ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2023, том 59, № 2, с. 100–111

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Компьютерные испытания прототипа непараметрической модели частичного равновесия[1]

Н.М. Светлов,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: nikolai.svetlov@gmail.com

Поступила в редакцию 08.02.2023 г.

Аннотация. На основе непараметрических формулировок задач о производственной программе и о выборе потребителя предложена вычислимая модель частичного равновесия с непараметрическим представлением спроса и предложения. Задачи производителя и потребителя представлены системами неравенств взаимно двойственных задач. Это позволяет свести отыскание равновесия к минимизации разностей между их целевыми функциями, суммированных по производителям и потребителям. Такая задача может иметь более одного локального оптимума. Компьютерными испытаниями на искусственных наборах данных подтверждено, что дополнение числовой модели техническими ограничениями, заведомо выполняющимися в равновесии, способно эффективно направлять поиск решения с использованием процедуры CONOPT4 к глобальному оптимуму (которому соответствует искомое равновесие). Во всех проведенных испытаниях равновесные решения найдены с первой попытки. Полученный результат имеет существенное значение для создания инструментальных средств, используемых на отраслевом уровне при управлении нестабильной экономической динамикой, характерной для периодов смены систем технологий широкого применения. Такие инструменты смогут полнее использовать информацию, содержащуюся в исходных эмпирических данных.

Ключевые слова: частичное равновесие, вычислимая модель, непараметрическая граница производственных возможностей, непараметрическая граница возможностей потребления, первая теорема двойственности, компьютерные испытания.

Классификация JEL: C02, C14, C63.

Для цитирования: **Светлов Н.М.** (2023). Компьютерные испытания прототипа непараметрической модели частичного равновесия // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 100–111. DOI: 10.31857/S042473880025862-7

ВВЕДЕНИЕ

Поиск путей развития математического инструментария для исследования структурных предпосылок становления в экономике нового технологического уклада — задача, от решения которой зависят, во-первых, сокращение потерь, связанных с обновлением системы технологий широкого применения; во-вторых, своевременное, с опережением конкурентов, использование преимуществ взаимодействия этих технологий с ресурсным потенциалом национальной экономики и ее отраслей. В этом поиске следует сочетать разработки, отражающие специфику технологий нового уклада[2], с классическими подходами, способными имитировать (в некоторых границах) реакции рынков на происходящие изменения. Такие подходы необходимы для выявления структурных тенденций развития экономики и связанных с ними рисков при различных сценариях становления нового мирового технологического уклада. К их числу относятся, в частности, вычислимые модели общего и частичного равновесия.

В данной статье представлен вклад в изучение возможностей обновления инструментария моделирования частичного равновесия при помощи непараметрического представления спроса и предложения.

---

[1] Компьютерные испытания модели проведены на инфраструктуре ВИАПИ имени А.А. Никонова — филиала ФГБНУ ФНЦ ВНИИЭСХ. Автор благодарен руководству и всему коллективу филиала за возможность выполнить эту часть исследования.

[2] Например (Дементьев, 2021; Дементьев, Евсюков, Устюжанина, 2020; Акаев, Садовничий, 2016).

В отраслевом анализе и в исследованиях международной торговли вычислимые модели частичного равновесия (ВМЧР)[3], не содержащие непараметрических субмоделей, успешно применяются, несмотря на присущие им недостатки. Во-первых, это погрешности, возникающие из-за игнорирования взаимовлияния моделируемых рынков и остальной экономики[4]. Во-вторых, широкое (и, как правило, вынужденное) использование предположения о постоянстве эластичностей предложения и спроса по ценам. Наше исследование сфокусировано на втором недостатке.

Предположение постоянства эластичностей принимается ради замещения массовых исходных данных немногими параметрами. Помимо потери части полезной информации, содержащейся в данных, статистическое оценивание этих эластичностей — непростая задача, для решения которой далеко не всегда находятся подходящие эмпирические данные.

Критика предположения о постоянстве эластичности спроса представлена в статье (Houthakker, 1965), а приводимые в ней же контраргументы в поддержку этого предположения оспорены в работе (Goldberger, Gamaletsos, 1970). Направления совершенствования моделей потребительского спроса представлены в статье (Brown, Deaton, 1972).

Что касается эластичностей предложения, в ряде ВМЧР удается обойтись без них благодаря включению в эти модели подзадач об оптимальном плане производителей[5]. Вычислительные трудности, сопровождающие такой подход, преодолеваются одним из трех способов:

– итеративное согласование равновесных цен и оптимального плана — способ ресурсоемкий и не гарантирует сходимости вычислительного процесса, но все же применяется в модели CAPRI (Britz, Witzke, 2014);

– решение задачи максимизации совокупного общественного благосостояния, эквивалентной исходной задаче о равновесии; этот прием используется в модели GLOBIOM (Ermolieva et al., 2016). Он применим до тех пор, пока выполнены предпосылки второй теоремы экономики благосостояния, устанавливающей условия, при которых любому оптимуму по Парето соответствует конкурентное равновесие;

– представление задачи производителя в форме системы неравенств взаимно двойственных задач линейного программирования. Этот способ пригоден только для линейных задач производителей, но свободен от недостатков первых двух способов. Данный способ положен в основу PF+PE-архитектуры ВМЧР с непараметрической субмоделью предложения[6] (Светлов, 2019б). Ее расширенная версия PF+PE+ED[7], учитывающая случайный характер производственных процессов в сельском хозяйстве, использована при создании пространственной ВМЧР оптовых рынков сельскохозяйственной продукции России (Светлов, Шишкина, 2019; Светлов и др., 2020, глава 5) на базе модели оптимальной территориально-отраслевой структуры сельского хозяйства страны (Svetlov et al., 2019), где применено непараметрическое представление технологии в соответствии с (Charnes, Cooper, Rhodes, 1978). Модель нашла применение в ряде прикладных исследований, где проявились достоинства ее архитектуры: более полное использование полезной информации, содержащейся в исходных данных о производстве; алгоритмическая простота трансформации исходных данных в числовую модель; меньшая обусловленность результатов априорными предположениями; широкие возможности формулирования сценариев, представляющих интерес для практики. Все это породило надежду, что непараметрическое представление спроса наделит модель новыми преимуществами.

Цели данной статьи — сформулировать ВМЧР с непараметрическим представлением предложения и спроса; предложить приемы преодоления вычислительных трудностей, обусловленных множественностью ее локальных экстремумов; продемонстрировать ее реализуемость в компьютерных испытаниях на искусственных данных.

---

[3] Обзоры использования ВМЧР при исследовании энергетической политики содержатся в статьях (Savvidis et al., 2019; Ruhnau et al., 2022); рынков нефти и газа — в препринте (Huppmann, 2013). Множество таких моделей применяется при анализе агропродовольственной политики — см. обзор в статье (Прокопьев, 2015), а также статьи (Ermolieva et al., 2016; Chantreuil, Hanrahan, Leeuwen, 2012). Разработан ряд ВМЧР для рынков сельскохозяйственной продукции России (Fock et al., 2000; Kiselev, Strokov, Belugin, 2016; Киселев, Ромашкин, Белугин, 2022) и Беларуси (Земцов, Филипцов, 2009).

[4] См., например, (Just, 2011).

[5] В англоязычной литературе — например в (Savvidis et al., 2019) — такие модели называются моделями с явным представлением технологий (technology explicit partial equilibrium models).

[6] (Non-parametric) Production Frontier (непараметрическая граница производственных возможностей) + Partial Equilibrium (частичное равновесие).

[7] Empirical (probability) Distribution (эмпирическое распределение вероятностей).

1. МОДЕЛЬ

В задаче имеются один производитель, максимизирующий прибыль, и множество потребителей, максимизирующих заданные линейные функции полезности. Ни производитель, ни потребители не обладают контролем над ценами продукции, но располагают полной актуальной информацией о них. Выполняется закон одной цены (что подразумевает отсутствие транзакционных издержек).

Производитель обладает ресурсами в фиксированных объемах. Его технологическое множество определяется приближенно из наблюдений его предыстории (либо предыстории его аналогов) по следующим правилам:

– любая фактически наблюдавшаяся пара векторов затрат и выпусков принадлежит технологическому множеству;

– технологическому множеству принадлежит любая линейная комбинация вышеуказанных векторов с неотрицательными весами, лежащими в границах, которые предполагаются известными. Любая иная пара векторов затрат–выпуска не принадлежит технологическому множеству.

В соответствии с введенными предположениями функция предложения $\mathbf{x}^* = F_s(\mathbf{a}_0, \mathbf{p})$ задается через непараметрическую границу производственных возможностей[8] (Farrell, 1957; Charnes et al., 1978) с ограниченной областью уверенности (Thompson et al., 1990):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \cdots \\ \mathbf{k}^* \end{pmatrix} = \underset{(\mathbf{x} \cdots \mathbf{k})^{\mathrm{T}}}{\arg\max} \left(\mathbf{p}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \,|\, \mathbf{Ak} \leqq \mathbf{a}_0;\ \mathbf{Bk} \geqq \mathbf{x};\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0};\ \mathbf{k}_1 \leqq \mathbf{k} \leqq \mathbf{k}_2 \right), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}^*$ — вектор предложения продуктов, включенных в модель; $\mathbf{k}^*$ — оптимальное значение вектора $\mathbf{k}$ множителей Фаррелла[9], число компонентов которого равно числу включенных в модель наблюдений производства; $\mathbf{p}$ — вектор цен; $\mathbf{x}$ — вектор объемов производства; $\mathbf{A}$ — матрица данных о затратах, в которой строка соответствует ресурсу, а столбец — наблюдению; $\mathbf{a}_0$ — вектор наличия ресурсов; $\mathbf{B}$ — матрица данных о выпусках, в которой строка соответствует продукту, а столбец — наблюдению; $\mathbf{0}$ — вектор соответствующего порядка, все компоненты которого равны нулю; $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ — границы области уверенности[10]. Все компоненты векторов $\mathbf{p}, \mathbf{a}_0, \mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ неотрицательны. Запись $\begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \cdots \\ \mathbf{k}^* \end{pmatrix}$ означает, что вектор включает все компоненты вектора $\mathbf{x}$ и все компоненты вектора $\mathbf{k}$; знаки $\leqq$ и $\geqq$ в контексте векторов обозначают операции «≤» и «≥», применяемые попарно ко всем компонентам обоих векторов. В задаче (1) переменными являются $\mathbf{x}$ и $\mathbf{k}$.

Каждый потребитель составляет потребительский набор, максимизирующий его функцию полезности, из продуктов, поставляемых производителем, в пределах потребительского множества (одного для всех потребителей) и своего бюджета. Потребительское множество задается подобно технологическому: оно исчерпывается фактически наблюдавшимися потребительскими наборами, а также всеми линейными комбинациями наблюдавшихся наборов с весами, заключенными в неотрицательных границах (известных). Бюджет потребителя определяется стоимостью потребительского набора, выбранного потребителем на определенную дату, в ценах на ту же дату. Эти же цены приравниваются к весам продуктов в его линейной функции предпочтения[11].

Для функции $\mathbf{y}_i^* = F_D(\mathbf{p}_{0i}, \mathbf{p}_{0i}^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_i)$ спроса потребителя i принимается непараметрическая форма представления, схожая с (1):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_i^* \\ \cdots \\ \mathbf{m}_i^* \end{pmatrix} = \underset{(\mathbf{y}_i \cdots \mathbf{m}_i)^{\mathrm{T}}}{\arg\max} \left(\mathbf{p}_{0i}^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_i \,|\, \mathbf{p}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_i \le \mathbf{p}_{0i}^{\mathrm{T}} \mathbf{c}_i;\ \mathbf{Cm}_i \geqq \mathbf{y}_i;\ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0};\ \mathbf{m}_{1i} \leqq \mathbf{m}_i \leqq \mathbf{m}_{2i} \right), \tag{2}$$

---

[8] Обзор приложений подобных представлений на примере сельскохозяйственной проблематики содержится в статье (Светлов, 2019а).

[9] Множители Фаррелла — коэффициенты линейной комбинации известных (наблюдавшихся) производственных процессов, задающие некоторый производственный процесс, принадлежащий технологическому множеству производителя. Положим, что на этом множестве задано упорядочение по прибыли при ценах $\mathbf{p}$. Тогда задача (1) определяет спрос как супремум его подмножества, ограниченного объемом ресурсов $\mathbf{a}_0$.

[10] Подмножество множителей Фаррелла, задающее производственные процессы за исключением тех, которые производитель не выберет из-за неуверенности в результате.

[11] Подразумевается, что предпочтения потребителей следуют (с некоторым лагом) за рыночными ценами в духе (Pollak, 1977; Светлов, 2002, п. 2.2).

где $\mathbf{y}_i^*$ — вектор спроса на продукты со стороны потребителя i; $\mathbf{m}_i^*$ — оптимальное значение вектора $\mathbf{m}_i$ множителей, аналогичных по смыслу множителям Фаррелла в приложении к векторам потребления (число компонентов вектора $\mathbf{m}_i$ равно числу наблюдений потребления); $\mathbf{p}_1$ — вектор цен; $\mathbf{p}_{0i}$ — вектор весов линейной функции предпочтения потребителя i; $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{c}_i$ — искомый и наблюдаемый вектора потребления потребителя i; $\mathbf{C}$ — матрица данных о потреблении, в которой строка соответствует продукту, а столбец — наблюдению; $\mathbf{m}_{1i}$ и $\mathbf{m}_{2i}$ — векторы границ области уверенности, на которую распространяется потребительский опыт агента i и за пределы которой он не рискует выходить. Все компоненты векторов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_{0i}$, $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{m}_{1i}$ и $\mathbf{m}_{2i}$, а также матрицы $\mathbf{C}$ неотрицательны. Переменными задачи (2) являются векторы $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{m}_i$.

При ценах, равных $\mathbf{p}_{0i}$, план потребления $\mathbf{c}_i$ эффективен по построению задачи. При достаточно большом отклонении цен от $\mathbf{p}_{0i}$ эффективным может стать иной план.

Хотя в литературе встречаются непараметрические модели границ возможностей потребления[12], основанной на них модели спроса с линейной функцией предпочтения, насколько известно автору, нет. В отличие от модели предложения, в которой применено неоднократно апробированное представление, способность предложенной модели спроса адекватно воспроизводить фактические данные требует изучения.

Непараметрическая ВМЧР включает задачи (1), (2), а также уравнения

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{x}^* \geqq \sum\nolimits_i \mathbf{y}_i^*,\ \mathbf{p} \odot \mathbf{x}^* = \mathbf{p}_1 \odot \sum\nolimits_i \mathbf{y}_i^*. \tag{3}$$

В (3) переменными являются векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}_i^*$. Символ «$\odot$» обозначает покомпонентное (адамарово) произведение двух векторов.

Если множества допустимых решений задач (1) и (2) не пусты, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{m}_{1i} = \mathbf{0}\quad \forall i$, а все компоненты векторов $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{m}_{2i}$ достаточно велики, то хотя бы одно равновесие в задаче (1)–(3) существует, поскольку она отвечает условиям его существования в форме (Полтерович, 1990, с. 38–39).

Из-за того что цены входят в (1) и (2) в качестве констант, а в (3) — в качестве переменных, модель (1)–(3) неудобна для численной реализации. Поэтому переформулируем ее с использованием первой теоремы двойственности в линейном программировании по образцу (Светлов, 2019б):

$$\begin{cases} \mathbf{Ak} \leqq \mathbf{a}_0;\ \mathbf{Bk} \geqq \mathbf{x};\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0};\ \mathbf{k}_1 \leqq \mathbf{k} \leqq \mathbf{k}_2;\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_2 + \boldsymbol{\lambda}_3 + \boldsymbol{\lambda}_4 \geqq \mathbf{0}; \\ -\boldsymbol{\lambda}_2 \geqq \mathbf{p};\ \boldsymbol{\lambda}_1 \geqq \mathbf{0};\ \boldsymbol{\lambda}_2 \leqq \mathbf{0};\ \boldsymbol{\lambda}_3 \leqq \mathbf{0};\ \boldsymbol{\lambda}_4 \geqq \mathbf{0};\ z_0 = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - \left(\mathbf{a}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{k}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_3 + \mathbf{k}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_4\right); \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_i \le \mathbf{p}_{0i}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_i;\ \mathbf{Cm}_i \geqq \mathbf{y}_i;\ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0};\ \mathbf{m}_{1i} \leqq \mathbf{m}_i \leqq \mathbf{m}_{2i}; \\ \mathbf{p}_1\boldsymbol{\mu}_{1i} - \boldsymbol{\mu}_{2i} \geqq \mathbf{p}_{0i}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_i;\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}_{2i} + \boldsymbol{\mu}_{3i} + \boldsymbol{\mu}_{4i} \geqq \mathbf{0};\ \mu_{1i} \ge 0;\ \boldsymbol{\mu}_{2i} \leqq \mathbf{0};\ \boldsymbol{\mu}_{3i} \leqq 0;\ \boldsymbol{\mu}_{4i} \geqq 0; \\ z_i = \mathbf{p}_{0i}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_i - \left(\left(\mathbf{p}_{0i}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_i\right)\mu_{1i} + \mathbf{m}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}_{3i} + \mathbf{m}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}_{4i}\right); \end{cases} \tag{5}$$

$$\mathbf{x} \geqq \sum\nolimits_i \mathbf{y}_i;\ \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \geqq \mathbf{0}; \tag{6}$$

$$z_0 + \sum\nolimits_i z_i \to \max. \tag{7}$$

Обозначения, в дополнение к введенным к задаче (1)–(3): $\boldsymbol{\lambda}_1 \ldots \boldsymbol{\lambda}_4$ и $\boldsymbol{\mu}_{1i}, \ldots, \boldsymbol{\mu}_{4i}$ — двойственные переменные (векторы двойственных переменных) соответственно к задачам производителя и потребителей; z_0 — разница между целевыми функциями прямой и двойственной задач производителя (задач об оптимальном плане и о предельных ценах в оптимальном плане); z_i — разница между целевыми функциями прямой и двойственной задач потребителя i. В задаче (4)–(7) переменными являются векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\lambda}_1 \ldots \boldsymbol{\lambda}_4$, $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{y}_i$, $\boldsymbol{\mu}_{1i}, \boldsymbol{\mu}_{2i} \ldots \boldsymbol{\mu}_{4i}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$, z, $z_i\quad \forall i$. Если в ее локальном оптимуме значение целевой функции равно нулю и выполнено условие $\mathbf{p} \odot \mathbf{x} = \mathbf{p}_1 \odot \sum\nolimits_i \mathbf{y}_i$, то, в силу первой теоремы двойственности в линейном программировании, в указанных условиях гарантирующей оптимальность планов производителя и потребителей при ценах $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$, данный локальный оптимум является глобальным оптимумом и частичным равновесием для задачи (1)–(3).

[12] Например (Lee, Hwang, Kim, 2005).

2. МЕТОДИКА КОМПЬЮТЕРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

2.1. Общие условия

Имитируется ситуация, в которой данные о затратах, выпусках, потреблении, ценах и предпочтениях (и только они) известны как разработчику числовой модели, так и агентам моделируемого рынка. Процессы, генерирующие данные, не известны ни разработчику модели, ни агентам.

Изучены спецификации модели (4)—(7) с: 1) двумя ресурсами и двумя продуктами; 2) двумя ресурсами и тремя продуктами; 3) тремя ресурсами и четырьмя продуктами. Такой набор спецификаций дает возможности изучить вычислительные свойства модели в мере, необходимой для перехода к предстоящим экспериментам на реальных данных.

Для каждой спецификации выполнено 12 прогонов, образованных комбинацией;

— *условий субсидирования* (1) субсидии отсутствуют; 2) субсидируется первый продукт в размере 20% выручки от продажи; 3) субсидируется второй продукт в том же объеме);

— *диффузии технологий* (1) свободной, при которой $\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$, а компоненты вектора $\mathbf{k}_2$ неограниченно велики, 2) ограниченной, когда $\mathbf{k}_1 = (0,9;\ldots;0,9)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{k}_2 = (1,1;\ldots;1,1)^{\mathrm{T}}$);

— *инерции спроса* (1) отсутствует ($\mathbf{m}_{1i} = \mathbf{0}$, компоненты $\mathbf{m}_{2i}$ неограниченно велики); 2) присутствует ($\mathbf{m}_{1i} = \mathbf{0}$; компоненты вектора $\mathbf{m}_{2i}$ для всех потребительских наборов, кроме набора потребителя i, равны 1% отношения бюджета, соответствующего наблюдению, к бюджету потребителя i; компонент с индексом i неограниченно велик)).

Компьютерные испытания проведены на искусственных наборах данных, описывающих 40 наблюдений производителя продукции и по одному наблюдению каждого из 50 потребителей. Для каждого из 36 прогонов модели искусственные наборы создавались заново по одним и тем же правилам, описанным в п. 2.2 и 2.3.

2.2. Генерация данных производителей

Затраты ресурсов для каждого из 40 наблюдений производителя (столбцы матрицы **A**) вычисляются по формуле

$$c + (d - c)\varepsilon, \ \varepsilon \sim \mathrm{B}(a, b), \tag{8}$$

где $\mathrm{B}(a,b)$ — бета-распределение вероятностей[13] с параметрами a и b; параметры c и d задают верхнюю и нижнюю границы размеров генерируемых затрат. Значения четырех параметров[14] приведены в табл. 1. Вектор $\mathbf{a}_0$ равен сумме столбцов сгенерированной матрицы **A**.

Для формирования матрицы **B** объем продукции вида h определяется производственной функцией, имитирующей несовершенное замещение ресурсов:

— для случая трех ресурсов

$$s_h e_h \left(1,4x_{[3]} + 0,4\left(x_{[2]} - x_{[3]}\right) + 0,1\left(x_{[1]} - x_{[2]}\right)\right); \tag{9}$$

— для случая двух ресурсов

$$s_h e_h \left(1,3x_{[2]} + 0,3\left(x_{[1]} - x_{[2]}\right)\right), \tag{10}$$

где $x_{[k]}$ — объем ресурса, занимающего место k в ранжированном ряду ресурсов, упорядоченному по объему; s_h — доля ресурсного потенциала, выделяемая на продукт i согласно правилу

Таблица 1. Значения параметров формулы (8) для генерации данных о ресурсах

Номер ресурса	a	b	c	d
1	1	2	1	5
2	1	2	1	10
3	2,5	2,5	1	10

[13] Псевдослучайные значения генерируются с использованием алгоритма Mersenne twister (Matsumoto, Nishimura, 1998).

[14] Параметры распределений вероятностей, использованных для генерации данных, выбирались с тем чтобы распределения, относящиеся к разным ресурсам или видам продукции, различались между собой центральными моментами первых трех порядков. Значения параметров выбирались 1 раз, и их подбор по какому-либо критерию не производился.

Таблица 2. Значения параметров формулы (8) для генерации параметров e_h

Номер продукта	*a*	*b*	*c*	*d*
1	3	1	0,4	1
2	4	1	0,5	1
3	2,5	1	0,2	1
4	5	2	0,6	1

$\sum_{m=1}^{h} s_m \sim U$ (U — равномерное распределение вероятностей); e_h — коэффициент эффективности, определяемый по формуле (8) при значениях параметров, приведенных в табл. 2.

В отличие от формы (4)–(7) предполагается, что ресурсы платные, а целевая функция производителя имеет вид $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}-(\mathbf{Ak})^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}=(v_j)$ — вектор цен ресурсов (постоянный). Считаем, что первый ресурс самый дешевый в расчете на его единицу, третий — самый дорогой. Цены v_j генерируются по правилу $\sum_{m=1}^{j} v_m \sim U$.

2.3. Генерация данных потребителей

Объемы потребления каждого продукта каждым из 50 потребителей генерируются согласно формуле (8), причем параметры *c* и *d* задают верхнюю и нижнюю границы объемов потребления. Значения параметров формулы (8), используемые при генерации объемов потребления, приведены в табл. 3.

Таблица 3. Значения параметров формулы (8) для генерации объемов потребления

Номер продукта	*a*	*b*	*c*	*d*
1	3	1	1	8
2	4	1	1	5
3	1,5	1,5	0	0,2
4	1,4	1,4	0	0,2

Предпочтения $\mathbf{p}_{0i}$ одинаковы у всех 50 потребителей. Предусмотрено, что предпочтительность единицы продукта i возрастает с ростом i. Значения параметров предпочтений генерируются аналогично значениям цен ресурсов.

2.4. Процедура отыскания равновесия

Задача решалась при помощи инструментального средства GAMS версии 30.2 с модулем поиска оптимума CONOPT4 (Drud, 1992, 2023) версии 4.17 под управлением операционной системы Windows 10 (22H2) 64 bit на ПЭВМ с четырехъядерным процессором Intel Core i3–8100 на тактовой частоте 3,6 ГГц (процедура поиска оптимума использует одно ядро) и объемом оперативной памяти 8 ГБайт. Время решения варьировало в диапазоне от 0,375 секунд (для двух ресурсов и двух видов продукции; без субсидий; диффузия технологий не ограничена; инерция спроса отсутствует) до 1,484 секунд (для трех ресурсов и четырех видов продукции (без субсидий; диффузия технологий неограничена; спрос инерционный).

Начальные приближения формировались следующим образом: $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0=\lambda_2=\mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единичный вектор; $\mathbf{x}=\mathbf{B}\times\mathbf{1}$; $\lambda_1=\mathbf{v}$, $\mu_i=\mathbf{p}_{0i}^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_i$; остальные переменные нулевые. Подбор начальных приближений не предусмотрен, так как цель заключается в том, чтобы зафиксировать результат каждого из 36 прогонов: найден глобальный оптимум, соответствующий равновесию; найден локальный оптимум, не соответствующий равновесию; найдено допустимое решение, условия оптимальности не выполнены; допустимое решение не найдено.

Чтобы предупредить остановку вычислительного процесса в локальных угловых экстремумах, где целевая функция меньше нуля, а решение подзадачи производителя неоптимально[15], задача дополняется техническим условием

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=\left(\mathbf{a}_0^{\mathrm{T}}\lambda_1+\mathbf{k}_1^{\mathrm{T}}\lambda_3+\mathbf{k}_2^{\mathrm{T}}\lambda_4\right), \tag{11}$$

которое заведомо выполняется в равновесии. Оказалось, что этот прием эффективно направляет процесс поиска решения к глобальному оптимуму, в котором целевая функция достигает наибольшего теоретически возможного значения — нуля.

[15] При попытках решить задачу (4)–(7) без дополнительных условий такая ситуация встречалась неоднократно.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В табл. 4 приведены результаты 12 компьютерных испытаний для случая двух ресурсов и двух продуктов. Столбцы 2–6 содержат условия испытания, 7–9 — результаты решения модели. В каждом из этих испытаний условия равновесия, не вошедшие в задачу (4)–(7), (11) в явном виде, выполнены — планы производителя и всех потребителей оптимальны, уравнение $\mathbf{p} \odot \mathbf{x} = \mathbf{p}_1 \odot \sum_i \mathbf{y}_i$ соблюдено.

При условиях проводимых испытаний ограничение на диффузию технологий приводит к избытку (следовательно, нулевой цене) второго продукта. Если спрос неинертен, резко возрастает цена первого продукта, поскольку весь бюджет потребителей расходуется на него. При сочетании инерции спроса и субсидий ресурсы недоиспользуются: при субсидировании первого продукта — оба, второго — только второй. Действие субсидий на равновесные цены немонотонно: при их наличии цена как субсидируемого продукта, так и несубсидируемого, может снизиться, а может и возрасти. Сравнение первого и пятого испытаний показывает, что этот эффект не объясняется различиями векторов предпочтений и бюджетов потребителей.

Таблица 4. Результаты компьютерных испытаний модели: два ресурса, два продукта

№ испытания	Вектор субсидий (3)	Параметр диффузии технологий (2)	Параметр инерции спроса (2)	Вектор цен ресурсов	Вектор предпочтений	Равновесие		
						Вектор цен продуктов	Вектор выпусков	Вектор потребления
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(0;0)	0	0	(0,049; 0,816)	(0,423; 0,640)	(1,920; 1,917)	(105,80; 66,45)	(105,80; 66,45)
2	(0;0)	0	0,01	(0,774; 0,846)	(0,330; 0,910)	(2,414; 1,797)	(87,54; 60,27)	(87,54; 60,27)
3	(0;0)	0,1	0	(0,281; 0,286)	(0,162; 0,690)	(10,724; 0)	(57,14; 64,70)	(57,14; **40,54**)
4	(0;0)	0,1	0,01	(0,026; 0,210)	(0,771; 0,920)	(8,040; 0)	(66,84; 55,88)	(66,84; **43,54**)
5	(0,2;0)	0	0	(0,119; 0,261)	(0,308; 0,808)	(4,507; 1,804)	(97,30; 63,60)	(97,30; 63,60)
6	(0,2;0)	0	0,01	(0,574; 0,641)	(0,372; 0,576)	(1,942; 1,158)	(95,45; 62,05)	(95,45; 62,05)
7	(0,2;0)	0,1	0	(0,280; 0,577)	(0,663; 0,981)	(18,747; 0)	(55,94; 58,89)	(55,94; **36,69**)
8	(0,2;0)	0,1	0,01	(0,203; 0,689)	(0,015; 0,320)	(1,839; 0)	(55,81; 68,73)	(55,81; **40,63**)
9	(0;0,2)	0	0	(0,423; 0,554)	(0,283; 0,703)	(2,976; 1,456)	(91,82; 62,05)	(91,82; 62,05)
10	(0;0,2)	0	0,01	(0,100; 0,969)	(0,545; 0,836)	(3,257; 1,833)	(83,86; 56,35)	(83,86; 56,35)
11	(0;0,2)	0,1	0	(0,201; 0,649)	(0,217; 0,867)	(7,539; 0)	(59,90; 65,77)	(59,90; **39,78**)
12	(0;0,2)	0,1	0,01	(0,129; 0,779)	(0,088; 0,353)	(2,044; 0)	(60,80; 60,72)	(60,80; **41,66**)

Примечание. Полужирным шрифтом выделены объемы потребления, отличающиеся от соответствующих объемов выпуска.

Таблица 5. Результаты компьютерных испытаний модели: два ресурса, три продукта

№ испытания	Вектор субсидий (3)	Параметр диффузии технологий (2)	Параметр инерции спроса (2)	Вектор цен ресурсов	Вектор предпочтений	Равновесие		
						Вектор цен продуктов	Вектор выпусков	Вектор потребления
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(0;0;0)	0	0	(0,008; 0,791)	(0,561; 0,754; 0,903)	(9,612; 1,126; 0)	(81,11; 51,32; 47,97)	(81,11; 51,32; **1,10**)
2	(0;0;0)	0	0,01	(0,291; 0,626)	(0,026; 0,154; 0,968)	(0,927; 0,767; 0)	(37,99; 28,63; 32,59)	(37,99; 28,63; **0,82**)
3	(0;0;0)	0,1	0	(0,430; 0,904)	(0,075; 0,370; 0,559)	(7,052; 0; 0)	(48,72; 40,53; 37,11)	(48,72; **31,30**; **0,79**)
4	(0;0;0)	0,1	0,01	(0,037; 0,635)	(0,620; 0,641; 0,903)	(9,590; 0; 0)	(44,05; 41,18; 34,71)	(44,05; **26,71**; **0,65**)
5	(0,2;0;0)	0	0	(0,758; 0,950)	(0,245; 0,704; 0,921)	(3,813; 1,616; 0)	(74,11; 47,29; 40,94)	(74,11; 47,29; **1,05**)
6	(0,2;0;0)	0	0,01	(0,673; 0,996)	(0,460; 0,556; 0,884)	(2,684; 1,386; 0)	(83,17; 55,99; 38,92)	(83,17; 55,99; **1,16**)
7	(0,2;0;0)	0,1	0	(0,587; 0,986)	(0,150; 0,432; 0,516)	(9,496; 0; 0)	(43,19; 41,88; 37,63)	(43,19; **29,67**; **0,57**)
8	(0,2;0;0)	0,1	0,01	(0,032; 0,638)	(0,261; 0,679; 0,737)	(6,825; 0; 0)	(44,84; 43,41; 36,24)	(44,84; **30,49**; **0,73**)
9	(0;0,2;0)	0	0	(0,049; 0,466)	(0,420; 0,493; 0,565)	(5,355; 1,351; 0)	(73,79; 49,95; 26,29)	(73,79; 49,95; **1,22**)
10	(0;0,2;0)	0	0,01	(0,027; 0,136)	(0,080; 0,396; 0,496)	(1,477; 0,434; 0)	(74,30; 50,29; 48,07)	(74,30; 50,29; **1,27**)
11	(0;0,2;0)	0,1	0	(0,231; 0,980)	(0,233; 0,248; 0,530)	(6,485; 0; 0)	(43,22; 38,01; 34,55)	(43,22; **29,43**; **0,71**)
12	(0;0,2;0)	0,1	0,01	(0,332; 0,390)	(0,147; 0,585; 0,860)	(4,709; 0; 0)	(45,57; 49,06; 39,84)	(45,57; **28,83**; **0,66**)

Примечание. Полужирным шрифтом выделены объемы потребления, отличающиеся от соответствующих объемов выпуска.

В табл. 5 представлены результаты испытаний, в которых число продуктов увеличено до трех. Остальные условия остаются неизменными (но данные сгенерированы заново по прежним правилам). Во всех 12 случаях найденные локальные оптимумы оказались равновесиями. Третий продукт оказывается избыточным и, следовательно, бесплатным; для остальных продуктов остаются в силе наблюдения, следующие из табл. 4, в том числе относящиеся к субсидиям. В испытаниях № 2 и № 11 имеет место недоиспользование второго ресурса.

Таблица 6. Результаты компьютерных испытаний модели: три ресурса, четыре продукта

№ испытания	Вектор субсидий (3)	Параметр диффузии технологий (2)	Параметр инерции спроса (2)	Вектор цен ресурсов	Вектор предпочтений	Равновесие		
						Вектор цен продуктов	Вектор выпусков	Вектор потребления
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(0;0;0;0)	0	0	(0,084; 0,574; 0,864)	(0,063; 0,355; 0,624; 0,963)	(1,300; 2,059; 0; 0)	(47,09; 32,23; 18,84; 18,64)	(47,09; 32,23; **0,79**; **0,79**)
2	(0;0;0;0)	0	0,01	(0,151; 0,360; 0,721)	(0,587; 0,836; 0,871; 0,878)	(2,863; 1,931; 0; 0)	(91,47; 65,18; 29,52; 30,85)	(91,47; 65,18; **1,60**; **1,44**)
3	(0;0;0;0)	0,1	0	(0,249; 0,670; 0,815)	(0,383; 0,388; 0,642; 0,857)	(6,813; 0; 0; 0)	(53,33; 53,84; 33,15; 44,79)	(53,33; **36,61**; **0,82**; **0,79**)
4	(0;0;0;0)	0,1	0,01	(0,087; 0,094; 0,582)	(0,317; 0,625; 0,920; 1,000)	(7,572; 0; 0; 0)	(41,80; 51,55; 40,55; 47,74)	(41,80; **26,66**; **0,65**; **0,68**)
5	(0,2;0;0;0)	0	0	(0,121; 0,144; 0,628)	(0,022; 0,382; 0,794; 0,974)	(1,574; 0,669; 0; 0)	(81,58; 56,11; 33,91; 22,95)	(81,58; 56,11; **1,24**; **1,20**)
6	(0,2;0;0;0)	0	0,01	(0,742; 0,862; 0,981)	(0,628; 0,641; 0,870; 0,911)	(2,699; 2,604; 0; 0)	(82,76; 53,52; 45,20; 52,83)	(82,76; 53,52; **1,25**; **1,27**)
7	(0,2;0;0;0)	0,1	0	(0,069; 0,294; 0,732)	(0,264; 0,517; 0,820; 0,856)	(8,984; 0; 0; 0)	(49,11; 48,60; 38,41; 52,72)	(49,11; **32,76**; **0,67**; **0,86**)
8	(0,2;0;0;0)	0,1	0,01	(0,144; 0,735; 0,834)	(0,005; 0,220; 0,764; 0,791)	(1,882; 0; 0; 0)	(39,89; 45,63; 32,52; 56,26)	(39,89; **27,86**; **0,67**; **0,71**)
9	(0;0,2;0;0)	0	0	(0,218; 0,649; 0,669)	(0,045; 0,055; 0,578; 0,968)	(2,074; 1,033; 0; 0)	(20,09; 12,13; 9,45; 10,04)	(20,09; 12,13; **0,29**; **0,30**)
10	(0;0,2;0;0)	0	0,01	(0,285; 0,382; 0,672)	(0,125; 0,583; 0,604; 0,746)	(1,923; 0,976; 0; 0)	(73,19; 49,75; 27,22; 18,90)	(73,19; 49,75; **1,24**; **1,31**)
11	(0;0,2;0;0)	0,1	0	(0,304; 0,354; 0,945)	(0,018; 0,078; 0,275; 0,396)	(1,293; 0; 0; 0)	(40,22; 52,10; 32,44; 49,21)	(40,22; **26,25**; **0,59**; **0,64**)
12	(0;0,2;0;0)	0,1	0,01	(0,106; 0,480; 0,500)	(0,022; 0,122; 0,194; 0,496)	(1,265; 0; 0; 0)	(39,06; 49,01; 32,61; 49,06)	(39,06; **25,39**; **0,60**; **0,67**)

Примечание. Полужирным шрифтом выделены объемы потребления, отличающиеся от соответствующих объемов выпуска.

В табл. 6 показаны результаты испытаний модели с тремя ресурсами и четырьмя продуктами. Как и в предыдущих случаях, все 12 найденных локальных оптимумов оказались равновесиями. Третий и четвертый продукты в каждом из них оказались в избытке. Для первых двух продуктов закономерности, отмеченные выше, наблюдаются и здесь. Во всех испытаниях, кроме седьмого, недоиспользуется хотя бы один ресурс — по крайней мере первый. В шести испытаниях недоиспользуются все три ресурса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в статье непараметрическая модель спроса (2) дает возможность, используя первую теорему двойственности в линейном программировании, построить полностью непараметрическую ВМЧР в форме задачи нелинейного программирования (4)–(7). Такая модель еще не обладает удовлетворительными вычислительными свойствами, однако дополнение ее техническим уравнением (11), выполняющимся в любом равновесии, направляет поиск решения к одному из экстремумов, соответствующих равновесию. Проведенные испытания не доказывают универсальности этого приема, но свидетельствуют о возможности направления поиска решения к равновесию при помощи подходящих технических ограничений в некоторых случаях, не обладающих какими-либо особыми признаками.

Успех проведенных испытаний модели (4)–(7) служит предпосылкой создания методики калибровки модели спроса (2) с целью достижения удовлетворительной способности воспроизводить реакцию потребителей на изменение цен. Такая методика может включать подбор параметров функций предпочтения, компонентов векторов $\mathbf{m}_{1i}$ и $\mathbf{m}_{2i}$, а также рекомендуемый способ очистки фактических данных о потреблении от статистических выбросов.

За созданием такой методики последует включение моделей вида (2) в модель (Светлов, Шишкина, 2019) вместо параметрических функций спроса, что ознаменует перевод ее на архитектуру PF+CF+PE+ED, где CF (non-parametric Consumption Frontier) означает непараметрическую границу возможностей потребления. Помимо ожидаемого повышения точности модели спроса в сравнении с нынеприменяемой, это даст возможность пространственной (региональной) дифференциации функций спроса с использованием открытых данных Росстата. В перспективе модели, подобные (4)–(7), могут быть приспособлены к моделированию рынков, соединенных продуктовыми цепями.

Модель (2), преемственная по отношению к моделям непараметрической границы производственных возможностей, наследует их недостаток — чувствительность к шуму в данных наблюдений, лежащих на границе (см., например, (Gstach, 1998, p. 165)). При наличии шума множество, определяемое эмпирической моделью такого типа, с увеличением числа наблюдений сходится не к фактическому потребительскому множеству, а к его некоторому надмножеству. Проявление этого недостатка в контексте ВМЧР предстоит изучить. Можно предположить, что данный эффект может быть частично скомпенсирован калибровкой модели, а статистические выбросы, существенно искажающие потребительское множество, удастся выявлять и устранять при анализе результатов моделирования. Эти предположения предстоит проверить в будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Акаев А.А., Садовничий В.А. (2016). Замкнутая динамическая модель для описания и расчета длинной волны экономического развития Кондратьева // *Вестник Российской академии наук*. Т. 86. № 10. С. 883–896. DOI: 10.7868/S0869587316100029 [**Akaev A.A.**, **Sadovnichiy V.A.** (2016). A closed dynamic model to describe and calculate the Kondratiev long wave of economic development. *Herald of the Russian Academy of Sciences*, 86 (10), 883–896. DOI: 10.7868/S0869587316100029 (in Russian).]

Дементьев В.Е. (2021). Модель интерференции длинных волн экономического развития // *Компьютерные исследования и моделирование*. Т. 13. № 3. С. 649–663. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-649-663 [**Dementiev V.E.** (2021). The model of interference of long waves of economic development. *Computer Research and Modeling*, 13 (3), 649–663. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-649-663 (in Russian).]

Дементьев В.Е., Евсюков С.Г., Устюжанина Е.В. (2020). О важности стратегического подхода при ценообразовании на рынках сетевых благ // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 2 (46). С. 57–71. DOI: 10.31737/2221-2264-2020-46-2-3 [**Dementiev V.E.**, **Evsukov S.G.**, **Ustyuzhanina E.V.** (2020). The importance of a strategic approach to pricing in markets for network goods. *Journal of the New Economic Association*, 46 (2), 57–71. DOI: 10.31737/2221-2264-2020-46-2-3 (in Russian).]

Земцов С.М., Филипцов А.М. (2009). Калибровка функций расходов и прибыли в модели частичного равновесия BEL-ASIM: теоретический аспект // *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия D. Экономические и юридические науки*. № 4. С. 52–58. [**Zemtsov S.M.**, **Filiptsov A.M.** (2009). Calibration of cost and profit functions in partial equilibrium model BEL-ASIM: A theoretical aspect. *Vestnik of Polotsk State University. Part D. Economic and Legal Sciences,* 4, 52–58 (in Russian).]

Киселёв С.В., Ромашкин Р.А., Белугин А.Ю. (2022). Агропродовольственный экспорт России до 2030 г.: прогноз на основе модели частичного равновесия // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 4 (56). С. 69–90. [**Kiselev S.V.**, **Romashkin R.A.**, **Belugin A. Yu.** (2022). Russia's agri-food exports until 2030: Projection from a partial equilibrium model. *Journal of the New Economic Association*, 56 (4), 69–90 (in Russian).]

Полтерович В.М. (1990). Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука. 256 с. [**Polterovich V.M.** (1990). *Economic equilibrium and economic mechanism*. Moscow: Nauka. 256 p. (in Russian).]

Прокопьев М.Г. (2015). Классификация и методические аспекты разработки моделей частичного равновесия // *Региональные проблемы преобразования экономики*. № 6 (56). С. 88–95; № 7 (57). С. 83–91. [**Prokopiev M.G.** (2015). Classification and methodical aspects of developing models of partial balance. *Regional'nye Problemy Preobrazovaniya Ekonomiki*, 6 (56), 88–95; 7 (57), 83–91 (in Russian).]

Светлов Н.М. (2002). На пути к новой концепции стоимости. М.: Издательство МСХА. 108 с. [**Svetlov N.M.** (2002). *Towards a new conception of value*. Moscow: MSKhA (in Russian).]

Светлов Н.М. (2019а). Модели непараметрических границ производственных возможностей: опыт применения в сельском хозяйстве // *Вестник ЦЭМИ*. № 1. Статья 5. 14 с. DOI: 10.33276/S265838870004477-7 [**Svetlov N.M.** (2019a). Non-parametric production frontier models: Experience of agricultural applications. *Vestnik CEMI*, 1, 5. DOI: 10.33276/S265838870004477-7 (in Russian).]

Светлов Н.М. (2019б). Непараметрическая граница производственных возможностей в вычислимой модели частичного равновесия // *Экономика и математические методы*. Т. 55. № 4. С. 104–116. DOI: 10.31857/S042473880006779-5 [**Svetlov N.M.** (2019). Non-parametric production frontier in a computable partial equilibrium model. *Economics and Mathematical Methods*, 55 (4), 104–116. DOI: 10.31857/S042473880006779-5 (in Russian).]

Светлов Н.М., Буць В.И., Карачевская Е.В., Ленькова Р.К., Редько Д.В., Светлова Г.Н., Шафранская И.В., Шафранский И.Н. (2020). Применение математических методов в управлении АПК Беларуси и России. М.: ЦЭМИ РАН. 177 с. DOI: 10.33276/978-5-8211-0782-4 [**Svetlov N.M.**, **Buts' V.I., Karachevskaya E.V., Len'kova R.K., Red'ko D.V., Svetlova G.N., Shafranskaya I.V., Shafranskiy I.N.** (2020). *The use of mathematical methods in the management of agro-industrial complex in Belarus and Russia*. Moscow: CEMI RAS. DOI: 10.33276/978-5-8211-0782-4 (in Russian).]

Светлов Н.М., Шишкина Е.А. (2019). Инновационная модель частичного равновесия в приложении к анализу эффектов изменения климата // *Международный сельскохозяйственный журнал*. № 5. С. 58–60. DOI: 10.24411/2587-6740-2019-11587 [**Svetlov N.M.**, **Shishkina E.A.** (2019). An innovative partial equilibrium model applied to the analysis of effects of climate change. *International Agricultural Journal*, 5, 58–60. DOI: 10.24411/2587-6740-2019-11587 (in Russian).]

Britz W., Witzke P. (eds.) (2014). *CAPRI model documentation 2014*. Bonn: Institute for Food and Resource Economics, University of Bonn. 277 p.

Brown A., Deaton A. (1972). Surveys in applied economics: models of consumer behavior. *The Economic Journal*, 82, 328, 1145–1236.

Chantreuil F., Hanrahan K., Leeuwen M. van (2012). *The future of EU agricultural markets by AGMEMOD*. Dordrecht: Springer. XVI, 128 p. DOI: 10.1007/978-94-007-2291-0

Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429–444.

Drud A. (1992). CONOPT — a large-scale GRG code. *ORSA Journal on Computing*, 6, 207–216.

Drud A. (2023). CONOPT4. *GAMS — Documentation*. GAMS Development Corp., 1547–1581.

Ermolieva T., Havlík P., Ermoliev Yu., Mosnier A., Obersteiner M., Leclère D., Khabarov N., Valin H., Reuter W. (2016). Integrated management of land use systems under systemic risks and security targets: A stochastic global biosphere management model. *Journal of Agricultural Economics*, 67, 3, 584–601. DOI: 10.1111/1477-9552.12173

Farrell M.J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of Royal Statistical Society*: Series A (General), 3, 253–290.

Fock A., Weingarten P., Wahl O., Prokopiev M. (2000). Russia's bilateral agricultural trade: First results of a partial equilibrium analysis. *Russia's Agro-food sector: Towards truly functioning markets* / P. Wehrheim et al. (eds.). Kluwer Academic Publishing, 271–197.

Goldberger A.S., Gamaletsos T. (1970). A cross-country comparison of consumer expenditure patterns. *European Economic Review*, 1, 357–400. DOI: 10.1016/0014-2921 (70)90020-6

Gstach D. (1998). Another approach to data envelopment analysis in noisy environments: DEA+. *Journal of Productivity Analysis*, 9, 2, 161–176. DOI: 10.1023/A:1018312801700

Houthakker H.S. (1965). New evidence on demand elasticities. *Econometrica*, 33, 277–288.

Huppmann D. (2013). Endogenous shifts in OPEC market power — a Stackelberg oligopoly with fringe. *DIW Discussion Papers*, 1313. Berlin: German Institute for Economic Research. 26 p.

Just R.E. (2011). Behavior, robustness, and sufficient statistics in welfare measurement. *Annual Review of Resource Economics*, 3, 33–70. DOI: 10.1146/annurev-resource-040709-135125

Kiselev S., Strokov A., Belugin A. (2016). Projections of Russia's agricultural development under the conditions of climate change. *Studies on Russian Economic Development*, 5, 548–556. DOI: 10.1134/S1075700716050063

Lee J.-D., Hwang S., Kim T.-Y. (2005). The measurement of consumption efficiency considering the discrete choice of consumers. *Journal of Productivity Analysis*, 23, 65–83. DOI: 10.1007/s11123-004-8548-y

Matsumoto M., Nishimura T. (1998). Mersenne twister: A 623-dimensionnally equidistributed uniform pseudorandom number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8 (1), 3–30. DOI: 10.1145/272991.272995

Pollak R.A. (1977). Price dependent preferences. *The American Economic Review*, 67, 2, 64–75.

Ruhnau O., Bucksteeg M., Ritter D., Schmitz R., Böttger D., Koch M., Pöstges A., Wiedmann M., Hirth L. (2022). Why electricity market models yield different results: Carbon pricing in a model-comparison experiment. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 153. Paper 111701. DOI: 10.1016/j.rser.2021.111701

Savvidis G., Siala K., Weissbart C., Schmidt L., Borggrefe F., Kumar S., Pittel K., Madlener R., Hufendiek K. (2019). The gap between energy policy challenges and model capabilities. *Energy Policy*, 125, 503–520. DOI: 10.1016/j.enpol.2018.10.033

Svetlov N.M., Siptits S.O., Romanenko I.A., Evdokimova N.E. (2019). The effect of climate change on the location of branches of agriculture in Russia. *Studies on Russian Economic Development*, 30, 4, 406–418. DOI: 10.1134/S1075700719040154

Thompson R.G., Langemeier L.N., Lee C., Lee E., Thrall R.M. (1990). The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. *Journal of Econometrics*, 46, 93–108.

Computer testing of a non-parametric partial equilibrium model prototype[16]

N.M. Svetlov,
Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences (CEMI RAS), Moscow, Russia; e-mail: nikolai.svetlov@gmail.com

Received 08.02.2023

Abstract. On the basis of non-parametric formulations of the production program problem (previously known) and the consumer choice problem (new), a computable partial equilibrium model with a non-parametric representation of both supply and demand is proposed. In this model the problems of the producer and the consumer are represented by simultaneous inequalities of the dual problems pair. This converts the problem of finding an equilibrium to minimizing the differences between objective functions in each pair, summarized over producers and consumers. Such a problem, however, may have multiple local optima. Computer tests on artificial data sets confirmed that inserting such "technical" constraints into a computable model, that are always valid in an equilibrium, can effectively direct the search for a solution using the CONOPT4 procedure to the global optimum (to which the sought equilibrium corresponds). In all 36 tests carried out, equilibrium solutions were found on the first try. The result obtained is of significant importance for the creation of tools used at the sectoral level in managing the unstable economic dynamics that are characteristic of periods of change in systems of dominant technologies. Such tools will make better use of the information in the original empirical data.

Keywords: partial equilibrium, computable model, nonparametric production frontier, nonparametric consumption frontier, first duality theorem, computer-aided testing.

JEL Classification: C02, C14, C63.

For reference: **Svetlov N.M.** (2023). Computer testing of a non-parametric partial equilibrium model prototype. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 100–111. DOI: 10.31857/S042473880025862-7

[16] Computer testing of the model was carried out using the infrastructure of VIAPI named after A.A. Nikonov — branch of the FS-BSIFRC AESDRA VNIIESH. The author is grateful to the management and the entire staff of the Branch for the opportunity to complete this part of the study.