(t) = LX(t)$, где L — матрица, элементы которой определяются нормами потребления и трудоемкости, то модель (1) замыкается по потреблению[1]. Тогда нормальная форма Коши имеет вид:

$$dX(t)/dt = GX(t), \quad G = \hat{B}^{-1}(E - A - L), \quad X(0) = X_0, \tag{2}$$

где E — единичная матрица.

Модель (1) представляет динамический МОБ, записанный по строкам соответствующей таблицы, когда акселератором формализован инвестиционный блок. Можно записать уравнения и по столбцам таблицы баланса, как это делают при получении ценовой модели, представив акселератором блок формирования добавленной стоимости:

$$X(t) = A^{\mathrm{T}} X(t) + B\, dX(t)/dt, \quad X(0) = X_0, \tag{3}$$

где B — невырожденная матрица межотраслевых инерционностей формирования добавленной стоимости; Т — символ транспонирования. Следующая формула сообщает форму Коши для модели (3):

$$dX(t)/dt = GX(t), \quad G = B^{-1}(E - A^{\mathrm{T}}), \quad X(0) = X_0. \tag{4}$$

Вектор валового производства $X(t)$ в разрезе отраслей ВЭД представлен в (1) и (3), однако его элементы в (1) отличны от соответствующих им элементов в (3) (различия составляют от долей до примерно десятка процентов). Это видно, например, из данных «Таблиц формирования выпуска товаров и услуг», содержащихся в доступных для скачивания статистических сборниках «Национальные счета России в ... годах», где на месте многоточия указывается временной интервал в годах[2]. Указанное выше дает основание для различения произведенного ($X_{prod}(t)$ в модели (1))

---

[1] Технология последовательных согласованных вычислений такой матрицы представлена нами в статье по ссылке в (Дужински, Торопцев, Мараховский, 2018).

[2] https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13221

и использованного ($X_{used}(t)$ в модели (3)) выпуска. Здесь ничего нового: аналогично различают произведенный и использованный ВВП.

Отсылка рассматриваемой модели Леонтьева в семейство «чисто теоретических конструкций» (Суворов, Трещина, Белецкий, 2017) была обусловлена тотальным отсутствием матриц инерционностей из (1) и (3), т.е. невозможностью оцифровки моделей. В противном случае они имели бы хождение в практике межотраслевого анализа. Преодолеть эту ситуацию позволяет обоснованная в (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б) идея введения в обе модели так называемой базовой матрицы *BM* (basic matrix). По сути *BM* является матрицей коэффициентов формирования выпуска товаров и услуг и очевидным образом вычисляется из упомянутой выше одноименной таблицы «затраты–выпуск» далее представлены матрицами. *BM* обладает тем свойством, что вектор выпуска *X* является ее собственным вектором, которому соответствует единичное собственное значение, т.е. выполняется равенство $BM \times X = X$. Присутствие *BM* вместо единичной матрицы *E* в формулах (2) и (4) исключает появление отрицательных b_{ij}, а это могло бы обеспечить обсуждаемым моделям экономический смысл, вычислимость и, соответственно, ведущие роли в задачах анализа и оптимизации структурной макроэкономической динамики (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б).

Преодолеть эту ситуацию позволяют идеи, высказанные в (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б), а также матричные преобразования того же направления, но уже на основе данных симметричной таблицы «затраты–выпуск» и коэффициентов полных затрат. Этот вопрос не является предметом данной статьи, поэтому его рассмотрение здесь опустим, считая модель оцифрованной, т.е. вычислимой.

И последнее во вступительной части. Разработка и применение методов оптимизации в экономике имеют давнюю историю. Многочисленные усилия науки в этом направлении во многом объединяет дисциплина «Исследование операций в экономике». Примером здесь может быть научная монография (Хемди, 2005). Можно начать с фундаментальной работы (Смирнов, Крылов, Канторович, 1933) и перейти от нее к (Канторович, 2011). Исследование Канторовича (Канторович, 2011) объединяет работы автора, посвященные оптимизационным задачам и проблемам экономики.

Большой пласт составляют задачи оптимизации на основе метода множителей Лагранжа и его многочисленных модификаций. Здесь сохраняет актуальность классика, представленная монографией (Bertsekas, 1982), переведенной на русский язык в 1987 г. (Бертсекас, 1987), и библиографией, приведенной в ней. Развивают данное направление идеи, изложенные в (Mohajan, 2012; Mohajan, Islam, Moolio, 2013; Mohajan, 2017), принадлежащие одному автору и представляющие результаты комплексирования методов теории множителей Лагранжа и мультипликативных производственных функций. Хорошо представить себе методы оптимизации ньютоновского типа можно с помощью монографии (Dennis, Schnabel, 1983), также переведенной на русский язык в 1988 г. (Деннис, Шнабель, 1988). Частные вопросы поиска оптимальных решений и учета ограничений решаются в работах типа (Касимов, Богатырев, 2009), выход на программные реализации оптимизационных процедур легко находятся при обращении к вычислительным математическом средам MathCAD и MATLAB. Отдельно можно использовать программные модули алгоритма Левенберга–Марквардта на языке Python (Madsen, Nielsen, Tingleff, 2004; Brunet, 2011).

Наша оптимизация выполняется в рамках методологии «затраты–выпуск» и на основе динамических моделей МОБ (1) и (3). Проблемы межотраслевого анализа оставались актуальными в экономической науке большую часть XX в., сохранив актуальность и в веке текущем (Колемаев, 2005; Zhang, Chen, 2008; Chen, Guo, Yang, 2004). Повышение интереса к данной тематике обусловило и возобновление разработки «Росстатом» базовых таблиц «затраты–выпуск» российской экономики, начиная с 2011 г. При этом основная масса публикаций обеспечивается усилиями академических структур (ИНП РАН (Баранов, 2017; Ксенофонтов и др., 2018), ЦЭМИ РАН (Андрукович, 2020; Клейнер, 2020; Зарук, Галкин, Светлов, 2019), ИЭОПП СО РАН (Баранов, Широв, 2020; Баранов, Квактун, 2020; Крюков и др., 2020)), ведущими вузами (Миролюбова, Карлина, Николаев, 2020; Доценко, 2019; Петрикова, 2011) и международной группой ИНФОРУМ под руководством Клоппера Алмона (Алмон, 2021; Almon, Grassini, 2010). Ряд материалов обобщающего характера представлен в научном докладе В.В. Ивантера на Международной конференции «Прогнозирование экономического роста» (Ивантер, 2017), проведенной ИНП РАН в 2017 г. в связи с 80-летним юбилеем акад. Ю.В. Яременко. Пример постановки оптимизационной задачи в равновесном моделировании содержится в работе (Ашимов, Айсакова, Алшанов, 2014). Пример анализа динамизма изменения выпусков и экспортно-импортного сальдо можно видеть в (Баранов, Елсакова, Корнева, 2015). Данное сальдо отражает результативность внешнеэкономических связей, взаимодействия которых со структурными трансформациями и инвестиционными процессами исследуют авторы (Суворов, Трещина, Белецкий, 2017).

2. ОПИСАНИЕ КРИТЕРИЯ И МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ

Первая сложность, сопровождающая постановку задач оптимизации, заключается в определении критерия качества решения таких задач. Невозможно представить, что макроэкономику, объективную реальность экономической жизни можно снабдить единым критерием оптимизации и оптимальности, который согласует все интересы. Вторая сложность, являющая особенность нашей задачи, состоит в определении метода оптимизации (численного поиска) в условиях огромного числа варьируемых параметров. Теоретически любые (возможно, и все сразу) элементы матриц и векторов наших моделей могут составить вектор варьируемых параметров. Вариации отображают результаты воздействия на экономику инвестиционных процессов, прогресса технологий и прочих слагаемых смены технологических укладов (по С. Ю. Глазьеву) (Глазьев, 2012; Кондратьев, Яковец, Абалкин, 2002).

В нашем случае наиболее естественным является критерий качества структуры экономики, формируемый на основе спектра собственных значений матрицы состояния G. Цель оптимизации может заключаться в том, чтобы структурные динамические свойства обеспечивали устойчивый и сбалансированный экономический рост, который также называется магистральным. Возможны иные критерии, но тоже на основе алгебраического подхода. Например, при работе с моделью (1) в качестве критерия оптимальности можно, подобно (Позамантир, 2014), выбрать показатель «*полезность*», который будет равен суммарному откорректированному конечному потреблению. Последнее получается, если элементы конечного потребления умножаются на корректирующие коэффициенты — отношения общественной полезности продукта к его рыночной цене. Но такие коэффициенты предстоит еще как-то получить, желательно единственным, обоснованным, понятным способом. В нашем же случае, так или иначе, оптимальность связана с заданным или желаемым расположением на комплексной плоскости собственных значений матрицы G, которая определяется производственными затратами, инерционностями, конечным спросом и разностью между выпуском товаров и услуг и промежуточным потреблением (валовой добавленной стоимостью, ВДС). Сказанное означает, что если выполненный шаг оптимизации приводит к улучшению асимптотики переходного процесса в смысле роста производства, то мы на правильном пути — присутствует оптимальность.

В условиях неприемлемо длинного (для стандартных методов оптимизации типа покоординатного или градиентного спуска, ньютоновских методов, а также процедур, основанных на методе наименьших квадратов (МНК) и его вариантов или на построении линейно-квадратичного регулятора (Крутько, Максимов, Скворцов, 1988)) вектора варьируемых параметров следует, по-видимому, ограничиться рассмотрением варианта процесса оптимизации СДС при малых приращениях варьируемых параметров, сохраняющих линейную связь вида

$$S\Delta z = \Delta\alpha, \tag{5}$$

где S — матрица чувствительностей с элементами $\partial\alpha_i / \partial z_j$; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Следует сделать здесь оговорку о том, что в работе не рассматриваются варианты оптимизации на основе искусственных нейронных сетей, алгоритмов машинного обучения — это следующий и относительно самостоятельный этап наших исследований.

Матрица S является составляющей из группы показателей СДС экономики в том смысле, что чувствительности, наряду с наблюдаемостями, управляемостями и т. п., есть вычислимые компоненты СДС. Здесь m — длина вектора варьируемых параметров z; Δz — вектор приращений этих параметров; α_i — вещественные части собственных значений матрицы состояния модели, в общем случае — это $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\omega_i$ $j = \sqrt{-1}$. Пусть α_i^* — их текущие значения, тогда $\alpha_i = \alpha_i^* + \Delta\alpha_i$ — желаемые значения после оптимизации. Сама оптимизация выполняется за один шаг сразу по всем параметрам. Этими параметрами могут быть либо назначенные, либо все элементы массивов исследуемой модели. Итераций в предлагаемом методе как таковых нет. Они могут выполняться только для установления таких желаемых сдвигов вещественных частей спектра собственных чисел, которые сохраняют линейность связей (5). Формула (5) возникает как часть ряда Тейлора при удержании в ней слагаемого с первыми производными.

Даже интуитивно ясно, что вопросы управляемости СДС связаны с их чувствительностью к параметрам модели. Эти параметры включаются в вектор z. Нам сейчас важны функции чувствительности α_i от z_j. Учитывая, что матрица состояния G может изначально приниматься как диагональной, так и содержать клетки Жордана для описания циклов деловой активности (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б), будем относиться к ней как к матрице общего вида. Описывать возможные варианты формирования G, как и сам процесс оцифровки модели, мы здесь не станем — статья имеет иное назначение. В таком рассмотрении линейная алгебра сообщает нам следующие связи для правых и левых собственных векторов U_i и V_i матрицы G соответственно (Уилкинсон, 1970):

$$GU_i = \lambda_i U_i; \quad G^{\mathrm{T}} V_i = \lambda_i V_i, \text{ или } V_i^T G = \lambda_i V_i^T. \tag{6}$$

Дифференцирование первого уравнения из (6) дает

$$\frac{\partial G}{\partial z_j} U_i + G\frac{\partial U_i}{\partial z_j} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} U_i + \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial z_j}. \tag{7}$$

Умножение (7) справа на V_i^T, перенос второго слагаемого правой части в левую и очевидная группировка приводят к уравнению

$$V_i^T \frac{\partial G}{\partial z_j} U_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} V_i^{\mathrm{T}} U_i + \left(\lambda_i V_i^{\mathrm{T}} - V_i^{\mathrm{T}} G\right)\frac{\partial U_i}{\partial z_j}. \tag{8}$$

Так как второе слагаемое правой части (8), с учетом третьего равенства из (6), равно нулю, то для вычисления чувствительностей получим:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} = \left(V_i^T \frac{\partial G}{\partial z_j} U_i\right) / V_i^T U_i, \quad \frac{\partial G}{\partial z_j} \approx \frac{G\left(z_j + \Delta z_j\right) - G\left(z_j\right)}{\Delta z_j}. \tag{9}$$

Для формирования матрицы чувствительностей $S = \{\partial \alpha_i / \partial z_j\}$ размерности $(n \times m)$ надо взять действительные части от (9), ведь именно расположением вещественных частей корней характеристического уравнения на комплексной плоскости определяется асимптотика структурной динамики экономики. Таким образом, матрица S из (5) вычислима, а мы имеем возможность построить процедуру оптимизации СДС на основе формулы (5).

После определения линейного прогноза собственных значений в соответствии с $\alpha_i = \alpha_i^* + \Delta\alpha_i$ мы можем вычислить новую (оптимизированную) матрицу инерционностей B, отвечающую новым значениям параметров управления из вектора z. Техника таких вычислений изложена нами в (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б). Следует заметить, что при решении уравнений прогноза (5) в самых разных прикладных задачах чаще всего возникают ситуации, когда $m > n$ и $n > m$ и матрица S является прямоугольной. Численное решение недоопределенной и переопределенной систем может быть найдено с минимальной нормой, для чего давно и успешно используется сингулярное разложение (процедура SVD с одноименным программным модулем из вычислительных математических сред). Важно, что сингулярное разложение выполняется на основе преобразований, характеризуемых в алгебре тремя определениями: элементарные, устойчивые, ортогональные. Их уникальность состоит в том, что компьютерные реализации не накапливают вычислительных погрешностей. Исторически первое отечественное детальное описание процедуры SVD можно видеть в (Воеводина, 1968). Для широкого круга специалистов надежность и фундаментальность SVD доказана в (Уилкинсон, 1970), а также подтверждена еще в 1970-е годы работами по Национальной программе тестирования математического обеспечения США и такими грандами прикладной математики в целом и линейной алгебры в частности, как Р. Беллман, Д.Х. Голуб, У.М. Кахан, Р. Лоусон Воот, С. Райнш, Х. Рутисхаузер, И. Стюарт, Ш.М. Хенсон, Д.М. Френсис, В.Н. Кублановская, Д.К. Фаддеев, Ф.Р. Гантмахер и др.

Решение с минимальной нормой обеспечивает в уравнении (5) минимальную невязку $r = S\Delta z - \Delta\alpha$, т.е. $(r, r) \to \min$ с точки зрения МНК. Часто данная невязка вообще нулевая. Требование минимума нормы решения всегда присутствует в нашем случае еще и потому, что с уменьшением длины вектора Δz растет точность модели линейного приближения (5). Дальнейшее уменьшение длины Δz для поддержания линейности связи (5) возможно ценой некоторого роста невязки r. Заметим, что матрица S в общем случае имеет как указанную размерность, так и ранг k — в качестве еще одной характеристики. Тогда для рассмотрения предлагаются следующие случаи:

$$\begin{gathered} 1)\ k = n = m; \quad 2)\ k < n = m; \quad 3)\ k = m < n; \\ 4)\ k < m < n; \quad 5)\ k = n < m; \quad 6)\ k < n < m. \end{gathered} \tag{10}$$

Сингулярное разложение матрицы S имеет канонический вид (Голуб, Лоун, 1999):

$$S = U \Sigma V^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

где U и V — унитарные в общем случае матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(m \times m)$ соответственно, содержащие левые и правые сингулярные векторы S; $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ размерности $(n \times m)$, где на диагонали расположены сингулярные числа S, равные неотрицательным квадратным корням собственных значений матрицы $S^{\mathrm{T}}S$. Вычисленные сингулярные числа σ_j представляются упорядоченными в порядке убывания в одномерном массиве для $1 \le j \le k$, а для $k < j \le \min(n,m)$ σ_j равны нулю. Здесь мы должны опереться на достижения алгебры, чтобы не отсылать читателя к первоисточникам.

С учетом разложения (11) вектор невязки определяется следующим уравнением:

$$r = S\Delta z - \Delta\alpha = \left(U\Sigma V^{\mathrm{T}}\right)\Delta z - \Delta\alpha. \tag{12}$$

Для дальнейшего изложения введем обозначения:

$$\overline{\Delta z} = V^{\mathrm{T}}\Delta z; \quad \overline{r} = U^{\mathrm{T}}r; \quad \overline{\Delta\alpha} = U^{\mathrm{T}}\Delta\alpha. \tag{13}$$

С учетом обозначений (13) уравнение (12) принимает вид:

$$\overline{r} = \Sigma\overline{\Delta z} - \overline{\Delta\alpha}. \tag{14}$$

Линейная алгебра доставляет нам сведения о таких характеристиках векторов, как их длины и углы между ними. Умножение ортогональных матриц на эти векторы указанных характеристик не меняет. Поэтому для нижеследующих скалярных произведений имеем:

$$\left(\overline{r},\overline{r}\right) = \left(r,r\right); \quad \left(\overline{\Delta\alpha},\overline{\Delta\alpha}\right) = \left(\Delta\alpha,\Delta\alpha\right); \quad \left(\overline{\Delta z},\overline{\Delta z}\right) = \left(z,z\right). \tag{15}$$

Зная структуру матрицы Σ, распишем результаты ее участия в (14) для различных k, n, m:

$$\overline{r_j} = \sigma_j\overline{\Delta z_j} - \overline{\Delta\alpha_j}, \quad 1 \le j \le k; \tag{16}$$

$$\overline{r_j} = 0 \times \overline{\Delta z_j} - \overline{\Delta\alpha_j}, \quad k \le j \le \min\left(n,m\right); \tag{17}$$

$$\overline{r_j} = -\overline{\Delta\alpha_j}; \quad \min\left(n,m\right) \le j \le n. \tag{18}$$

Анализ случая 1) из (10) позволяет убедиться в том, что решение определяется из уравнений (16), а вот группы уравнений (17) и (18) в данном случае отсутствуют. Для проверки можно воспользоваться непосредственной подстановкой. Невязки здесь точно будут нулевыми, а приращения варьируемых параметров находятся очевидным образом:

$$\overline{\Delta z_j} = \overline{\Delta\alpha_j} / \sigma_j, \quad j = 1,\ldots,k; \quad \Delta z = V\overline{\Delta z}. \tag{19}$$

Решение (18) соответствует обычному решению невырожденной системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей.

Для случая 3) из формулы (10) задача определения Δz также имеет единственное решение. Только здесь реализация идеи МНК требует участия уравнений (16) и (18). Последнее очевидным образом приводит к ненулевому вектору невязок, однако подавляющее число вариантов оптимизации очевидно ограничивается случаем 5) из формулы (10) с участием (16). Случаи 2), 4) и 6) из формулы (10) с маленьким рангом при поиске решения требуют использования групп уравнений (16) и (17). Однако в этих случаях решение может быть неоднозначным, потому что при рангах меньших m или n для известной части компонент $\overline{\Delta z_j}$ из уравнений (17) устанавливается произвол выбора значений, и это не влияет на величины невязок. С точки зрения МНК и минимизации нормы решения эти составляющие для уравнений (17) должны приниматься нулевыми. Можно заметить дополнительно, что в случаях 5) и 6) из формулы (10) неоднозначность решения возникает при $n < j \le m$. Значения $\overline{\Delta z_j}$ при выполнении последнего неравенства также не влияют на величины невязок и должны приниматься равными нулю.

Формула (19) предусматривает деление на сингулярные числа. Чем меньше их величина, тем больше результат деления $\overline{\Delta z_j}$. Наконец, величины σ_j могут войти в конфликт с требованием к точности расчета. Это произойдет тогда, когда величины σ_j и статистические ошибки исходных данных станут достаточно близки. Если вычисленные с большой долей шума составляющие решения $\overline{\Delta z_j}$ и Δz_j будут использоваться при его формировании, то можно получить эффект развала решения — настолько сильно зашумлены его компоненты.

Численный анализ такой задачи предполагает ее декомпозицию, нацеленную на исключение составляющих движения, отвечающих малым σ_j. Для этого необходимо установить границу τ. Обычно это некоторая малая величина, ориентирующаяся на точность данных используемой статистики (Форсайт, Малькольм, Моулер, 1980). Сопоставление данной границы со значениями σ_j позволяет обнулить зашумленные составляющие решения $\overline{\Delta z_j}$ по правилу:

– если $\sigma_j \ge \tau$, то $\overline{\Delta z_j} = \overline{\Delta\alpha_j}/\sigma_j$;

– если $\sigma_j < \tau$, то $\overline{\Delta z_j} = 0, \quad j = 1,\ldots,m$,

что предотвращает развал решения.

Таким образом, выполняется регуляризация задачи, и определение решения по формуле (19) осуществляется в подпространстве сингулярных чисел, отвечающих условию $\sigma_j \geq \tau$. Уменьшается эффективное число обусловленности матрицы S. Если изначально оно определялось отношением σ_{max} к σ_{min}, то в условиях декомпозиции задачи эффективное число обусловленности уменьшается, становясь равным отношению σ_{max} к τ. Тогда эффективный ранг матрицы чувствительностей S будет равен числу σ_j, для которых выполняется неравенство $\sigma_j \geq \tau$. Приближенные начальные суждения о значении границы τ могут стать основанием для проведения повторных расчетов с целью ее эмпирического уточнения. В этом случае следует стремиться к достижению компромисса между сохранением линейности связей (5) (т.е. надежностью определения вектора Δz) и растущей невязкой r. При этом сохранение модели линейного приближения (при изначально нелинейной задаче МНК) важнее малости невязки.

По завершении декомпозиции задачи решение модели (5) в пространстве оставленных в расчете сингулярных чисел для компоненты с номером j будет иметь вид:

$$\Delta z_j = \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{i,l} \Delta\alpha_i / \sigma_l \right) v_{j,l}. \tag{20}$$

Наши рассуждения и доводы согласуются с общей нелинейностью связей между желаемыми приращениями из вектора $\Delta\alpha$ и удовлетворяющими такие желания элементами из вектора Δz. В нашем случае вычисляемые Δz_j при задаваемых $\Delta\alpha_j$ являются только линейным прогнозом на основе модели (5). Корректность такого прогноза нуждается в проверке и подтверждении, являясь справедливой только для «достаточно малых» Δz_j. «Достаточную малость» следует устанавливать в ходе вычислительного эксперимента. Ясно, что бóльшие приращения $\Delta\alpha$ могут повлечь за собой бóльшие приращения Δz. Их подстановка в модели (1) или (3) может вызвать появление спектра собственных значений G, далеких от ожидаемого, что станет свидетельством сильного нарушения линейности (5). Факт такого нарушения легко проверяется прямым расчетом матрицы G. Изначально экзогенно задаваемые приращения $\Delta\alpha_j$ и так не должны быть большими из-за физических и экономических ограничений достижимости роста валового производства. Более того, интервалы $\Delta\alpha_j$ можно разбить, например, на 10 участков и рассчитать векторы Δz в этих контрольных точках. Таким образом, получится таблица прогнозов, из которой можно будет выбрать приемлемый из математических и инженерно-экономических соображений вариант. Осталось только заметить, что для моделей высокой размерности в оптимизации могут принимать участие не все $\Delta\alpha_j$, а только назначенные. При этом возможен нежелательный эффект встречного движения участвующих и не участвующих в процессе оптимизации $\Delta\alpha_j$. Это значит, что у одних составляющих движения показатель степени роста будет увеличиваться, а у других — снижаться. Если это так, то сделавшиеся отрицательными приращения $\Delta\alpha_j$ целесообразно включить в рассмотрение (5), задав им нулевые значения ($\Delta\alpha_j = 0$).

И еще одно соображение. Околонулевая чувствительность к вариации собственных чисел позволяет исключить из рассмотрения соответствующие элементы матрицы инерционностей, уменьшая столбцовую размерность матрицы S модели (5), порой значительно.

Некоторый практический интерес может представлять задача введения и учета ограничений на варьируемые параметры, которыми в данной работе остаются элементы матрицы межотраслевых инерционностей. Для такого учета можно предложить следующую технологию. Положим, что мы выполняем последовательность одношаговых оптимизаций в соответствии с моделью (5) и на таком шаге/итерации с номером p вычислили вектор приращений параметров $\Delta z^{(p)}$. Инженерно-экономические экспертные соображения практически всегда позволяют с достаточной обоснованностью указать для элементов вектора $z^{(p)}$ минимально и максимально возможные значения по сравнению с текущими значениями. Тогда по отношению к последним максимально допустимые (permissible) вариации параметров оптимизации определятся следующим образом:

$$\Delta z_j^{per} = z_j^{max} - z_j,\ \Delta z_j^{(p)} > 0;\ \Delta z_j^{per} = z_j - z_j^{min},\ \Delta z_j^{(p)} < 0. \tag{21}$$

Далее по данным расчета (21) вычисляются частные вида $q_j = | \Delta z_j^{(p)} / \Delta z_j^{per} |$ и находится их максимальное значение q^{max}. Ясно, что при $q^{max} < 1$ условие

$$z_j^{min} < z_j < z_j^{max} \tag{22}$$

выполняется. Когда это не так, то имеются составляющие вектора приращений, покинувшие диапазон ограничений. В этом случае вектор приращений $\Delta z^{(p)}$ можно разделить на q^{max}, выполнив их масштабирование. В дополнение к сказанному отметим: ничто не мешает обсуждаемым параметрам вернуться в диапазон (22) на следующих шагах оптимизации. Если же возврата не происходит, то их значения на шаге j фиксируются и они исключаются из оптимизации. Вычисленный вектор Δz модели (5) позволяет сформировать новую матрицу инерционностей B, вычислить с ее участием матрицу состояния G и рассчитать ее собственные числа. Расчет собственных значений позволяет проверить наш прогноз их перемещения в комплексной плоскости и внести коррективы, если они потребны. Таким образом, цикл замкнулся, можно вычислять новые элементы матрицы чувствительностей S из (5) и продолжать оптимизацию.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Вычислительный эксперимент, подтверждающий работоспособность предложенной процедуры оптимизации, выполнялся на основе данных статистического сборника «Национальные счета России в 2014–2018 годах» (Росстат, 2019). Мы брали статистику 2016 г., для того чтобы потом можно было сравнить результаты моделирования при размерности массивов (20×20) с таковыми же при размерности (98×98) в базовых таблицах «затраты–выпуск» с сайта «Росстата». Нами использовались таблицы формирования выпуска товаров и услуг и авторская техника последовательных согласованных преобразований и расчетов, представленная в работах (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б). Построение матрицы чувствительностей S по формуле (9), при том что все элементы B вошли в вектор варьируемых параметров, показало, что сколь-нибудь существенное сокращение ее размерности по столбцам возможно, но нецелесообразность этого надо всякий раз обосновывать результатами анализа S. В данной работе мы не будем этим заниматься. Сообщим только, что наша S не содержит столбцов, все элементы которых были бы близки к машинному нулю. За сокращение размерности придется заплатить большими приращениями (Δb_{ij}) оставшихся для участия в оптимизации элементов B для достижения от нее того же эффекта.

Матрица межотраслевых инерционностей $\boldsymbol{B}$ в результате выполнения шага оптимизации получила приращения $\Delta\boldsymbol{B}$, сформированные в виде матрицы (20×20) из вектора решения Δz модели (5) длиной 400 элементов. Для лучшей обозримости приращения представлены на рисунке. Наиболее значимые отрицательные приращения естественным образом расположены на диагонали. Они играют ведущую роль при оптимизации СДС, уменьшая инерционности формирования добавленных стоимостей профильной для отраслей продукции, тогда как инерционности создания этих стоимостей при производстве непрофильной продукции оказывают значительно меньшее влияние на результат оптимизации.

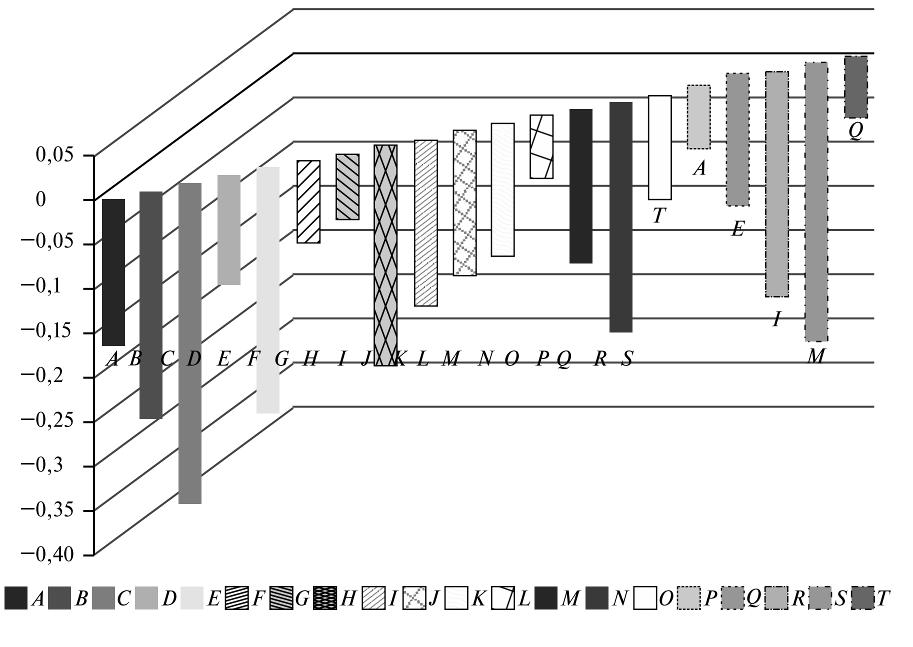

Рисунок. Графическое представление приращений межотраслевых инерционностей на шаге оптимизации

Таблица. Собственные значения матрицы состояния до и после шага оптимизации

До оптимизации	После оптимизации	Разность $\Delta\lambda$
0,1310	0,1380	0,0070
0,1255	0,1337	0,0082
0,1250	0,1322	0,0072
0,1230	0,1319	0,0089
0,1020	0,1111	0,0091
0,1000	0,1084	0,0084
0,0990	0,1071	0,0081
0,0960	0,1022	0,0062
0,0940	0,0976	0,0036
0,0935	0,0961	0,0026
0,0930	0,0955	0,0025
0,0890	0,0917	0,0027
0,0850	0,0877	0,0027
0,0840	0,0854	0,0014
0,0810	0,0814	0,0004
0,0740	0,0745	0,0005
0,0700	0,0705	0,0005
0,0660	0,0668	0,0008
0,0650	0,0655	0,0005
0,0580	0,0595	0,0015
$\Sigma\lambda = 1{,}584$	$\Sigma\lambda = 1{,}937$	$\Sigma\Delta\lambda = 0{,}083$

Источник: расчеты авторов.

Приращения собственных значений задавались на основе анализа чувствительностей, но с ориентацией на уровень 10^{-3}. Малые приращения обусловлены необходимостью гарантировать линейность модели (5), а результат шага такой оптимизации представлен в таблице. Контрольные суммы спектра суммы собственных значений матрицы состояния межотраслевой модели, приведенные в таблице, свидетельствуют о склонности к росту валового производства уже при малом шаге оптимизации. Выполненный шаг легко позволяет определить, что полученные приращения инерционностей увеличивают валовое производство на 1,1%. Выполнение следующих шагов позволяет идти по пути увеличения роста, однако увлечение оптимизацией непременно приведет к результатам, не имеющим отношения к экономической жизни. Завершение этого процесса находится в руках исследователя. Здесь следует обратить внимание на актуальность постановки и решения задачи перевода элементов Δb_{ij} в термины инвестиционного проектирования, в интерпретации этих элементов в плоскости анализа и оценки влияния инвестиционных проектов на рост валового производства, валовой добавленной стоимости, на экономический рост. Но это задача — вне рамок нашей статьи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершая данное изложение, отметим, что в настоящей работе предложен метод оптимизации/повышения собственных динамических свойств экономических систем, формализованных динамическим межотраслевым балансом в виде системы дифференциальных уравнений. При этом оптимизация выполняется за один шаг решением модели (5), а длина вектора варьируемых параметров модели ограничена только ее размерностью и в этом смысле может быть произвольной при сохранении высокой работоспособности метода. Такой вычисленный или модельный рост структурной эффективности экономики предоставляет только некоторые необходимые условия общего экономического роста. Достаточные условия этого роста создаются контуром управления, в котором формируется экономическая политика и принимаются экономические решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Алмон К. (2021). Искусство экономического моделирования. М.: ИНП РАН, МАКС Пресс. [**Almon K.** (2021). *The Art of economic modeling*. Moscow: INP RAS, MAX Press (in Russian).]

Андрукович П.Ф. (2020). Заметки о принципах построения моделей прогноза экономических показателей (на примере прогнозной системы «prorosec”») // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 2. С. 66–76. [**Andrukovich P.F.** (2020). Notes on the principles of constructing models for forecasting economic indicators (on the example of the forecast system “prorosec”). *Economics and Mathematical Methods*, 56, 2, 66–76 (in Russian).]

Ашимов А.А., Айсакова Б.А., Алшанов Р.А. (2014). Параметрическое регулирование экономического роста на базе неавтономных вычислимых моделей общего равновесия // *Автоматика и телемеханика*. Вып. 6. С. 69–85. [**Ashimov A.A., Aisakova B.A., Alshanov R.A.** (2014). Parametric regulation of economic growth based on non-autonomous computable general equilibrium models. *Automation and Remote Control,* 6, 69–85 (in Russian).]

Баранов А.О. (2017). Выход из кризиса и перспективы экономического роста в России в 2018–2019 гг. // *ЭКО*. № 12. С. 5–17. [**Baranov A.O.** (2017). Recovery from the crisis and prospects for economic growth in Russia in 2018–2019. *ECO Journal*, 12, 5–17 (in Russian).]

Баранов А.О., Кватун М.И. (2020). Прогнозирование ускоренного обновления основного капитала в России с использованием динамической межотраслевой модели // *Проблемы прогнозирования*. № 2. С. 48–59. [**Baranov A.O., Kvaktun M.I.** (2020). Forecasting accelerated renewal of fixed capital in Russia using a dynamic intersectoral model. *Studies on Russian Economic Development*, 2, 48–59 (in Russian).]

Баранов А.О., Широв А.А. (2020). Экономическая политика России в межотраслевом и пространственном измерении: материалы 2-й конференции ИНП РАН и ИЭОПП СО РАН по межотраслевому и региональному анализу и прогнозированию. Новосибирск: ИЭОПП СО РАН. [**Baranov A.O., Shirov A.A.** (2020). *Economic policy of Russia in the intersectoral and spatial dimension: Materials of the 2nd conference of INP RAS and IEPP SB RAS on intersectoral and regional analysis and forecasting*. Novosibirsk: Publishing House of IEOPP SB RAS (in Russian).]

Баранов Э.Ф., Елсакова А.В., Корнева Е.С. (2015). Декомпозиционный анализ на основе таблиц «затраты–выпуск» из базы данных WIOD. М.: Изд. дом Высшей школы экономики. [**Baranov E.F., Elsakova A.V., Korneva E.S.** (2015). *Decomposition analysis based on input-output tables from the WIOD database*. Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics (in Russian).]

Бертсекас Д. (1987). Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь. 400 с. [**Bertsekas D.** (1987). *Constrained optimization and lagrange multiplier methods.* Transl. from the English. Moscow: Radio i Svjaz’. 400 p. (in Russian).Originally published by Academic Press, 1982.]

Воеводина В.В. (1968). Ошибки округления в алгебраических процессах. М.: ВЦ МГУ. [**Vojvodina V.V.** (1968). *Rounding errors in algebraic processes*. Moscow: VC MSU (in Russian).]

Глазьев С.Ю. (2012). Современная теория длинных волн в развитии экономики // *Экономическая наука современной России*. № 2 (57). С. 8–27. [**Glazyev S.Yu.** (2012). The modern theory of long waves in the development of the economy. *Economics of Contemporary Russia*, 2 (57), 8–27 (in Russian).]

Глазьев С.Ю. (2016). Прикладные результаты теории мирохозяйственных укладов // *Экономика и математические методы*. Т. 52. № 3. С. 3–21. [**Glazyev S.Yu.** (2016). Applied results of the theory of world economic patterns. *Economics and Mathematical Methods*, 52, 3, 3–21 (in Russian).]

Голуб Дж., Лоун Ч.В. (1999). Матричные вычисления. М.: Мир. [**Golub J., Lone C.W.** (1999). *Matrix calculations*. Moscow: Mir (in Russian).]

Гринберг Р.С. (2015). Экономика современной России: состояние, проблемы, перспективы. Общие итоги системной трансформации // *Век глобализации*. № 1 (15). С. 166–182. [**Grinberg R.S.** (2015). The economy of modern Russia: Status, problems, prospects. Overall results of the system transformation. *Journal of Globalization Studies*, 1 (15), 166–182 (in Russian).]

Гринберг Р.С., Рубинштейн А.Я. (2008). Основания смешанной экономики. Экономическая социодинамика. М.: ИЭ РАН. [**Grinberg R.S., Rubinstein A. Ya.** (2008). *The foundations of a mixed economy. Economic sociodynamics*. Moscow: IE RAS (in Russian).]

Деннис Дж., Шнабель Р. (1988). Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир. 440 с. [**Dennis J.E., Schnabel R.B.** (1988). *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations* (Prentice-Hall, 1983). Moscow: Mir (in Russian).]

Доценко Е.Ю. (2019). Структурная инерция как методологический инструмент исследования структурных сдвигов в экономике // *Научно-практический журнал «Экономика и управление инновациями»*. № 1. С. 4–17. [**Dotsenko E.Yu.** (2019). Structural inertia as a methodological tool for the study of structural shifts in the economy. *Economics and Innovation Management*. *Scientific & Practical Journal*, 1, 4–17 (in Russian).]

Дужински Р.Р., Торопцев Е.Л., Мараховский А.С. (2017). Системные проблемы экономического роста в современной России // *Экономический анализ: теория и практика*. Т. 16. Вып. 2. С. 204–220. [**Duszynski R.R., Toroptsev E.L., Marakhovsky A.S.** (2017). Systemic problems of economic growth in modern Russia. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 16, 2, 204–220 (in Russian).]

Дужински Р.Р., Торопцев Е.Л., Мараховский А.С. (2018). Объединение информационно-аналитических возможностей равновесных и динамических межотраслевых моделей // *Экономический анализ: теория и прак-*

тика. Т. 17. № 4. С. 736–753. DOI: 10.24891/ea.17.4.736 [**Duszynski R.R., Toroptsev E.L., Marakhovsky A.S.** (2018). Integration of information and analytical opportunities of equilibrium and dynamic input-output models. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 17, 4, 736–753. DOI: 10.24891/ea.17.4.736 (in Russian).]

Зарук Н.Ф., Галкин М.С., Светлов Н.М. (2019). Методика анализа инвестиционной привлекательности с использованием экономико-математических методов: межотраслевой аспект // *Экономика, труд, управление в сельском хозяйстве*. № 11. С. 63–76. [**Zaruk N.F., Galkin M.S., Svetlov N.M.** (2019). Methodology of investment attractiveness analysis using economic and mathematical methods: Intersectoral aspect. *Economy, Labor, Management in Agriculture*, 11, 63–76 (in Russian).]

Ивантер В.В. (2017). Структурно-инвестиционная политика в целях устойчивого роста и модернизации экономики. М.: ИНП РАН. [**Ivanter V.V.** (2017). *Structural and investment policy for sustainable growth and modernization of the economy*. Moscow: INP RAS (in Russian).]

Канторович Л.В. (2011). Избранные труды. Экономико-математические работы. Ин-т математики им. С.Л. Соболева, СО РАН. [**Kantorovich L.V.** (2011). *Selected works. Economic and mathematical works*. S.L. Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS (in Russian).]

Касимов А.А., Богатырев А.В. (2009). Оптимизация ресурсной политики предприятия // *Российское предпринимательство*. Т. 10. № 4. С. 46–50. [**Kasimov A.A., Bogatyrev A.V.** (2009). Optimization of the resource policy of the enterprise. *Russian Journal of Entrepreneurship*, 10, 4, 46–50 (in Russian).]

Клейнер Г.Б. (2020). Интеллектуальная экономика цифрового века // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 1. С. 18–33. [**Kleiner G.B.** (2020). The intellectual economy of the digital age. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 1, 18–33 (in Russian).]

Колемаев В.А. (2005). Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. М.: ЮНИТИ-ДАНА. [**Kolemaev V.A.** (2005). *Economic and mathematical modeling. Modeling of macroeconomic processes and systems*. Moscow: UNITY-DANA (in Russian).]

Кондратьев Н.Д., Яковец Ю.В., Абалкин Л.И. (2002). Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. Избранные труды. М.: Экономика. [**Kondratiev N.D., Yakovets Yu. V., Abalkin L.I.** (2002). *Large cycles of conjuncture and the theory of foresight. Selected works*. Moscow: Ekonomika (in Russian).]

Крутько П.Д., Максимов А.И., Скворцов Л.М. (1988). Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем. М.: Радио и связь. [**Krutko P.D., Maksimov A.I., Skvortsov L.M.** (1988). *Algorithms and programs for designing automatic systems*. Moscow: Radio i Svjaz’ (in Russian).]

Крюков В.А., Баранов А.О., Павлов В.Н., Суслов В.И., Суслов Н.И. (2020). Проблемы развития единого комплекса средств макроэкономического межрегионального межотраслевого анализа и прогнозирования // *Экономика региона*. Т. 16. Вып. 4. С. 1072–1086. [**Kryukov V.A., Baranov A.O., Pavlov V.N., Suslov V.I., Suslov N.I.** (2020). Problems of development of a single set of tools for macroeconomic interregional intersectoral analysis and forecasting. *Economy of Region*, 16, 4, 1072–1086 (in Russian).]

Ксенофонтов М.Ю., Широв А.А., Ползиков Д.А., Янтовский А.А. (2018). Оценка мультипликативных эффектов в российской экономике на основе таблиц «затраты–выпуск» // *Проблемы прогнозирования*. № 2 (167). С. 3–13. [**Ksenofontov M. Yu., Shirov A.A., Polzikov D.A., Yantovsky A.A.** (2018). Estimation of multiplicative effects in the Russian economy based on input-output tables. *Studies on Russian Economic Development*, 2 (167), 3–13 (in Russian).]

Леонтьев В.В. (1990). Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. М.: Политическая литература. [**Leontiev V.V.** (1990). *Economic essays. Theory, research, facts and policies*. Moscow: Politicheskaja literatura (in Russian).]

Миролюбова Т.В., Карлина Т.В., Николаев Р.С. (2020). Цифровая экономика: проблемы идентификации и измерений в региональной экономике // *Экономика региона*. Т. 16. Вып. 2. С. 377–390. [**Mirolyubova T.V., Karlina T.V., Nikolaev R.S.** (2020). Digital economy: Problems of identification and measurement in the regional economy. *Economics of Region*, 16, 2, 377–390 (in Russian).]

Петрикова Е.М. (2011). Взаимосвязь показателей платежного и межотраслевого балансов // *Вопросы статистики*. № 7. С. 59–68. [**Petrikova E.M.** (2011). Interrelation of indicators of payment and intersectoral balances. *Voprosy Statistiki*, 7, 59–68 (in Russian).]

Позамантир Э.И. (2014). Вычислимое общее равновесие экономики и транспорта (Транспорт в динамическом межотраслевом балансе). М.: Поли Принт Сервис. [**Pozamantir E.I.** (2014). *Computable general equilibrium of the economy and transport (transport in a dynamic intersectoral balance)*. Moscow: Poli Print Servis (in Russian).]

Светуньков С.Г., Абдуллаев И.С. (2009). Экономическая динамика и производственные функции // *Вестник Оренбургского государственного университета*. № 5 (99). С. 110–114. [**Svetunkov S.G., Abdullaev I.S.** (2009). Economic dynamics and production functions. *Vestnik of the Orenburg State University*, 5 (99), 110–114 (in Russian).]

Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В. (1933). Вариационное исчисление. Ленинград: Кубуч. [**Smirnov V.I., Krylov V.I., Kantorovich L.V.** (1933). *Calculus of variations*. Leningrad: Kubuch (in Russian).]

Суворов Н.В., Трещина С.В., Белецкий Ю.В. (2017). Балансовые и факторные модели как инструмент анализа и прогнозирования структуры экономики. М.: МАКС Пресс. [**Suvorov N.V., Crack S.V., Beletsky Yu.V.** (2017). *Balance and factor models as a tool for analyzing and forecasting the structure of the economy*. Moscow: MAKS Press (in Russian).]

Торопцев Е.Л., Мараховский А.С. (2022а). Анализ макроструктурной динамики в рамках методологии «затраты—выпуск» // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 1 (53). С. 12—30. [**Toroptsev E.L., Marakhovsky A.S.** (2022a). Analysis of macrostructural dynamics within the framework of the input-output methodology. *Journal of the New Economic Association*, 1 (53), 12—30 (in Russian).]

Торопцев Е.Л., Мараховский А.С. (2022б). Структурные инерционности экономических систем // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 1. С. 38—47. [**Toroptsev E.L., Marakhovsky A.S.** (2022b). Structural inertia of economic systems. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 1, 38—47 (in Russian).]

Уилкинсон Дж. (1970). Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука. [**Wilkinson J.** (1970). *Algebraic problem of eigenvalues*. Moscow: Nauka (in Russian).]

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. (1980). Машинные методы математических вычислений. М.: Мир. [**Forsythe J., Malcolm M., Mouler K.** (1980). *Machine methods of mathematical calculations*. Moscow: Mir (in Russian).]

Хемди А.Т. (2005). Введение в исследование операций. 6-е издание. Пер. с англ. М.: Вильямс. [**Hemdi A.T.** (2005). *Introduction to operations research*. 6th ed. Trans. from the English. Moscow: Williams (in Russian).]

Широв А.А., Янтовский А.А. (2017). Межотраслевая макроэкономическая модель RIM — развитие инструментария в современных российских условиях // *Проблемы прогнозирования*. Т. 162. № 3. С. 3—19. [**Shirov A.A., Yantovsky A.A.** (2017). Inter-industry macroeconomic model of RIM — development of tools in modern Russian conditions. *Studies on Russian Economic Development,* 162, 3, 3—19 (in Russian).]

Almon Cl., Grassini M. (2010). The changing structure of employment in Italy 1980—2010: Can investment affect the outcome? *INFORUM Working Papers*.

Bertsekas D. (1982). *Constrained optimization and multiplier methods*. New York, London: Academic Press, Inc.

Brunet F. (2011). *Basics on Continuous Optimization*. Available at: https://www.brnt.eu/phd/node10.html

Chen X., Guo J., Yang C. (2004). Chinese economic development and input-output extension. *International Journal of Applied Economics and Econometrics*, 12, 1, 43—88.

Dennis J.E., Schnabel R.B. (1983). *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. New Jersey: Prentice Hall Inc.

Madsen K., Nielsen H.B., Tingleff O. (2004). *Methods for non-linear least squares problems*. 2nd ed. Informatics and Mathematical Modelling (IMM), Technical University of Denmark (DTU), Lyngby.

Mohajan H.K. (2012). *Aspects of mathematical economics, social choice and game theory*. PhD Dissertation, Lambert Academic Publishing, Germany.

Mohajan H.K. (2017). Optimization models in mathematical economics. *Journal of Scientific Achievements*, 2 (5), 30—42.

Mohajan H.K., Islam J.N., Moolio P. (2013). *Optimization and social welfare in economics*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, Germany.

Zhang H., Chen X. (2008). An extended input-output model on education and the shortfall of human capital in China. *Economic Systems Research*, 20, 2, 205—221.

Optimization of structural dynamics of the economy in the framework of the “input-output” methodology

E.L. Toroptsev,
Digital Business Technologies and Accounting Systems, North Caucasus Federal University, Stavropol, Russia; e-mail: eltoroptsev@yandex.ru

M.M. Kandokhova,
Center for Sustainable Development, Kabardino-Balkar State University, Nalchik, Russia; e-mail: mrkand@mail.ru

N.G. Gudieva,
Scientific and educational mathematical center “North-Caucasus Center for Mathematical Research”, Stavropol, Russia; e-mail; gudieva82@bk.ru

Received 28.12.2022

Abstract. The dynamic input-output balance model in the form of a system of differential equations, being digitized by the already published authors' methodology, allows solving a wide range of problems of static structural stability of economic systems. Structural dynamics can be optimized by including any variable parameters in the vector and the limit of all model elements. In this paper, inter-sectoral inertias are chosen, and a method is proposed that uses a vector of parameters of an arbitrary (allowed by the model itself) length at the step of the search process. This distinguishes the proposed method from existing ones, making it unique. The uniqueness specified here lies in the removal of the so-called “curse of dimensionality” inherent in the classical optimization problems (numerical search problems) using methods from the coordinate-wise descent to the rich Newtonian-type tools. In this sense, the method is a competitor to machine learning-based optimization of artificial neural networks. At the same time, it does not matter how exactly the task is formalized: it should highlight the target indicators and the vector of variable parameters. It is possible to define and solve many optimization problems by changing the content of the vector of variable parameters according to the corresponding plan of the computational experiment. The paper presents only one example and one optimization stage. The limiting and functional conditions for operation of the method preserve a linear relationship between the desired increments of the fundamental parts of the eigenvalues of the model state matrix and their sensitivities to control parameters. Such “small” optimization steps are separate and independent problems, the numerical solution of which can be repeated.

Keywords: dynamic input-output balance, digitization, optimization, sensitivities, singular value decomposition of a matrix.

JEL Classification: B41, C02, C61, C68

For reference: **Toroptsev E.L., Kandokhova M.M., Gudieva N.G.** (2023). Optimization of structural dynamics of the economy in the framework of the “input-output” methodology. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 26–38. DOI: 10.31857/S042473880025859-3