
ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Об упрощениях решения транспортных задач с экологическим критерием

© 2023 г. В.Н. Ассаул, И.Е. Погодин

В.Н. Ассаул,

*Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург;
e-mail: vicvic21@yandex.ru*

И.Е. Погодин,

*Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ «ВМА», Санкт-Петербург;
e-mail: iepogodin@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.01.2023

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за обстоятельный, конструктивный анализ работы, а также всему коллективу редколлегии и редакции ЭММ, своим добросовестным, оперативным трудом создавшим журналу авторитет и международное признание высокого научного уровня.

Аннотация. Проанализирована возможность пренебрежения штрафной составляющей при решении транспортной задачи (ТЗ) с экологическим критерием, когда наряду со сделанной оплатой назначаются фиксированные добавки, обусловленные фактом конкретной перевозки, а не объемом перевозимого груза (штрафы). Обнаружено, что в то время как пороговые отношения средних квадратических отклонений тарифов и штрафов в ТЗ с единственным оптимальным планом могут группироваться довольно плотно, в ТЗ с неединственным оптимальным планом их использование мало эффективно из-за большого разброса. Однако возможность применения предложенного авторами метода зацикливаний, когда многократно решается ТЗ, в которой к тарифам добавляются штрафы, деленные сначала на максимально допустимую перевозку, затем на план перевозки на предыдущем шаге, позволяет пренебречь штрафами, если зацикливание завершается на первом шаге. Недостатком и причиной приближенного характера метода зацикливаний является возможное наличие других циклов с локальными минимумами. Рассмотрен метод исключений, когда для ТЗ с n поставщиками и m заказчиками исключаются клетки по убыванию штрафов при достаточности остающихся частей мощностей и емкостей. Распределение перевозок после $R=(nm - (n+m - 1))$ шагов позволяет не учитывать тарифов при выборе плана. Недостатком этого метода, равноценного распределению по минимальным затратам, являются затруднения при расстановке перевозок после R шагов исключений, сделанных в предположении насыщенного использования клеток.

Ключевые слова: транспортная задача, экологический критерий, тариф, штраф, оптимальный план, предельно допустимое значение.

Классификация JEL: C02, C44, C54, C65.

Для цитирования: Ассаул В.Н., Погодин И.Е. (2023). Об упрощениях решения транспортных задач с экологическим критерием // Экономика и математические методы. Т. 59. № 2. С. 122–127. DOI: 10.31857/S042473880025864-9

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от классического варианта транспортной задачи (ТЗ), ТЗ с экологическим критерием (или ТЗ с фиксированными доплатами) (Ассаул, Погодин, 2019, 2022; Balinski, 1961; Бирман, 1968; Корбут, Финкельштейн, 1969; Поляк, 1966; Седова, Лебедев, 1999, 2001; Сигал, Иванова, 2007; Фролькис, 2002; Хоанг, 1964) предусматривает дополнительные платежи $d_{i,j}$ (штрафы), которые не зависят от объемов перевозок $E_{i,j}$ и назначаются только за использование конкретных перевозок от поставщика i потребителю j , где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, n и m — число поставщиков и заказчиков соответственно. Эти задачи актуальны как для теории оптимизации, так и для оптимального планирования.

Поскольку решение ТЗ с экологическим критерием порождает много проблем и точный путь их преодоления в общем случае до сих пор неизвестен, то высок интерес к исследованию исключения влияния штрафной компоненты $d_{i,j}$ при выборе оптимального плана полной задачи с заданными штрафами.

Очевидно, что средние (по ансамблю перевозок) значения как тарифов $c_{i,j}$, так и штрафов $d_{i,j}$ должны влиять только на подсчитываемые в конце решения экономические показатели суммарных затрат при выбранных оптимальных планах ТЗ. Выбор планов задачи связан с переменными по ансамблю частями тарифов ($c_{i,j} - \text{prices}$) и штрафов ($d_{i,j} - \text{penalty}$), которые будем характеризовать, например, их средними квадратичными отклонениями (СКО), точнее, соотношениями между ними ($\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}}$). В частности, можно надеяться, что эти соотношения позволят выделить ситуации, в которых удастся элементарными способами строить оптимальные планы ТЗ без учета штрафов $d_{i,j}$.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И РАСЧЕТА

Очевидно, что очень малые штрафы в ТЗ с экологическим критерием не могут изменить оптимального плана задачи, найденного без учета штрафов. Поэтому рассмотрим, какие предельные средние характеристики системы штрафов могли бы нарушить это утверждение. Иными словами, попытаемся найти количественную меру допустимой малости штрафов на уровне выбора оптимального плана задачи, а для этого отыщем ситуации, когда добавление штрафов не изменяет оптимального плана ТЗ, найденного без штрафов.

На практике возможны ситуации, когда при постоянных штрафах все же требуется изменить оптимальный план ТЗ без штрафов. Так бывает, если ТЗ имеет вырожденные (использующие меньше, чем $(n + m - 1)$ ячеек) неоптимальные планы, увеличивающие суммарные затраты меньше, чем на величину постоянных штрафов, умноженных на число ячеек с нулевыми перевозками в вырожденном плане. Вырожденные планы могут появиться, например, при наличии групп партнеров, в которых суммарная мощность нескольких поставщиков равна суммарной емкости нескольких заказчиков. Выявив такие группы партнеров, общий вырожденный план ТЗ можно найти как суперпозицию планов сокращенных ТЗ для групп партнеров и ТЗ без выделенных групп.

Приведем несколько примеров, характеризуемых СКО-тарифов $(c_{i,j})\sigma_{\text{price}}$ и СКО-штрафов $(d_{i,j})\sigma_{\text{penalty}}$, когда для тарифов, умноженных на различные масштабирующие коэффициенты $\mu = 0,8; 1,6$ (табл. 1, левая часть), указывались штрафы $d_{i,j}$ (табл. 1, правая часть), для которых подбирались такие наименьшие значения $\lambda_{\text{кр}}$ масштабирующих коэффициентов λ , при которых уже требовалось переходить к новому оптимальному плану для решения полной ТЗ (с учетом штрафов), отличному от имевшегося плана $\{E_{i,j}\}$. Введение в линейных выражениях для штрафов малого (изначально $\alpha = 0$) параметра α для обнаружения неединственных оптимальных планов объясняется позже.

Для сохранения СКО постоянными будем только изменять различными способами расстановку одних и тех же ценовых значений внутри табл. 1.

Исходная ТЗ в табл. 1 имеет единственный оптимальный план $\{E_{i,j}\}$ (ячейки, выделенные полужирным шрифтом). Предельно допустимые отношения СКО-штрафов за счет коэффициента $\lambda_{\text{кр}}$ при значениях штрафов $d_{i,j}$ (правая часть табл. 1) к СКО-тарифов $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}}$ составили не более: 5,7 — для исходной табл. 1; 2,4 — при перестановке местами мощностей A_i ; 3,6 — при циклической перестановке строк тарифов $c_{i,j}$ в левой части таблицы; 4,3 — при циклической перестановке строк штрафов $d_{i,j}$ в правой части, причем независимо от величины коэффициента μ . Здесь задача табл. 1 проявилась как линейная с близким при различных вариациях условий уровнем предельно допустимого отношения СКО $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}}$.

ТЗ может иметь несколько равноценных оптимальных планов. При этом наличие в упрощенной ТЗ (без штрафов) более одного равноценного нескольких оптимальных планов связано с набором

Таблица 1

$A_i \backslash B_j$	15	20	25		15	20	25
10	5 μ	3 μ	1 μ 10		$\alpha + \lambda \cdot 20$	$\alpha + \lambda \cdot 45$	$\alpha + \lambda \cdot 29$
20	3 μ 15	2 μ 5	4 μ		$\alpha + \lambda \cdot 39$	$\alpha + \lambda \cdot 50$	$\alpha + \lambda \cdot 36$
30	4 μ	1 μ 15	2 μ 15		$\alpha + \lambda \cdot 60$	$\alpha + \lambda \cdot 22$	$\alpha + \lambda \cdot 54$
Мощности	Тарифы $c_{i,j}$ и оптимальный план $x_{i,j}$				Штрафы $d_{i,j}$		

конкретных значений тарифов $c_{i,j}$ и сохраняется при рассмотренных изменениях расположения этих значений в конкретных клетках таблицы. В различных ситуациях изменяются только сами оптимальные планы, которые позволяют обнаружить предложенный в (Ассаул, Погодин, 2019) и используемый в (Ассаул, Погодин, 2022) алгоритм заикливания с процедурой Minimize в пакете Mathcad.

Суть метода заикливания заключается в том, что первоначально решается элементарная ТЗ, в платежной таблице которой (подобно методу (Balinski, 1961)) все тарифы заменяются на модифицированные:

$$CM_{i,j} = c_{i,j} + d_{i,j} / \min(A_i, B_j), \quad (1)$$

где CM — новые значения тарифов $c_{i,j}$. Затем — в отличие от (Balinski, 1961) — многократно, до появления эффекта заикливания, т.е. до повторения получаемых планов, решается та же ТЗ, где на шаге $k+1$ устанавливаются тарифы

$$CM_{i,j,(k+1)} = c_{i,j} + d_{i,j} / x_{i,j,k}, \quad (2)$$

где $x_{ij,k}$ — перевозка, назначенная в k -плане ТЗ в клетку оптимального плана с адресом (i, j) . После получения заикливания подсчитываются полные фактические затраты на перевозки для каждого шага с учетом штрафов. В качестве оптимального плана выбирается тот, который обеспечивает минимум затрат.

Предложенный алгоритм заикливания обладает интересной особенностью. А именно при очевидном факте независимости оптимальных планов полной ТЗ от постоянных величин α , прибавляемых ко всем штрафам в ТЗ (см. табл. 1), этот метод позволяет получить несколько различных равноценных оптимальных планов ТЗ: один — при $\alpha = 0$ и еще один или два — в противном случае (при $\alpha > 0,001$). Такая возможность появляется благодаря преобразованиям (1), (2), вносящим искусственную дифференциацию долей вкладов штрафов по различным клеткам. В ТЗ с единственным оптимальным планом (см. табл. 1) этот план получается при любых значениях α .

Метод заикливания может применяться к решению полной ТЗ (Ассаул, Погодин, 2019, 2022), однако недостаток и причина его приближенного характера заключаются в том, что помимо работающего цикла планов может существовать непересекающееся с ним подмножество планов ТЗ с другим локальным оптимальным планом.

Так, полученный методом заикливания план ТЗ в примере табл. 2 дает сумму перевозок в 338 единиц. В то же время эта ТЗ имеет другой непересекающийся цикл планов с другими оптимальными планами (значения, указанные через «/» в табл. 2) и суммой 337 единиц (локальный минимум).

В упрощенной ТЗ по оценкам с помощью отношения их СКО ($\sigma_{penalty} / \sigma_{price}$) при других найденных оптимальных планах, отличных от выделенного, допустимая оценка СКО-штрафов может составлять лишь ничтожную часть от СКО-тарифов (например, менее 10^{-5}), т.е. исключать штрафы при использовании других оптимальных планов исходной задачи нельзя!

Те же вариации условий расстановки тарифов $c_{i,j}$, проделанные в задаче табл. 1, были повторены для задачи, имеющей несколько оптимальных планов, с другими мощностями A_i , емкостями B_j и тарифами $c_{i,j}$, но с теми же штрафами $d_{i,j}$ в шести рассмотренных случаях и дали предельно допустимые отношения СКО ($\sigma_{penalty} / \sigma_{price}$), приведенные в табл. 3.

При наличии нескольких равноценных оптимальных планов ТЗ без штрафов (значения оптимальных перевозок одного из планов $\{E_{i,j}\}$ указаны рядом с тарифами используемых клеток $c_{i,j}$):

Таблица 2

$A_i \backslash B_j$	6	10	19
8	4 30 1/0	10 20 /1	7 15 7/7
12	11 25	8 40	5 35 12/12
15	9 18 5/6	6 22 10/9	12 42

Таблица 3

$A_i \backslash B_j$	9	18	23		9	18	23
16	9 μ	4 μ 16	7 μ		$\alpha + \lambda 20$	$\alpha + \lambda 45$	$\alpha + \lambda 29$
22	5 μ	3 μ 2	6 μ 20		$\alpha + \lambda 39$	$\alpha + \lambda 50$	$\alpha + \lambda 36$
12	1 μ 9	8 μ	2 μ 3		$\alpha + \lambda 60$	$\alpha + \lambda 22$	$\alpha + \lambda 54$
Мощности	Тарифы $c_{i,j}$ и оптимальный план $x_{i,j}$				Штрафы $d_{i,j}$		

1) $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}} \leq 281 \div 303$, $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}} \leq 10 \div 13$ получаются в двух вариантах циклических перестановок строк тарифов $c_{i,j}$ в левой части табл. 3, в то время как в третьем варианте один из трех равноценных оптимальных по тарифам планов случайно исключает клетки с самыми большими штрафами, что допускает их неограниченное увеличение (или пропорциональное увеличение штрафов во всех клетках);

2) $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}} \leq 28 \div 57$ — при циклической перестановке строк штрафов $d_{i,j}$ в правой части табл. 3;

3) $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}} \leq 23 \div 5$ — при транспонировании таблицы тарифов (один из двух равноценных планов),

4) $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}} \leq 12 \div 14$ — при перестановке мощностей A_i в табл. 3.

Здесь, в отличие от ТЗ в табл. 1 с единственным оптимальным планом (с максимумом предельно допустимого отношения $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}} = 2 \div 5$), разброс значений $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}}$ составляет два порядка и определяющие его факторы обнаружить не удается.

Анализ противоположной предельной ситуации поиска оценок максимальных СКО-тарифов, при которых ими можно пренебречь, сохраняя в качестве оптимального план ТЗ, полученный только с учетом штрафов, приводит к порогу $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}} \geq 288$ по табл. 1 и $\sigma_{\text{penalty}} / \sigma_{\text{price}} \geq 18$ по табл. 3.

Приведем возможный и, казалось бы, достаточно логичный алгоритм решения ТЗ только со штрафами (метод исключений). Этот метод можно было бы применять также для получения приближенного оптимального плана при относительно малой тарифной составляющей по сравнению со штрафной. Для этого достаточно вместо фактических значений штрафов использовать модифицированные величины $DM_{i,j} = d_{i,j} + c_{i,j} \min(A_i, B_j)$.

Суть метода исключений состоит в том, что для нахождения оптимального плана ТЗ только по штрафной компоненте можно последовательно удалять клетки с большими штрафами в порядке их убывания при условии, что после каждого такого исключения остающихся в соответствующих строке и столбце сумм величин $\min(A_i, B_j)$ будет достаточно для обеспечения требуемых мощности A_i и емкости B_j . Так, следует удалить не более чем $nm - (n + m - 1)$ клеток, а в оставшихся — разместить оптимальный план перевозок.

Приведем недостатки метода исключений.

1. Условие исключения клеток с большими штрафами по остающимся в соответствующих строке и столбце суммам значений $\min(A_i, B_j)$ предполагает насыщенное ($x_{i,j} = \min(A_i, B_j)$) использование этих клеток. Однако полученный в итоге план может содержать также и ненасыщенное ($x_{i,j} < \min(A_i, B_j)$) использование некоторых клеток, т.е. требует изменения правила отбора исключавшихся клеток с большими штрафами, которое (как следствие) привело бы к другому плану.

2. На оставшихся клетках после такого грубого исключения больших штрафов не удастся построить распределения поставок, удовлетворяющего заданным мощностям и емкостям.

Метод исключений, примененный к примеру, показанному в табл. 3, дает тот же оптимальный план, что и метод закикливаний в ТЗ с нулевыми тарифами. Он может с успехом использоваться и при больших размерах ТЗ (5×5 и больше).

Метод исключений для ТЗ размером 4×4 представлен в табл. 4. В угловых скобках стоят исключенные большие штрафы, в фигурных — избежавшие исключения из-за дефицита остающихся возможностей перевозок (так, например, клетка (2, 2) сохранена для обеспечения предложения второго

Таблица 4

$A_i \backslash B_j$	18	11	13	7
10	<40> (10)	10 (10) 10	<25> (10)	<30> (7)
20	18 (18) 18	{27} (11) 1	<35> (13) 1	<37> (7)
8	<32> (8)	<33> (8)	23 (8) 1	19 (7) 7
11	<43> (11)	<34> (11)	23 (11) 11	19 (7)

поставщика A_2); в круглых — значения $\min(A_i, B_j)$); полужирным шрифтом указаны оптимальные перевозки плана.

После исключения 9 клеток с большими штрафами здесь не удастся расставить плана необходимых перевозок. Метод исключений приводит к плану, требующему замены перевозки в ранее исключенной клетке (2, 3) вместо клетки (4, 4), что дает минимум суммарных затрат в 155 единиц вместо формально ожидавшихся 139 единиц. Причина этого в неверном решении исключить клетки (2, 3), делавшемся в предположении о полной загрузке (насыщении) клетки (2, 2).

Следует сказать, что метод исключений по сути соответствует классическому методу распределений по наименьшим затратам, только примененному в обратном направлении. В ТЗ табл. 4 оба подхода дают один и тот же результат, затраты по которому, однако, превышают истинно оптимальные на 10 единиц.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Из рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы.

Если на практике считать инфляцию как пропорциональное увеличение тарифов и штрафов ($\lambda = \mu$, $\alpha = 0$), то устоявшиеся ранее логистические системы организации перевозок, в которых оптимальный план строился только с учетом тарифов, могут утратить свойство оптимальности, если инфляция превысит некоторое значение (т.е. нарушится условие $\lambda = \mu$).

Как было замечено в ТЗ из табл. 3, в случае неединственности оптимального плана СКО не является достаточным параметром для непосредственного заключения о возможности не учитывать штрафов при отыскании оптимального плана полной задачи. Это тесно связано со свойствами (структурой) как конкретных таблиц тарифов, так и таблиц штрафов. Однако предложенный метод зацикливаний по первому его применению позволяет точно заключить, можно ли так поступить (если оптимальный план задачи без штрафов и со штрафами совпадают после первого шага).

В остальных случаях, когда нет оснований полностью пренебречь штрафами при выборе оптимального плана, остаются следующие возможности:

— пренебрегать штрафами, если их суммарный вклад мал хотя бы по сравнительным оценкам их средних значений

$$Ro = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_i \min(A_i, B_j) \right) / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{i,j}, \text{ или } R = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j} \right) / nm,$$

где $R_{i,j} = c_{i,j} \min(A_i, B_j) / d_{i,j}$, где R и Ro — это некие суммы, интегрально характеризующие ТЗ;

— учитывать штрафы при поиске оптимальных планов полной задачи с экологическим критерием, в частности, с помощью предложенного в (Ассаул, Погодин, 2019, 2022) приближенного, однако достаточно простого на практике метода зацикливаний. Недостатком и причиной приближенного характера этого метода зацикливаний является возможное наличие других циклов планов с локальными минимумами;

— в предельном случае очень малых тарифов методы зацикливаний (Ассаул, Погодин, 2019, 2022) и исключений¹ также позволяют найти оптимальный план, учитывая только штрафы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Ассаул В.Н., Погодин И.Е. (2019). О транспортной задаче с экологическим критерием // *Экономика и математические методы*. Т. 55. № 2. С. 58–64. [Assaul V.N., Pogodin I.E. (2019). About the transport task with environmental criteria. *Economics and Mathematical Methods*, 55 (2), 58–64 (in Russian).]

Ассаул В.Н. Погодин И.Е. (2022). Об одном практическом способе решения транспортной задачи с «экологическим» критерием // *Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика*. № 3. С. 3–13. [Assaul V.N., Pogodin I.E. (2022). On one practical way to solve the transport problem with an “environmental” criterion. *BSU bulletin. Mathematics, Informatics*. 3, 3–13 (in Russian).]

Бирман И.Я. (1968). Оптимальное программирование. М.: Экономика. 231с. [Birman I.Ya. (1968). *Optimal programming*. Moscow: Ekonomika. 231p. (in Russian).]

¹ Недостатком метода исключений являются возможные затруднения при расстановке перевозок после $(nm - (n + m - 1))$ -шагов исключений.

- Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. (1969). Дискретное программирование. М.: Наука. 368 с. [Korbut A.A., Finkelstein Yu.Yu. (1969). *Discrete programming*. Moscow: Nauka. 368 p. (in Russian).]
- Поляк Р.А. (1966). Об одной неоднородной транспортной задаче. В сб.: «Математические модели и методы оптимального планирования». Новосибирск: Наука. С. 109–115. [Polyak R.A. (1966). On one heterogeneous transport problem. In: *Mathematical models and methods of optimal planning*. Novosibirsk: Nauka, 109–115 (in Russian).]
- Седова С.В., Лебедев С.С. (1999). Решение одной задачи размещения с использованием узловых векторов разрешающих множителей // *Экономика и математические методы*. Т. 35. № 3. С. 116–121. [Sedova S.V., Lebedev S.S. (1999). Solution of one placement problem using nodal vectors of resolving factors. *Economics and Mathematical Methods*, 35 (3), 116–121 (in Russian).]
- Седова С.В., Лебедев С.С. (2001). Метод узловых векторов целочисленного программирования. 2. Задачи специального вида. Препринт ЦЭМИ. WP/2000/094. 88 с. [Sedova S.V., Lebedev S.S. (2001). Nodal vector method for integer programming. 2. Problems of a special type. *CEMI preprint*. WP/2000/094. 88 p. (in Russian).]
- Сигал И.Х., Иванова А.П. (2007). Введение в прикладное и дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М.: Физматлит. С. 45–49. [Sigal I.Kh., Ivanova A.P. (2007). *Introduction to applied and discrete programming: Models and computational algorithms*. Moscow: Fizmatlit, 45–49 (in Russian).]
- Фролькис В.А. (2002). Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. СПб: Питер. 320 с. [Frolkis V.A. (2002). *Introduction to the theory and methods of optimization for economists*. Saint Petersburg: Piter. 320 p. (in Russian).]
- Хоанг Т. (1964). Вогнутое программирование при линейных ограничениях // *Доклады Академии наук СССР*. Т. 159. № 1. С. 32–35. [Hoang T. (1964). Concave programming under linear restrictions. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 159, 1, 32–35 (in Russian).]
- Balinski M.L. (1961). Fixed cost transportation problem. *Naval Res. Log. Quart.*, 8, 1, 41–54.

On simplification of the transport problem solution with ecological criterion

© 2023 V.N. Assaul, I.E. Pogodin

V.N. Assaul,

Saint Petersburg State Aerospace Technologies University, Saint Petersburg, Russia; e-mail: vicvic21@yandex.ru

I.E. Pogodin,

Naval Polytechnical Institute, Saint Petersburg, Russia; e-mail: iepogodin@mail.ru

Received 18.01.2023

The authors express their sincere gratitude to the Reviewer for a detailed, constructive analysis of the work, as well as to the entire staff of the EMM Editorial board, who, with their conscientious, prompt work, created the authority and international recognition of a high scientific level for the Journal.

Abstract. The possibility of neglecting the penalty component in solving the transport problem (TP) with an environmental criterion is analyzed, when, along piece-rate payment, fixed additives are assigned, due only to the fact of a specific transportation, and not to the amount of transported cargo (penalties). It was found that, while the threshold ratios of the standard deviations of tariffs and fines in a TP with a single optimal plan can be grouped quite tightly, in a TP with a non-unique optimal plan, their use is not effective due to the large spread. However, the possibility of applying the “looping” method proposed by the authors, when the TP is solved many times, in which penalties are added to the tariffs, divided first by the maximum possible transportation, then by the transportation plan at the previous step allows neglecting the “penalties” if the loop ends at the first step. The disadvantage and reason for the approximate nature of the “looping” method is the possible presence of other cycles with local minima. The possibility of the “exclusions” method presented in the paper is also considered, when for a TK with n suppliers and m customers cells are excluded in descending order of fines if the remaining parts of capacities and capacities are sufficient. The ability to distribute transportation after $R = (nm - (n + m - 1))$ steps allows you to ignore tariffs when choosing a plan. The disadvantage of this method, equivalent to allocative least cost method is the possible difficulty in arranging transportations after R steps of exclusion made under the assumption of a “saturated” use of cells.

Keywords: transport problem, environmental criterion, tariff, fine, optimal plan, maximum possible value.

JEL Classification: C02, C44, C54, C65.

For reference: Assaul V.N., Pogodin I.E. (2023). On simplification of the transport problem solution with ecological criterion. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 122–127. DOI: 10.31857/S042473880025864-9