

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ИГРЫ ТРЕХ ЛИЦ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ОПЫТ)

© 2017 г. Е.Г. Гольштейн¹, У.Х. Малков², Н.А. Соколов³

(Москва)

Аннотация. Дано краткое описание предложенного Е.Г. Гольштейном приближенного метода решения конечной бескоалиционной игры трех лиц в смешанных стратегиях. Поиск решения игры сводится к итеративному поиску глобального минимума так называемой функции Нэша, являющейся мерой близости точки к множеству решений игры и имеющей большое число локальных минимумов, не совпадающих с глобальным минимумом. Тем не менее, минимизация этой функции по одной из трех переменных (стратегий) при фиксации двух других переменных легко сводится к линейному программированию. Осуществляя перебор начальных пар чистых стратегий и решая на каждой итерации три задачи линейного программирования, метод отыскивает точное решение игры, если выполнено условие дополненности, либо приемлемое приближение к множеству точек Нэша при незначительном нарушении условия дополненности. Численное тестирование метода на двух семействах сгенерированных игр выявило его достоинства и недостатки. Предлагаемый метод эффективен при независимых или мало зависимых таблицах, определяющих выигрыши игроков. При росте коэффициента взаимозависимости таблиц эффективность метода снижается.

Ключевые слова: бескоалиционная игра, точка Нэша, конечная игра, чистая стратегия, смешанная стратегия, приближенный метод, численное тестирование, линейное программирование.

Классификация JEL: C02, C72.

В работе (Гольштейн, 2014) был предложен приближенный численный метод решения конечных бескоалиционных игр трех лиц в смешанных стратегиях. В его основе лежит итеративный поиск глобального минимума некоторой функции, причем на каждой итерации метода решаются три задачи линейного программирования. Вопросы тестирования и эффективности метода в работе (Гольштейн, 2014) не ставились, новое исследование позволило дать ответ на эти вопросы.

Рассмотрим конечную бескоалиционную игру Γ трех лиц, предполагая, что игроки 1, 2 и 3 располагают, соответственно, m , n и l стратегиями. Пусть (a_{ijk}) , (b_{ijk}) и (c_{ijk}) — три таблицы, определяющие выигрыши игроков 1, 2 и 3, использующих стратегии i ($1 \leq i \leq m$), j ($1 \leq j \leq n$) и k ($1 \leq k \leq l$) соответственно. Без ограничения общности можно считать все элементы этих трех таблиц положительными.

Поскольку Γ — выпуклая игра, ее множество Ω^* точек Нэша непусто, хотя и не обязательно выпуклым множеством. Наличия у игры Γ выпуклой структуры не предполагается (Гольштейн, 2014).

Конечная игра Γ трех игроков в смешанных стратегиях определяется тремя трехмерными таблицами и характеризуется множествами стратегий

$$\begin{aligned} X &= \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{E}^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m \right\}, \\ Y &= \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{E}^n : \sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \right\}, \\ Z &= \left\{ z = (z_1, \dots, z_l) \in \mathbf{E}^l : \sum_{k=1}^l z_k = 1, \quad z_k \geq 0, \quad 1 \leq k \leq l \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

и функциями выигрышей игроков

¹ Евгений Григорьевич Гольштейн — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией ЦЭМИ РАН, Москва; golshn@cemi.rssi.ru.

² Устав Херманович Малков — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ЦЭМИ РАН, Москва.

³ Николай Александрович Соколов — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ РАН, Москва; sokolov@cemi.rssi.ru.

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l a_{ijk} x_i y_j z_k, \quad f_2(x, y, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l b_{ijk} x_i y_j z_k, \\
f_3(x, y, z) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l c_{ijk} x_i y_j z_k,
\end{aligned} \tag{2}$$

заданными на компакте $\Omega = X \times Y \times Z$ евклидова пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}^m \times \mathbf{E}^n \times \mathbf{E}^l$.

Ввиду специфики компакта Ω и функций выигрышей $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ и $f_3(\omega)$ для любой точки $\omega = (x, y, z) \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned}
0 &\leq \max_{x \in X} f_1(x, y, z) - f_1(\omega) \equiv \delta_1(\omega) \equiv \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l a_{ijk} y_j z_k - f_1(\omega), \\
0 &\leq \max_{y \in Y} f_2(x, y, z) - f_2(\omega) \equiv \delta_2(\omega) \equiv \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l b_{ijk} x_i z_k - f_2(\omega), \\
0 &\leq \max_{z \in Z} f_3(x, y, z) - f_3(\omega) \equiv \delta_3(\omega) \equiv \max_{1 \leq k \leq l} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ijk} x_i y_j - f_3(\omega).
\end{aligned} \tag{3}$$

При помощи функций $\delta_r(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $r = 1, 2, 3$, заданных формулами (3), для игры Γ вводится стандартная (ненормированная) функция Нэша

$$F(\omega) = \sum_{r=1}^3 \delta_r(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{4}$$

Из (3), (4) и определения точки Нэша игры Γ следует, что $F(\omega) \geq 0$ для всех $\omega = (x, y, z) \in \Omega$ и что $F(\omega) = 0$ в том и только в том случае, если ω является точкой Нэша игры Γ . Значит, множество глобальных точек минимума функции $F(\omega)$ на Ω совпадает с множеством Ω^* точек Нэша игры Γ , причем значение минимума равно нулю. Таким образом, решение игры Γ оказывается эквивалентным поиску точек глобального минимума функции $F(\omega)$ на множестве Ω , и $F(\omega)$ можно считать естественной мерой отклонения точки ω от множества Ω^* .

Хотя задача минимизации функции $F(\omega)$ по $\omega \in \Omega$ весьма сложна из-за наличия у нее многочисленных локальных минимумов, не совпадающих с глобальным, минимизация этой функции по одной из трех переменных, составляющих вектор ω , при фиксации двух других переменных легко сводится к линейному программированию.

Зафиксируем пару векторных переменных (y, z) значениями $y = y' = (y'_1, \dots, y'_n) \in Y$, $z = z' = (z'_1, \dots, z'_l) \in Z$ и рассмотрим задачу линейного программирования $P_1(y', z')$ с $m + 2$ переменными (x, α_1, α_2) , $n + l$ ограничениями-неравенствами и одним ограничением-равенством:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l -d_{ijk} y'_j z'_k \right) x_i + \alpha_1 + \alpha_2 &\rightarrow \min, \\
\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n c_{ijk} y'_j \right) x_i &\leq \alpha_1, \quad k = 1, \dots, l, \\
\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^l b_{ijk} z'_k \right) x_i &\leq \alpha_2, \quad j = 1, \dots, n, \\
\sum_{i=1}^m x_i &= 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{E}^1,
\end{aligned} \tag{5}$$

где d_{ijk} — сумма таблиц, определяющих функции выигрышей трех игроков, $d_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk} + c_{ijk}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq l$. Обозначим $x^* = x^*(y', z')$ первые m компонент оптимального плана задачи (5), тогда $F(x^*, y', z') \leq F(x', y', z')$ для любой точки $x' \in X$.

Аналогичным образом, зафиксировав другую пару переменных значениями $x = x' \in X$, $z = z' \in Z$, введем задачу линейного программирования $P_2(x', z')$ с $n + 2$ переменными (y, β_1, β_2) , $l + m$ ограничениями-неравенствами и одним ограничением-равенством:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l -d_{ijk} x'_i z'_k) y_j + \beta_1 + \beta_2 &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m c_{ijk} x'_i) y_j &\leq \beta_1, \quad k = 1, \dots, l, \\ \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^l b_{ijk} z'_k) y_j &\leq \beta_2, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n y_j &= 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{E}^1. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $y^* = y^*(x', z')$ – первые n компонент оптимального плана задачи $P_2(x', z')$. Очевидно, $F(x', y^*, z') \leq F(x', y', z')$ для произвольной точки $y' \in Y$.

Наконец, зафиксировав третью пару переменных значениями $x = x' \in X$, $y = y' \in Y$, получим задачу линейного программирования $P_3(x', y')$ с $l + 2$ переменными (z, γ_1, γ_2) , $m + n$ ограничениями-неравенствами и одним ограничением-равенством:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l (\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n -d_{ijk} x'_i y'_j) z_k + \gamma_1 + \gamma_2 &\rightarrow \min, \\ \sum_{k=1}^l (\sum_{i=1}^m b_{ijk} x'_i) z_k &\leq \gamma_1, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^l (\sum_{j=1}^n a_{ijk} y'_j) z_k &\leq \gamma_2, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^l z_k &= 1, \quad z_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{E}^1. \end{aligned} \quad (7)$$

Решив задачу (7) и обозначив z^* первые l компонент ее оптимального плана, получим неравенство $F(x', y', z^*) \leq F(x', y', z')$ для любой точки $z' \in Z$.

Пусть Ω' – множество точек $\omega^* \in \Omega$, являющихся точками локального минимума функции $F(\omega)$ на Ω , а множество Ω'' состоит из таких точек $\omega^* = (x^*, y^*, z^*) \in \Omega$, что x^* – решение задачи $P_1(y^*, z^*)$, y^* – решение задачи $P_2(x^*, z^*)$ и z^* – решение задачи $P_3(x^*, y^*)$. Имеет место включение $\Omega^* \subset \Omega' \subset \Omega''$, где Ω^* – введенное ранее множество точек Нэша игры Γ , или множество точек глобального минимума функции $F(z)$ на Ω .

Можно показать, что любая точка $\omega^* = (x^*, y^*, z^*)$, принадлежащая множеству Ω'' , содержится в множестве Ω' , если хотя бы одна из задач $P_1(y^*, z^*)$, $P_2(x^*, z^*)$, $P_3(x^*, y^*)$ имеет единственное решение (Гольштейн, 2014). Поэтому точки из множества $\Omega'' \setminus \Omega'$ попадают довольно редко.

Решая задачи (5)–(7) в определенном порядке, можно существенно уменьшить значение функции Нэша. Далее мы будем строить последовательности пар стратегий, для которых характерно монотонное невозрастание функции Нэша вида (4). Начальные элементы этих последовательностей будем называть *стартовыми парами стратегий*.

В нашем методе в качестве стартовых пар используются пары чистых стратегий игроков. Следовательно, множество стартовых пар стратегий $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, где $H_1 = \{(y^0, z^0): y^0 \in Y^0, z^0 \in Z^0\}$, $|H_1| = nl$, $H_2 = \{(x^0, z^0): x^0 \in X^0, z^0 \in Z^0\}$, $|H_2| = ml$, $H_3 = \{(x^0, y^0): x^0 \in X^0, y^0 \in Y^0\}$, $|H_3| = mn$, $X^0 \subset X$, $Y^0 \subset Y$ и $Z^0 \subset Z$ – множества чистых стратегий игроков, $|X^0| = m$, $|Y^0| = n$, $|Z^0| = l$.

Отправляясь от произвольной пары чистых стратегий $(y^0, z^0) \in H_1$ (назовем такую пару *стартовой парой стратегий первого типа*), построим последовательность точек $\omega^t = (x^t, y^t, z^t)$, $t \geq 1$, следующим образом:

$$\begin{aligned} x^{t+1} & - \text{решение задачи } P_1(y^t, z^t), \\ y^{t+1} & - \text{решение задачи } P_2(x^{t+1}, z^t), \\ z^{t+1} & - \text{решение задачи } P_3(x^{t+1}, y^{t+1}), \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Ясно, что $F(\omega^{t+1}) \leq F(\omega^t)$ для всех $t \geq 1$, поэтому существует $Q_1(y^0, z^0) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(\omega^t) \geq 0$. Множество предельных точек последовательности $\{\omega^t\}$ не пусто и содержится в Ω'' , значения функции Нэша во всех предельных точках одинаковы и равны $Q_1(y^0, z^0)$.

По аналогичным правилам можно определить последовательность $\{\omega^t\}$, отправляясь от любой заданной *стартовой пары стратегий второго типа* $(x^0, z^0) \in H_2$:

$$\begin{aligned} y^{t+1} & - \text{решение задачи } P_2(x^t, z^t), \\ z^{t+1} & - \text{решение задачи } P_3(x^t, y^{t+1}), \\ x^{t+1} & - \text{решение задачи } P_1(y^{t+1}, z^{t+1}), \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Для любой *стартовой пары стратегий третьего типа* $(x^0, y^0) \in H_3$ компоненты x^t, y^t, z^t последовательности $\{\omega^t\}$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} z^{t+1} & - \text{решение задачи } P_3(x^t, y^t), \\ x^{t+1} & - \text{решение задачи } P_1(y^t, z^{t+1}), \\ y^{t+1} & - \text{решение задачи } P_2(x^{t+1}, z^{t+1}), \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Просмотрев все стартовые пары стратегий из множеств H_1, H_2 и H_3 , определим числа

$$q_1(H_1) = \min_{(y^0, z^0) \in H_1} Q_1(y^0, z^0), \quad q_2(H_2) = \min_{(x^0, z^0) \in H_2} Q_2(x^0, z^0), \quad q_3(H_3) = \min_{(x^0, y^0) \in H_3} Q_3(x^0, y^0),$$

а заодно и $q(H) = \min_{1 \leq r \leq 3} q_r(H_r)$ — наименьшее значение функции Нэша $F(\omega)$, которое можно получить при использовании множества H всех стартовых пар стратегий. Разумеется, $q(H)$ не обязательно быть равным нулю.

Метод становится приближенным, если для каждой стартовой пары стратегий h из множества H процесс отыскания $\lim_{t \rightarrow \infty} F(\omega^t)$ заменить на поиск $t(h) = \min\{t \in \{1, \dots, T\} : F(\omega^t) - F(\omega^{t-1}) \leq \varepsilon_F\}$, где ε_F — заранее заданное небольшое положительное число, T — наибольшее разрешенное число итераций (троек задач, решаемых в соответствии с соотношениями (8), (9) или (10)). Положим $t(h) = T$ при невыполнении неравенства для всех $t \leq T$. Если обозначить $\bar{Q}(h) = F(\omega^{t(h)})$, то величина $\bar{Q}(H) = \min_{h \in H} \bar{Q}(h) \geq q(H) \geq 0$.

Недостатком метода, предложенного в (Гольштейн, 2014), является то, что для нахождения наилучшего приближенного значения функции Нэша, определенной в (4), нужен полный перебор стартовых пар стратегий множества H , $|H| = nl + ml + mn$. Поэтому при тестировании метода была поставлена следующая задача: используя (упорядоченное) множество H стартовых пар стратегий, отыскать стратегию $\omega \in \Omega$, в которой выполняется заранее заданный критерий остановки. Если критерий не выполняется для всех последовательностей, имеющих началами стартовые пары стратегий из H , то в качестве ответа выдается величина $\bar{Q}(H)$, как и в работе (Гольштейн, 2014).

Критериев остановки может быть несколько. Мы выберем два: один основной, а второй будет использован как отслеживаемый показатель, при этом критерии могут меняться ролями.

В качестве основного критерия для большинства тестов было принято выполнение условия

$$N(\omega) \leq \varepsilon, \quad (11)$$

где ε — заданное небольшое положительное число, $N(\omega)$ — модифицированная (нормированная) функция Нэша (МФН) вида

$$N(\omega) = \max_{1 \leq r \leq 3} [\delta_r(\omega) / f_r(\omega)], \quad \omega \in \Omega, \quad (12)$$

числители и знаменатели которой определены в (2), (3). Так же, как и F , МФН $N(\omega) \geq 0$ при любой стратегии $\omega \in \Omega$ и обращается в нуль только при $\omega \in \Omega^*$.

Для проведения нескольких тестов был использован дополнительный критерий остановки, при помощи которого исследуется качество полученного решения игры, а значения МФН (11), (12) играют роль отслеживаемого показателя.

Если ввести переменные

$$\begin{aligned} u_i &\equiv \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l a_{ijk} y_j z_k - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l a_{ijk} y_j z_k \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ v_j &\equiv \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l b_{ijk} x_i z_k - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l b_{ijk} x_i z_k \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ w_k &\equiv \max_{1 \leq i \leq l} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ijk} x_i y_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ijk} x_i y_j \geq 0, \quad k = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

то, согласно (3), для любой стратегии $\omega \in \Omega$ справедливо представление функций $\delta_r(\omega)$, $r = 1, 2, 3$, в виде $\delta_1(\omega) = \sum_{i=1}^m x_i u_i$, $\delta_2(\omega) = \sum_{j=1}^n y_j v_j$, $\delta_3(\omega) = \sum_{k=1}^l z_k w_k$. Поэтому для функции Нэша $F(\omega)$ имеет место и такое представление:

$$F(\omega) = \sum_{i=1}^m x_i u_i + \sum_{j=1}^n y_j v_j + \sum_{k=1}^l z_k w_k. \quad (13)$$

Пары переменных x_i и u_i , y_j и v_j , z_k и w_k назовем *взаимодополнительными*. Поскольку все переменные в формуле (13) неотрицательны, для справедливости включения $\omega \in \Omega^*$ необходимо и достаточно, чтобы в каждой паре взаимодополнительных переменных хотя бы один из сомножителей был равен нулю. При выполнении этого условия будем говорить, что выполняются *все условия (взаимо) дополнителности* (т.е. имеет место *условие дополнителности*).

Пусть $I\{A\}$ – индикатор события $\{A\}$, принимающий значение 1, если событие A истинно, и 0, если событие A ложно. Функция

$$\Delta = \Delta(\omega, u, v, w) = \sum_{i=1}^m I\{x_i u_i > 0\} + \sum_{j=1}^n I\{y_j v_j > 0\} + \sum_{k=1}^l I\{z_k w_k > 0\} \quad (14)$$

определяет число нарушенных в $\omega \in \Omega$ условий взаимодополнительности.

Приведем блок-схему предлагаемого метода решения игры трех лиц.

Шаг 0. Задаем константы: $S = nl + ml + mn$ – максимально разрешенное количество выборов стартовых пар стратегий; T – максимально разрешенное количество решаемых троек задач линейного программирования P_1, P_2, P_3 ; G – большое положительное число, превышающее $\max_{\omega \in \Omega} N(\omega)$; ε – небольшое положительное число, применяется при проверке основного критерия (11); $\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{uvw}$ – небольшое положительное число: компоненты векторов x, y, z, u, v, w , меньшие этого числа, при вычислении функции Δ в (14) считаются нулями; ε_F – небольшое положительное число (оценка близости значений функции Нэша в соседних итерациях). Полагаем $s = 0$ (s – счетчик стартовых пар стратегий), $\bar{Q} = G$.

Шаг 1. $s := s + 1$. В качестве очередной стартовой пары стратегий берется (очередная) стартовая пара (y^0, z^0) из множества H_1 при $1 \leq s \leq nl$, (x^0, z^0) из множества H_2 при $nl + 1 \leq s \leq nl + ml$, (x^0, y^0) из множества H_3 при $nl + ml + 1 \leq s \leq S$, где $3t$ – число обращений к решению задач P_1, P_2, P_3 ; $N(\omega^0) = G$.

Шаг 2. $t := t + 1$. Отыскиваем новую стратегию $\omega^t = (x^t, y^t, z^t)$, решая тройку задач: (8) при $1 \leq s \leq nl$, (9) при $nl + 1 \leq s \leq nl + ml$, (10) при $nl + ml + 1 \leq s \leq S$. Вычисляем $F_t = F(\omega^t)$, $N_t = N(\omega^t)$, $\Delta_t = \Delta(\omega^t, \bullet)$ по формулам (4), (12) и (13). Если $\bar{Q} > N_t$, то рекорд по МФН обновляется: $\bar{Q} = N_t$.

Шаг 3. Проверяем критерий остановки: если выполнен основной критерий (задаваемый формулой (11)), то ω^t – полученное (с заданной точностью) решение игры Γ , $\bar{Q} = N(\omega^t)$, переходим к шагу 6.

Шаг 4. Проверяем убывание функции Нэша: если $F_{t-1} \geq F_t + \varepsilon_F$ и $t < T$, то поиск минимума функции Нэша еще не завершен, переходим к шагу 2.

Шаг 5. Поиск приближенного значения минимума функции Нэша закончен, но критерий окончания счета не выполнен: если $s < S$, переходим к шагу 1, иначе – найти решение игры с заданной точностью не удалось и $\bar{Q}$ – наилучшее полученное значение МФН.

Шаг 6. Стоп.

Тестирование метода осуществлено при помощи программы trimatrix.exe, написанной авторами статьи на языке Фортран. Текст программы оттранслирован Compaq Visual Fortran компилятором. Программа trimatrix.exe собрана/линкована в среде MS Visual Studio 6.0. В качестве решателя задач линейного программирования использована процедура linprog (автор У.Х. Малков). Все приводимые ниже результаты для удобства сравнения получены на одном персональном компьютере: процессор Intel(R)Core(TM)i7CPU920/2,67 GHz, память 6,00 Гб. Все данные хранились в оперативной памяти. Все трехмерные таблицы генерировались при помощи нескольких однопараметрических датчиков случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ (rnd, написан на C++, найден в Интернете; иг – старинная простейшая фортранная функция; выбранные датчики позволяют обеспечить повторяемость процесса поиска решения задачи). Эти датчики уже применялись при тестировании алгоритма решения биматричных игр (Гольштейн, Малков, Соколов, 2013).

Для тестирования использовались два семейства игр трех лиц. Первое семейство – куб – содержит $V_1 = 27$ серий игр среднего размера, задаваемых параметрами таблиц $m, n, l \in \{20, 40, 60\}$, второе семейство – луч – содержит V_2 (от 8 до 14) серий игр среднего и большого размера, задаваемых параметрами таблиц $m = n = l \in \{10, 20, \dots, 90, 100, 150, 200, 250, 300\}$. Для каждой серии вначале генерировалось по 100 задач (табл. 1–2), затем в связи с большими временными затратами на решение задач число тестируемых задач для каждой серии было уменьшено до 10. Если не оговорено особо, то основные параметры метода таковы: $S = nl + ml + mn$, $T = 90$, $G = 1,23 \times 10^{20}$, $\varepsilon_F = 10^{-8}$, $\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{uvw} = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

Пусть $X^0 = \{e_m^1, \dots, e_m^m\}$, $Y^0 = \{e_n^1, \dots, e_n^n\}$, $Z^0 = \{e_l^1, \dots, e_l^l\}$ – множества чистых стратегий игроков 1, 2 и 3 соответственно. Здесь e_j^i – вектор из E^j , у которого все координаты, кроме одной, равны нулю, а на месте i стоит единица. Стартовые пары множества H_1 упорядочены следующим образом: $H_1 = \{(e_n^1, e_l^1), \dots, (e_n^1, e_l^l), (e_n^2, e_l^1), \dots, (e_n^2, e_l^l), \dots, (e_n^m, e_l^1), \dots, (e_n^m, e_l^l)\}$. Подобным же образом упорядочены множества H_2 и H_3 .

Генерация таблиц (a_{ijk}) , (b_{ijk}) и (c_{ijk}) осуществлялась в два этапа. Сначала генерировались независимо случайным образом в диапазоне $(0, 1)$ числа a'_{ijk} , b'_{ijk} и c'_{ijk} . Затем осуществлялось преобразование

$$a_{ijk} = 1 + a'_{ijk} - \frac{\kappa}{2}(b'_{ijk} + c'_{ijk}), \quad b_{ijk} = 1 + b'_{ijk} - \frac{\kappa}{2}(a'_{ijk} + c'_{ijk}), \quad c_{ijk} = 1 + c'_{ijk} - \frac{\kappa}{2}(a'_{ijk} + b'_{ijk}),$$

$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq l$, где κ – коэффициент взаимозависимости таблиц, $0 \leq \kappa \leq 1$. Поэтому элементы таблиц находятся в диапазоне $(1 - \kappa, 2)$.

Вначале было проведено тестирование метода для независимых таблиц, $\kappa = 0$. Для каждой из 27 серий семейства 1 и 10 серий семейства 2 генерировались и решались $P = 100$ игр. Результаты тестирования приведены в табл. 1–2.

Для фиксированной серии игр разделим множество $\bar{\Pi} = \{1, \dots, P\}$ на два подмножества, $\bar{\Pi} = \Pi_0 \cup \Pi$. В Π_0 ($|\Pi_0| = k_0$) заносятся номера игр, имеющих хотя бы одно решение в чистых

Таблица 1. Результаты решения игр семейства 1, $V_1 = 27$, $P = 100$, $\kappa = 0$

№ п/п	Размер			Результат			Стартовая пара		LP-итерация		Время T_{sum}^+
	m	n	l	k_0	k_1	k_2	s_{av}^+	s_{max}^+	t_{av}^+	t_{max}^+	
1	20	20	20	65	35	35	49,17	180	5,67	55	47,8
2	20	20	40	61	39	38	95,08	329	6,16	49	181,2
3	20	20	60	67	33	33	181,94	664	6,17	59	403,2
4	20	40	20	62	38	38	54,79	207	5,61	28	87,3
5	20	40	40	60	40	40	168,55	824	6,52	77	591,4
6	20	40	60	66	34	34	235,79	665	6,72	85	1025,6
7	20	60	20	64	36	35	91,83	363	5,38	44	178,9
8	20	60	40	64	36	35	203,97	679	6,51	71	885,3
9	20	60	60	58	42	42	244,74	891	6,79	68	1883,8
10	40	20	20	65	35	35	61,00	213	5,02	33	77,2
11	40	20	40	69	31	31	105,87	433	5,79	64	238,5
12	40	20	60	61	39	38	156,64	490	6,07	70	689,5
13	40	40	20	63	37	37	59,38	214	5,31	27	144,9
14	40	40	40	57	43	43	107,88	578	6,76	54	713,5
15	40	40	60	67	33	32	201,12	615	7,71	67	1742,7
16	40	60	20	66	34	34	39,76	138	5,28	38	125,2
17	40	60	40	57	43	41	149,95	620	7,00	59	1490,2
18	40	60	60	59	41	40	124,76	578	7,90	56	1989,7
19	60	20	20	69	31	31	52,13	201	4,69	47	73,8
20	60	20	40	60	40	40	91,25	266	5,36	61	334,0
21	60	20	60	65	35	35	124,17	424	5,66	42	609,8
22	60	40	20	51	49	48	43,51	191	5,06	38	1834,6
23	60	40	40	64	36	36	93,83	255	6,29	79	668,2
24	60	40	60	68	32	31	158,94	490	6,94	60	1648,1
25	60	60	20	65	35	35	42,97	129	5,04	26	188,1
26	60	60	40	61	39	38	104,92	386	6,40	59	1213,2
27	60	60	60	53	47	44	153,62	551	7,40	87	3788,5

стратегиях. Такое решение может быть найдено довольно просто без применения тестируемого метода. Остальные $\pi = P - k_0$ номеров образуют множество $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$. По сути, метод решает только игры с номерами из Π . Игра считается решенной ($p \in \Pi^+$, $\pi^+ = |\Pi^+|$), если для нее выполнен основной критерий остановки (11); Π^- — множество нерешенных задач, $\pi^- = |\Pi^-|$.

Возможна ситуация, когда $\Pi = \emptyset$ (см. серию игр с номером 8 в табл. 2). Для остальных серий игр при $\kappa = 0$ оказалось, что $\pi^+ = P$.

Таблица 2. Результаты решения игр семейства 2, $V_2 = 10$, $P = 100$, $\kappa = 0$

№ п/п	Размер $m = n = l$	Результат			Стартовая пара		LP-итерация		Время T_{sum}^+
		k_0	s_{av}^+	s_{max}^+	t_{av}^+	s_{av}^+	s_{max}^+	t_{av}^+	
1	10	60	40	40	30,70	205	4,48	42	15,1
2	20	65	35	35	49,17	180	5,67	55	47,8
3	30	65	35	34	96,51	319	6,46	65	248,8
4	40	57	43	43	107,88	578	6,76	54	713,5
5	50	65	35	32	102,26	330	7,24	66	1086,6
6	60	53	47	44	153,62	551	7,40	87	3788,5
7	70	53	47	43	127,17	426	7,45	84	5640,9
8	80	100	0	0	—	—	—	—	7,9
9	90	73	27	24	135,52	624	7,62	63	7584,0
10	100	57	43	40	194,67	999	7,59	74	24976,0

В общем случае введем следующие обозначения: k_1 — число игр, для которых выполнен критерий останова (11); k_2 — число игр, для которых одновременно выполняются критерий останова и условие дополнителности $\Delta = 0$; s_p — число стартовых пар стратегий, понадобившихся методу для нахождения решения игры p , причем для каждой стартовой пары $g \in \{1, \dots, s_p\}$ потребовалось совершить t_{pg} итераций метода. Обозначим $t_p = \sum_{g=1}^{s_p} t_{pg}$, $\bar{t}_p = \max_{1 \leq g \leq s_p} t_{pg}$ и $\underline{t}_p = \min_{1 \leq g \leq s_p} t_{pg}$, соответственно суммарное, максимальное и минимальное число итераций (троек линейных задач P_1, P_2, P_3), понадобившихся для решения игры p , при этом было затрачено на все τ_p секунд и было найдено рекордное (минимальное) значение Δ_p суммы нарушенных условий взаимодополнителности, $p \in \Pi^+$. Определим для $\pi^+ > 0$:

$$\begin{aligned} s_{\min}^+ &= \min_{p \in \Pi^+} s_p, & s_{\max}^+ &= \max_{p \in \Pi^+} s_p, & s_{av}^+ &= \frac{1}{\pi^+} \sum_{p \in \Pi^+} s_p, & T_{sum}^+ &= \sum_{p \in \Pi^+} \tau_p, \\ t_{\min}^+ &= \min_{p \in \Pi^+} \underline{t}_p, & t_{\max}^+ &= \max_{p \in \Pi^+} \bar{t}_p, & t_{av}^+ &= \sum_{p \in \Pi^+} t_p / \sum_{p \in \Pi^+} s_p, \\ \Delta_{\min}^+ &= \min_{p \in \Pi^+} \Delta_p, & \Delta_{\max}^+ &= \max_{p \in \Pi^+} \Delta_p, & \Delta_{av}^+ &= \frac{1}{\pi^+} \sum_{p \in \Pi^+} \Delta_p. \end{aligned} \quad (15)$$

Как оказалось, для всех игр обоих семейств $t_{\min}^+ = 1$, поэтому соответствующий столбец в табл. 1–2 отсутствует. Мы не приводим также столбец для $s_{\min}^+$: минимальное значение этой величины оказалось 1, ее максимальное значение равно 9 для семейства 1, 7 — для семейства 2.

Анализ табл. 1, 2 позволяет сделать следующие выводы.

1. Для всех 2700 игр из семейства 1 и 1000 игр из семейства 2 метод нашел решение с заданной точностью 10^{-6} по критерию (11).

2. Как и при решении биматричных игр, генерируется большое число задач k_0 , имеющих чистые стратегии в качестве решения: 62,3% для семейства 1 и 64,8% для семейства 2. Решение этих игр проводилось без использования тестируемого метода.

3. Как правило, величины k_1 и k_2 совпадают. Расхождение наблюдалось для семейства 1 в 14 играх (в 10 сериях), для семейства 2 в 17 играх (в 6 сериях), что составляет в обоих случаях не более 2%. Это означает, что параметры ε и $\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{uvw}$ были подобраны удачно. Из табл. 2 видно, что разность $R = k_1 - k_2$ имеет тенденцию к росту при увеличении размерности задач. Оказалось, что во всех играх, в которых эта разность положительна, нарушено всего одно условие взаимодополнителности: $\Delta_{\max}^+ = 1$. Попытки уменьшения $\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{uvw}$ до 10^{-6} или даже до 10^{-8} не меняли, как правило, число нарушенных условий взаимодополнителности. Поэтому для тех серий, в которых $R > 0$, были проделаны вычислительные эксперименты, в которых в качестве критерия останова использовалось условие $\Delta = 0$, а критерий (11) рассматривался как отслеживаемый показатель. В результате величина k_2 подтянулась до k_1 и R стала нулевой.

4. Из табл. 1 видно, что для расположенного компактно семейства 1 (куб) и средние значения стартовых пар стратегий s_{av}^+ имеют небольшой разброс: отношение максимального значения (244,74) к минимальному (42,97) составило 5,7. Согласно данным табл. 2, для семейства 2 (луч) с ростом размеров игры происходит немонотонный рост s_{av}^+ . Изучив данные столбца $s_{\max}^+$, можно заметить, что для всех серий игр, кроме серии с $m = n = l = 10$, тестируемый метод находит решение игры, используя только стартовые пары стратегий из множества H_1 .

5. Несмотря на то что поиск минимума функции Нэша F для некоторых стартовых пар стратегий требует значительного числа итераций (так, для семейства 1 $t_{\max}^+$ лежит в диапазоне [27, 87], для семейства 2 — в диапазоне [42, 87], что близко к предельно допустимому значению $T = 90$), среднее значение t_{av}^+ числа итераций невелико, причем отношение максимального значения к минимальному в этом столбце для обеих таблиц равно примерно 1,7.

К сожалению, для получения результатов, приведенных в табл. 1 и 2, было затрачено много времени (см. последний столбец табл. 1 и 2; все времена в таблицах даны в секундах). Так, для решения серии из $P = 100$ игр размера $m = n = l = 100$ потребовалось 7 часов. Для дальнейшего исследования метода нам пришлось ограничиться сериями из $P = 10$ игр.

В табл. 3–4 представлены результаты вычислительных экспериментов для семейств 1 и 2 при $\kappa = 0$, $P = 10$. Для удобства сравнения полученных результатов в каждой серии игры, сгенерированные для $P = 10$ игр, совпадают с первыми 10 играми для $P = 100$. В табл. 4 добавлены 4 строки, которые: 1) демонстрируют возможность решения больших задач; 2) показывают, что решение таких задач требует значительного времени; 3) объясняют, почему мы не проводили в дальнейшем систематических расчетов с играми большого размера.

Табл. 5 позволяет сравнить результаты вычислительных экспериментов, приведенные в табл. 1–4. Для каждого семейства в первой и второй строках (для $P = 100$ и $P = 10$ соответственно) приведены величины: K_0 – суммарное (по всем играм семейства) число игр, имеющих решение в чистых стратегиях; K_1 – суммарное число игр, имеющих решение с заданной точностью; K_2 – суммарное число игр, у которых выполнен критерий остановки, но не равен нулю отслеживаемый показатель; S_{av} и T_{av} – суммарное число стартовых пар стратегий и суммарное по всем сериям количество итераций линейного программирования, потребовавшиеся для нахождения решения всех игр в семействе. Третья строка содержит отношения чисел первой строки к числам второй строки.

Как видно из табл. 5, почти все основные результаты, отмеченные при анализе табл. 1 и 2, имеют место и для табл. 3 и 4. Зато время счета серии стало приемлемым и для ряда больших задач.

Перейдем к исследованию поведения тестируемого метода для случая ненулевого коэффициента взаимозависимости таблиц $\kappa \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$. Как и следовало ожидать, результаты, полученные при $\kappa = 0,1$, оказались наиболее близкими к выше изложенным результатам. Все 270 игр семейства 1 и 100 игр семейства 2 были решены с заданной точностью 10^{-6} . Мы не приводим таблиц результатов для $\kappa = 0,1$. Отметим следующие различия в полученных результатах.

Таблица 3. Результаты решения игр семейства 1, $V_1 = 27$, $P = 10$, $\kappa = 0$

№ п/п	Размер			Результат			Стартовая пара		LP-итерация		Время T_{sum}^+
	m	n	l	k_0	k_1	k_2	s_{av}^+	s_{max}^+	t_{av}^+	t_{max}^+	
1	20	20	20	5	5	5	80,40	180	5,76	29	11,9
2	20	20	40	6	4	4	92,50	205	6,28	42	18,9
3	20	20	60	4	6	6	170,17	514	6,11	46	70,5
4	20	40	20	8	2	2	49,50	76	5,21	13	4,2
5	20	40	40	9	1	1	350,00	350	6,31	22	30,9
6	20	40	60	6	4	4	234,00	575	6,63	38	121,6
7	20	60	20	6	4	4	54,25	111	4,98	15	11,3
8	20	60	40	6	4	4	126,00	263	6,46	71	62,5
9	20	60	60	9	1	1	530,00	530	6,88	52	100,7
10	40	20	20	7	3	3	61,67	91	5,10	17	7,0
11	40	20	40	8	2	2	231,00	433	5,74	20	34,6
12	40	20	60	8	2	2	126,00	156	6,28	45	29,0
13	40	40	20	4	6	6	29,50	70	5,50	27	12,4
14	40	40	40	4	6	6	121,33	578	7,16	37	123,4
15	40	40	60	5	5	5	187,40	321	7,51	67	241,9
16	40	60	20	9	1	1	3,00	3	4,33	5	0,3
17	40	60	40	5	5	5	87,00	146	6,84	37	98,9
18	40	60	60	6	4	4	168,75	291	7,86	33	264,6
19	60	20	20	8	2	2	94,50	97	4,61	15	8,6
20	60	20	40	7	3	3	123,67	185	5,44	19	35,1
21	60	20	60	8	2	2	32,00	57	6,09	19	10,1
22	60	40	20	3	7	6	29,29	80	5,09	30	18,0
23	60	40	40	5	5	5	35,43	80	5,15	30	98,5
24	60	40	60	8	2	2	99,00	116	6,08	39	45,5
25	60	60	20	8	2	2	68,50	129	5,34	22	20,4
26	60	60	40	8	2	2	50,00	84	6,05	28	28,5
27	60	60	60	8	2	2	139,00	205	7,55	39	157,5

Таблица 4. Результаты решения игр семейства 2, $V_2 = 27$, $P = 10$, $\kappa = 0$

№ п/п	Размер $m = n = l$	Результат			Стартовая пара		LP-итерация		Время T_{sum}^+
		k_0	k_1	k_2	s_{av}^+	s_{max}^+	t_{av}^+	t_{max}^+	
1	10	6	4	4	21,50	45	4,19	12	1,1
2	20	5	5	5	80,40	180	5,76	29	11,9
3	30	8	2	1	318,00	319	6,49	35	47,1
4	40	4	6	6	121,33	578	7,16	37	123,4
5	50	10	0	0	—	—	—	—	0,2
6	60	8	2	2	139,00	205	7,55	39	157,5
7	70	6	4	4	136,58	339	7,34	35	514,0
8	80	10	0	0	—	—	—	—	0,8
9	90	7	3	3	45,67	75	7,17	31	262,3
10	100	8	2	1	48,00	60	7,08	29	260,9
11	150	5	5	5	190,00	292	7,49	47	2860,0
12	200	3	7	5	149,71	337	7,03	32	29750,5
13	250	8	2	1	211,00	288	7,47	38	28221,5
14	300	9	1	1	323,00	323	7,35	36	39706,5

1. Существенно уменьшилось число игр, имеющих решения в чистых стратегиях: только 2 игры вместо 178 из семейства 1 и две игры вместо 72 из семейства 2, по этому методу фактически пришлось решать почти все игры.

2. Стало больше игр (а именно, 8 игр вместо 1 из семейства 1 и 4 игры вместо 2 — из 2-го), решенных с заданной точностью, для которых нарушено всего одно условие взаимодополнительности.

3. Решать игры стало труднее. Так, при $\kappa = 0$ для семейства 1 в 15 сериях величина s_{av}^+ не превосходила 100, лишь в двух сериях была более 300, достигала максимального значения 530, а $s_{max}^+ \in [3, 578]$ (см. табл. 3). При $\kappa = 0,1$ минимальное значение s_{av}^+ составило 136,7; в 18 сериях s_{av}^+ была больше 300, в 12 сериях — более 530; максимальное значение равно 1241,2; $s_{min}^+ \in [1, 196]$, $s_{max}^+ \in [229, 3209]$. Аналогичные результаты имеют место и для семейства 2. При переходе κ от 0 к 0,1 для всех 37 серий игр наблюдается рост величин t_{av}^+ и s_{max}^+ : для семейства 1 диапазон изменения t_{av}^+ составил $[5,95; 10,33]$, для семейства 2 — $[4,82; 11,91]$; для двух серий игр семейства 2 с размерами 60 и 100 было достигнуто максимально разрешенное значение $T = 90$, для остальных серий игр $t_{max}^+ \in [29, 88]$. Поэтому закономерен (почти на порядок) существенный рост суммарного времени счета T_{sum}^+ для всех серий игр.

Дальнейшее увеличение κ приводит к качественному изменению результатов решения игр. Так, при $\kappa \geq 0,2$ полностью исчезли решения игр в чистых стратегиях и появились игры, не решенные с заданной точностью по основному критерию остановки.

Табл. 6 и 7 иллюстрируют результаты решения игр для семейств 1 и 2 при $\kappa = 0,2$. Для пояснения дальнейших результатов помимо (15) введем следующие обозначения: $k^- = \pi^-$ — число игр, для которых не выполнен критерий остановки (11); s_p — число стартовых пар стратегий (равное $S = nl + ml + mn$), понадобившихся методу для установления факта, что игра p не решена,

Таблица 5. Сравнение результатов решения игр для $P = 100$ и $P = 10$, $\kappa = 0$

Семейство	Серия игр	K_0	$K_1 - K_2$	S_{av}	T_{av}
1 (куб)	$P = 100$	1687	14	3197,56	164,56
	$P = 10$	178	1	3273,86	162,27
	$(P = 100)/(P = 10)$	9,48	14	0,98	1,01
	$P = 100$	648	17	997,5	60,67
2 (луч)	$P = 10$	72	2	910,5	52,74
	$(P = 100)/(P = 10)$	9,00	8,5	1,10	1,15

причем для этого потребовалось суммарно решить t_{pg} троек линейных задач P_1, P_2, P_3 для всех $g \in \{1, \dots, S\}$, т.е. суммарно совершить $t_p = \sum_{g=1}^S t_{pg}$ итераций метода, затратив на все τ_p секунд и найдя рекордное (минимальное) значение n_p МФН $N(\omega_p)$ и рекордное значение Δ_p суммы нарушенных условий взаимодополнительности, $p \in \Pi^-$. Для $\pi^- > 0$ при обозначениях $\underline{t}_p = \min_{1 \leq g \leq S} t_{pg}$, $\bar{t}_p = \max_{1 \leq g \leq S} t_{pg}$ определим

$$\begin{aligned} t_{\min}^- &= \min_{p \in \Pi^-} \underline{t}_p, \quad t_{\max}^- = \max_{p \in \Pi^-} \bar{t}_p, \quad t_{av}^- = \frac{1}{S\pi^-} \sum_{p \in \Pi^-} t_p, \quad T_{sum}^- = \sum_{p \in \Pi^-} \tau_p, \\ N_{\min}^- &= \mu \min_{p \in \Pi^-} n_p, \quad N_{\max}^- = \mu \max_{p \in \Pi^-} n_p, \quad N_{av}^- = \frac{\mu}{\pi^-} \sum_{p \in \Pi^-} n_p, \\ \Delta_{\min}^- &= \min_{p \in \Pi^-} \Delta_p, \quad \Delta_{\max}^- = \max_{p \in \Pi^-} \Delta_p, \quad \Delta_{av}^- = \frac{1}{\pi^-} \sum_{p \in \Pi^-} \Delta_p, \quad T_{sum} = T_{sum}^+ + T_{sum}^-, \end{aligned}$$

где $\mu = 10^6$ – нормирующий множитель; $\mu n_p \leq 1$ означает, что найдено решение игры p с заданной точностью; в противном случае величина μn_p показывает, во сколько раз рекордное значение МФН $N(\omega_p)$ превышает допустимое для рекорда значение 10^{-6} ; время T_{sum}^+ определено в (15).

Анализ данных, представленных в табл. 6 и 7, позволяет сделать следующие выводы.

1. В 6 сериях игр из семейства 1 и 4 сериях игр для семейства 2 тестируемый метод нашел решение с заданной точностью для всех 10 игр, в остальных сериях имеется от 1 до 6 игр (2–3 игры для семейства 2), для которых не удалось получить приемлемое решение. Общее число нерешенных игр составило 46 из 270 и 11 из 100 для семейств 1 и 2 соответственно.

2. В 10 сериях семейства 1 и 4 сериях семейства 2 $k_1 > k_2$. Соответствующие им $\Delta_{\max}^+ = 1$, остальные значения в столбце и все значения $\Delta_{\min}^+ = 0$. Как оказалось, для нерешенных игр $\Delta_{\min}^- = \Delta_{av}^- = \Delta_{\max}^- = 1$ соответствующие столбцы опущены. Столбцы $t_{\min}^+$ и $t_{\min}^-$ также не приводятся: значения этих величин не превосходят 3.

3. Наименьшее значение $N_{\min}^- = 1,1 \times 10^{-6}$; наибольшее значение $N_{\max}^- = 42,2 \times 10^{-6}$ для семейства 1 и $N_{\max}^- = 47,3 \times 10^{-6}$ – для семейства 2. Заменяя в критерии остановки точность 10^{-6} на 10^{-5} , мы получили бы, что нерешенными оказалось 12 игр семейства 1 и 5 задач семейства 2; при 10^{-4} решенными были бы все игры. Диапазон изменения величины N_{av}^- : $[1,1 \times 10^{-6}, 42,2 \times 10^{-6}]$ для семейства 1, $[3,4 \times 10^{-6}, 26,0 \times 10^{-6}]$ – для семейства 2.

4. Практически все значения величин s_{av}^+ , $s_{\min}^+$, $s_{\max}^+$ и t_{av}^+ , вычисленные при $\kappa = 0,2$, для обоих семейств мажорируют аналогичные величины, полученные в результате расчетов при $\kappa = 0,1$. Отметим также монотонный рост величин s_{av}^+ , t_{av}^+ и T_{sum} при возрастании размера игр (см. табл. 7). Неудивительно, что общие временные затраты значительно выросли. В частности, для нахождения решения 10 задач серии 8 семейства 2 потребовалось более 33 часов! Поэтому мы с сожалением были вынуждены отказаться использовать в дальнейшем семейство 2 игр в качестве теста. Поэтому все дальнейшие утверждения относятся только к семейству 1.

Было проведено численное исследование тестируемого метода, когда параметр κ взаимозависимости таблиц принимает одно из значений: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Результаты этого исследования частично иллюстрируют табл. 6 и 8. Проанализировав полученные результаты, можно сделать следующие выводы.

1. При росте коэффициента κ от 0,2 до 0,5 происходит уменьшение числа решенных задач в пределах серии. Так, для всех 27 серий $4 \leq k_1 \leq P = 10$ при $\kappa = 0,2$, причем $k_1 = k_2 = 10$ для 6 серий; для всех серий $0 \leq k_1 \leq 5$ и $k^- = 10$ для 3 серий при $\kappa = 0,3$, для всех серий $0 \leq k_1 \leq 3$ и $k^- = 10$ для 15 серий при $\kappa = 0,4$, для всех серий $0 \leq k_1 \leq 2$ и $k^- = 10$ для 24 серий при $\kappa = 0,5$.

2. При росте параметра κ в указанном диапазоне суммарное число решенных игр резко падает: $K_1 = K_2 + 14 = 224$ при $\kappa = 0,2$, $K_1 = K_2 + 5 = 71$ при $\kappa = 0,3$, $K_1 = K_2 + 1 = 19$ для $\kappa = 0,4$, наконец, $K_1 = K_2 = 4$ при $\kappa = 0,5$.

3. Не выявлено зависимости значений s_{av}^+ от параметра κ .

Таблица 6. Результаты решения игр семейства 1, $V_1 = 27$, $P = 10$, $\kappa = 0,2$

№ п/п	Размер			Результат			Старто- вая пара	LP- итерация		Функция Нэша			Время счета T_{sum}
	m	n	l	k_1	k_2	k^-	s_{av}^+	t_{av}^+	t_{av}^-	N_{min}^-	N_{av}^-	N_{max}^-	
1	20	20	20	10	10	0	480,20	7,58	—	—	—	—	1056
2	20	20	40	10	10	0	864,00	7,70	—	—	—	—	3717
3	20	20	60	10	10	0	1204,00	7,34	—	—	—	—	6411
4	20	40	20	10	10	0	604,60	7,19	—	—	—	—	1904
5	20	40	40	9	9	1	1004,78	8,02	7,71	1,1	1,1	1,1	11789
6	20	40	60	9	8	1	1972,44	7,83	7,55	8,1	8,1	8,1	27486
7	20	60	20	9	9	1	963,78	6,75	7,08	44,2	44,2	44,2	7340
8	20	60	40	7	7	3	1623,29	7,86	7,79	1,7	8,4	12,0	31602
9	20	60	60	6	6	4	2938,50	8,12	7,86	4,6	13,7	19,5	72591
10	40	20	20	9	9	1	673,89	7,49	7,67	4,2	4,2	4,2	4137
11	40	20	40	9	9	1	1359,00	8,02	7,95	7,3	7,3	7,3	12675
12	40	20	60	8	7	2	2212,75	7,85	7,80	3,5	3,7	3,8	30733
13	40	40	20	9	9	1	578,33	7,34	7,98	19,7	19,7	19,7	7808
14	40	40	40	7	7	3	1440,43	11,43	11,28	4,8	18,8	30,8	50017
15	40	40	60	8	8	2	2849,25	11,62	11,23	1,6	7,0	12,3	109952
16	40	60	20	10	9	0	705,90	7,05	—	—	—	—	6666
17	40	60	40	8	6	2	1271,00	10,93	11,25	8,2	11,2	14,1	45540
18	40	60	60	8	5	2	3194,38	12,01	11,76	4,5	8,6	12,8	23985
19	60	20	20	10	10	0	890,40	7,18	—	—	—	—	4974
20	60	20	40	6	5	4	974,17	7,74	7,60	3,4	16,6	38,8	27978
21	60	20	60	8	8	2	2912,12	8,07	7,83	3,9	6,2	8,4	53454
22	60	40	20	9	7	1	927,89	7,43	7,81	12,8	12,8	12,8	14999
23	60	40	40	9	9	1	2770,67	11,14	11,20	2,7	2,7	2,7	100640
24	60	40	60	8	7	2	3763,37	11,87	11,61	2,0	4,9	7,9	230564
25	60	60	20	7	7	3	581,14	7,24	7,88	9,0	19,3	35,5	44132
26	60	60	40	4	3	6	2407,75	10,77	11,71	1,1	9,7	35,0	283667
27	60	60	60	7	6	3	3574,86	13,92	13,98	2,0	14,2	27,3	447906

4. Все ненулевые значения величин t_{min}^+ и t_{min}^- находятся в диапазоне [2, 4]. Можно считать, что $t_{min}^+ \geq t_{min}^-$ и $t_{av}^+ \approx t_{av}^-$ для тех серий игр и тех значений параметра κ , где одновременно определены величины, входящие в только что упомянутые ограничения.

5. Имеется тенденция роста ненулевых значений величин t_{av}^+ и t_{av}^- с ростом параметра κ . Величина t_{max}^+ достигает максимально разрешенное значение $T = 90$; в 2 сериях при $\kappa = 0,2$; максимальное значение $T = 90$ достигается величиной t_{max}^- в 2 сериях при $\kappa = 0,2$, в 9 сериях — при $\kappa = 0,3$ и $\kappa = 0,4$, в 11 сериях — при $\kappa = 0,5$. Минимальные (по сериям) при $\kappa = 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$ значения величины t_{max}^- соответственно равны 55, 27, 77 и 79.

Таблица 7. Результаты решения игр семейства 2, $V_2 = 8$, $P = 10$, $\kappa = 0,2$

№ п/п	Размер	Результат			Старто- вая пара	LP-итерация			Функция Нэша			Время счета T_{sum}
	$m = n = l$	k_1	k_2	k^-	s_{av}^+	t_{av}^+	t_{av}^-		N_{min}^-	N_{av}^-	N_{max}^-	
1	10	10	10	0	124,20	5,14	—	—	—	—	—	122
2	20	10	10	0	480,20	7,58	—	—	—	—	—	1056
3	30	10	10	0	1121,60	9,72	—	—	—	—	—	9596
4	40	7	7	3	1440,43	11,43	11,28	4,8	18,8	30,8	50017	
5	50	8	7	2	2961,87	12,66	12,59	4,5	25,9	47,3	177657	
6	60	7	6	3	3574,86	13,92	13,98	2,0	14,2	27,3	447906	
7	70	7	6	3	3628,14	15,13	15,08	1,1	3,4	5,9	1169494	
8	80	10	7	0	4769,30	15,29	—	—	—	—	—	1195343

Таблица 8. Результаты решения игр семейства 1, $V_1 = 27$, $P = 10$, $\kappa = 0,5$

№ п/п	Размер			Результат		LP-итерация		Функция Нэша		Нарушено условий взаимодополнительности		Время счета T_{sum}
	m	n	l	k_1	k^-	t_{av}^-	t_{max}^-	N_{min}^-	N_{max}^-	Δ_{min}^-	Δ_{max}^-	
1	20	20	20	0	10	9,88	89	4,8	1280	1	3	723
2	20	20	40	2	8	9,15	90	135	1120	2	4	1772
3	20	20	60	0	10	8,18	83	28	1430	1	5	3391
4	20	40	20	0	10	8,97	82	473	1250	3	5	1971
5	20	40	40	0	10	9,07	85	69	1210	2	7	5595
6	20	40	60	0	10	8,31	85	45	991	2	6	10306
7	20	60	20	0	10	8,18	89	216	1300	3	5	3392
8	20	60	40	0	10	8,49	87	219	893	2	6	10541
9	20	60	60	0	10	8,76	89	21	770	2	9	22616
10	40	20	20	0	10	9,02	79	209	1220	2	5	1898
11	40	20	40	0	10	9,26	89	13	1230	2	7	5703
12	40	20	60	0	10	8,55	88	260	982	4	6	10620
13	40	40	20	0	10	9,15	89	325	1090	4	6	5604
14	40	40	40	0	10	16,51	90	194	819	3	6	31419
15	40	40	60	0	10	15,26	90	194	754	3	8	63710
16	40	60	20	0	10	8,32	90	184	931	3	7	11098
17	40	60	40	0	10	15,34	90	117	770	2	10	61710
18	40	60	60	0	10	15,56	90	357	676	4	10	26631
19	60	20	20	1	9	8,25	90	200	1170	2	6	3468
20	60	20	40	1	9	8,35	88	1,2	1070	1	6	10348
21	60	20	60	0	10	8,71	87	21	695	2	8	22619
22	60	40	20	0	10	8,60	88	17	967	1	6	10766
23	60	40	40	0	10	15,43	90	357	755	5	10	60984
24	60	40	60	0	10	15,53	90	265	721	3	9	116920
25	60	60	20	0	10	8,74	87	4,3	691	1	8	22214
26	60	60	40	0	10	15,49	90	64	653	4	9	116203
27	60	60	60	0	10	22,15	90	387	612	8	9	349447

6. При κ , равном 0,2, 0,3, 0,4 и 0,5, соответственно: минимальные (по сериям) значения величины N_{min}^- оказались равными 1,02, 1,05, 1,59 и 1,16; максимальные значения N_{max}^- – 44,2, 521, 1020 и 1430; минимальные значения величины Δ_{min}^- лежат в диапазонах [0, 1], [0, 2], [1, 4] и [1, 8] соответственно. Значению $\Delta_{min}^- > 2$ соответствует $k^- = 10$ при любом значении $\kappa \in [0, 2, 0, 5]$.

Результатом тестирования является следующее утверждение: предлагаемый метод эффективен при независимых или мало зависимых таблицах, определяющих выигрыши игроков; с ростом коэффициента взаимозависимости таблиц эффективность метода снижается.

Поступила в редакцию
30.03.2016 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гольштейн Е.Г. (2014). Приближенный метод решения конечной игры трех лиц // *Экономика и мат. методы*. Т. 50. 1. С. 110–116.
- Гольштейн Е.Г., Малков У.Х., Соколов Н.А. (2013). Об одном численном методе решения биматричных игр // *Экономика и мат. методы*. Т. 49. 4. С. 94–104.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Golshtein Ye.G. (2014). An Approximate Method for Solving Finite Three-Person Games. *Economics and Mathematical Methods* 50(1), 110–116.
- Golshtein E.G., Malkov U. Kh., Sokolov N.A. (2013). A Numerical Method for Solving Bimatrix Games. *Economics and Mathematical Methods* 49(4), 94–104.

Received
30.03.2016

EFFICIENCY OF AN APPROXIMATE ALGORITHM TO SOLVE FINITE THREE-PERSON GAMES (A COMPUTATIONAL EXPERIENCE)

Ye.G. Golshtein⁴, U.H. Malkov⁵, N.A. Sokolov⁶

Abstract. The authors provide a short description of an approximate algorithm proposed by Ye.G. Golshtein to solve finite non-cooperative three-person games in mixed strategies. The search for a solution to such a game is reduced to the minimization of the so-called Nash function having a large number of local minima. By enumerating the original pure strategies the method finds an exact solution of the game whenever a complementarity condition holds. Otherwise, if the complementarity condition is slightly violated, a reasonable approximation to the set of Nash equilibrium points is generated. A series of numerical tests have been conducted to reveal both the algorithm's advantages and its minor points. With the growth of interdependence coefficient of tables that determine winnings of the players, the efficiency of the algorithms decreases.

Keywords: non-cooperative games, Nash equilibrium, finite games, pure and mixed strategies, an approximate algorithm, numerical tests, linear programming.

JEL Classification: C02, C72.

⁴Yevguenii G. Golshtein – Doctor of Science (Physics & Mathematics), Professor, Head of Laboratory, Central Economics and Mathematics Institute (CEMI), Russian Academy of Sciences, Moscow; golshtn@cemi.rssi.ru.

⁵Ustav H. Malkov – Candidate of Science (Physics & Mathematics), Leading scientific researcher, Central Economics and Mathematics Institute (CEMI), Russian Academy of Sciences, Moscow.

⁶Nikolai A. Sokolov – Candidate of Science (Physics & Mathematics), Senior scientific researcher, Central Economics and Mathematics Institute (CEMI), Russian Academy of Sciences, Moscow; sokolov@cemi.rssi.ru.