

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЛОЖЕНИИ ТЕЛА В РОМБОДОДЕКАЭДР

© 2017 г. А. А. Вотяков¹

Аннотация. Чтобы правильно оценить стоимость природного кристалла, надо знать, какие изделия можно изготовить из него. В геометрическое тело, имеющее форму кристалла, необходимо вложить тело, имеющее форму изделия. Вложение бриллианта в ромбододекаэдр — это классическая проблема технологии производства ювелирных изделий, алгоритмы решения которой исследованы в настоящей работе. Задача вложения сведена к задаче линейного программирования. Осуществлена оценка сложности получения решения. Доказано, что задача вложения тела в ромбододекаэдр решается за 14 сравнений.

Ключевые слова: природные кристаллы, алмаз, ромбододекаэдр, вложение в ромбододекаэдр, условия непротиворечивости, сравнения, оценка сложности.

Классификация JEL: C610.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РОМБОДОДЕКАЭДРА

Природные кристаллы могут обладать огромной стоимостью, а все операции обработки необратимы. Первой операцией, с которой начинается обработка кристалла и от которой зависит его дальнейшая судьба, является разделение на части, поэтому, прежде чем разделить кристалл, его тщательно изучают, чтобы выяснить, что из него можно изготовить, какие конкретные изделия можно вложить в кристалл и сколько они будут стоить. Однако изготавливать для этого стеклянные копии в условиях массового производства нецелесообразно. Современные вычислительные средства делают перспективным электронное моделирование как формы кристаллов, так и процессов вложения.

В настоящей работе рассматривается довольно сложная форма природных кристаллов — *ромбододекаэдр*. Оценить визуально, что можно вложить в тело, поверхность которого имеет двенадцать граней, непосильная для человека задача.

Идеальный ромбододекаэдр имеет двенадцать граней, которые являются ромбами (см. рисунок). При точном исполнении шесть граней идеального ромбододекаэдра, образующие шестигранную призму, не видны — проецируются в отрезки прямых, с этого ракурса ромбододекаэдр виден как обычный куб, обладающий шестью гранями. Чтобы показать шесть граней, образующих призму, три нижних

грани параллелепипеда были чуть-чуть смещены, что соответствует небольшому повороту. В результате стали видны не только все 12 граней ромбододекаэдра, но и то, что ромбододекаэдр — общая часть (пересечение) параллелепипеда и шестигранной призмы. Тело, изображенное на рисунке, является также общей частью (пересечением) шести слоев:

$$\begin{aligned} -1 \leq x + y \leq 1, \quad -1 \leq x - y \leq 1, \\ -1 \leq x + z \leq 1, \quad -1 \leq x - z \leq 1, \quad (1) \\ -1 \leq y + z \leq 1, \quad -1 \leq y - z \leq 1, \end{aligned}$$

т.е. множеством допустимых решений системы неравенств (1).

Идеальный ромбододекаэдр выглядит изящно, однако идеальные кристаллы

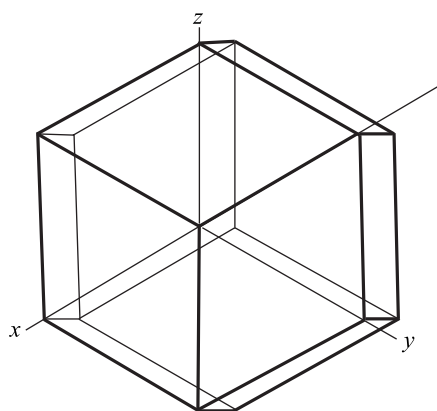


Рисунок. Ромбододекаэдр

¹Анатолий Александрович Вотяков — кандидат ф.-м. наук, старший научный сотрудник ЦЭМИ РАН, Москва; avotyakov@mail.ru.

встречаются крайне редко. Природа, плотно упаковывая атомы друг к другу, следит только за углами между гранями, поэтому в кристаллографии ромбододекаэдром называют кристалл, грани которого параллельны граням идеального ромбододекаэдра. Математическая модель природного ромбододекаэдра — множество допустимых решений системы неравенств

$$\begin{aligned} a_1 &\leq x + y \leq b_1, & a_2 &\leq x - y \leq b_2, \\ a_3 &\leq x + z \leq b_3, & a_4 &\leq x - z \leq b_4, \\ a_5 &\leq y + z \leq b_5, & a_6 &\leq y - z \leq b_6. \end{aligned} \quad (2)$$

Математическое вложение в ромбододекаэдр. По определению каждое допустимое решение системы неравенств (2) — одна из точек ромбододекаэдра (2). Вложению множества точек соответствует ситуация, при которой каждая точка множества — допустимое решение системы неравенств (2). Поверхность готового изделия, изготавливаемого на ограничном диске, образуется вершинами, ребрами и плоскими многоугольниками. Если каждая вершина изделия $\{(x_j, y_j, z_j) \mid j = 1, \dots, m\}$ является допустимым решением системы (2), то изделие оказывается вложенным в кристалл.

Проблема вложения путем параллельного переноса произвольного тела в многогранник

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad (3)$$

подробно исследована в статье (Вотяков, 2015). В ней доказывается, что вместо изделия в кристалл можно вкладывать его модель — многогранник того же типа (3), каждая грань которого касается изделия. Задача вложения модели сводится к задаче вложения точки за два шага. На первом шаге выбираем произвольную точку изделия и вычисляем расстояния от нее до граней модели $a'_1, b'_1, \dots, a'_6, b'_6$. На следующем шаге срезаем с каждой грани кристалла слой, соответствующие вычисленным расстояниям. В результате получаем ядро вложения

$$\begin{aligned} a_1 + a'_1 &\leq x + y \leq b_1 - b'_1, & a_2 + a'_2 &\leq x - y \leq b_2 - b'_2, \\ a_3 + a'_3 &\leq x + z \leq b_3 - b'_3, & a_4 + a'_4 &\leq x - z \leq b_4 - b'_4, \\ a_5 + a'_5 &\leq y + z \leq b_5 - b'_5, & a_6 + a'_6 &\leq y - z \leq b_6 - b'_6. \end{aligned} \quad (4)$$

Если (4) непусто, то, помещая выбранную точку изделия в любое допустимое решение (4), гарантированно укладываем модель изделия в кристалл, а значит, и содержащееся в нем изделие.

Помимо предлагаемого в статье подхода, сводящего задачу вложения тела в многогранник к задаче линейного программирования, существуют подходы, опирающиеся на топологические свойства параллельного совмещения родственных симплициальных структур. Работа (Бабат, Фридман, 2015) является наиболее интересным исследованием в рамках этого направления.

Постановка задачи. Имеется *реальное сырье* — материальные тела, поверхность которых образована плоскими гранями, модели сырья (2), а также вычисляемые *кристаллографические модели изделия* — трехмерные многогранники вида

$$\begin{aligned} -a'_1 &\leq x + y \leq b'_1, & -a'_2 &\leq x - y \leq b'_2, \\ -a'_3 &\leq x + z \leq b'_3, & -a'_4 &\leq x - z \leq b'_4, \\ -a'_5 &\leq y + z \leq b'_5, & -a'_6 &\leq y - z \leq b'_6, \end{aligned} \quad (5)$$

которые содержат в себе конкретное изделие, причем каждая грань (5) касается этого изделия.

Если изделие жестко привязано к кристаллической решетке сырья, то оно представлено одной моделью; в противном случае — несколькими моделями — по одной на каждый вариант поворота. Ввиду того что *кристаллографическая модель изделия* (5) является одним из элементов *технических условий*, связанных с изготовлением изделия, мы вправе потребовать, чтобы начало координат модели (5) находилось в конкретной точке изделия, совпадало с *центром изделия*.

При сложном ценообразовании, например в ювелирном производстве, когда стоимость изделия изменяется скачком при переходе из одной весовой группы в другую, изделие, занимающее начало

весовой группы, становится самостоятельным вариантом этого же изделия, отличающегося размером и ценой.

Задача. Пусть множество обладающих ценой многогранников (2) состоит из имеющихся в наличии кристаллов; множество *кристаллографических моделей* изделия представлено многогранниками вида (5), каждый из которых обладает ценой, совпадающей с ценой изделия. Требуется выделить пару многогранников, один из которых неподвижен (2), а другой – вида (5) – параллельно перемещается относительно (2). Для этих двух многогранников система неравенств (4) должна быть совместной, а разность цен (прибыль) максимальной.

В рамках статьи мы не ищем решения данной задачи, а исследуем оценку эффективности задачи линейного программирования, осуществляющей вложение изделия в кристалл посредством параллельного переноса.

РОМБОДОДЕКАЭДР, УСЛОВИЯ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

Переписывая систему ограничений (2) в виде

$$\begin{aligned} a_1 &\leq x + y \leq b_1, & a_3 &\leq y + z \leq b_3, \\ a_5 &\leq x + z \leq b_5, & a_2 &\leq x - y \leq b_2, \\ a_4 &\leq -x + z \leq b_4, & a_6 &\leq y - z \leq b_6, \end{aligned} \quad (6)$$

мы видим, что ромбододекаэдр общего вида является пересечением параллелограмма

$$a_1 \leq x + y \leq b_1, \quad a_3 \leq y + z \leq b_3, \quad a_5 \leq x + z \leq b_5 \quad (7)$$

и шестигранной призмы²

$$a_2 \leq x - y \leq b_2, \quad a_4 \leq -x + z \leq b_4, \quad a_6 \leq y - z \leq b_6. \quad (8)$$

Каждое из тел – параллелограмм (7) и призма (8) – должно быть непустым (соответствующие им системы неравенств (7) и (8) должны иметь хотя бы по одному решению) и, кроме того, пересекаться между собой. Очевидно, что исходная задача на многограннике (6) распадается на две подзадачи с меньшим числом ограничений и задачу пересечения двух тел, однако это не лучший путь.

Перепишем систему неравенств (7) в виде

$$a_1 \leq x + y \leq b_1, \quad -b_3 \leq -y - z \leq -a_3, \quad a_5 \leq x + z \leq b_5. \quad (9)$$

Сумма двух первых двусторонних неравенств (9) дает двустороннее неравенство

$$a_1 - b_3 \leq x - z \leq b_1 - a_3, \quad (10)$$

где функционал $x - z$ достигает на параллелепипеде (7) минимума (максимума) на ребре, по которому пересекаются грани:

$$a_1 \leq x + y, \quad y + z \leq b_3. \quad (11)$$

Аналогично, сумма двух последних двусторонних неравенств (9) дает двустороннее неравенство

$$a_5 - b_3 \leq x - y \leq b_5 - a_3, \quad (12)$$

а сумма первого и последнего двустороннего неравенства, умноженного на -1 , дает

$$a_1 - b_5 \leq y - z \leq b_1 - a_5. \quad (13)$$

Три двусторонних неравенства (10), (12) и (13) определяют шестигранную призму

$$a_1 - b_3 \leq x - z \leq b_1 - a_3, \quad a_5 - b_3 \leq x - y \leq b_5 - a_3, \quad a_1 - b_5 \leq y - z \leq b_1 - a_5, \quad (14)$$

²Сумма ограничений не зависит от координат.

грани которой, во-первых, параллельны граням шестигранной призмы (8), а во-вторых, касаются шестью своими гранями параллелепипеда (7). Всего у параллелепипеда 12 ребер. На рисунке видно, что три ребра пересекаются в точке, находящейся на переднем плане, другие три ребра – в точке на заднем плане, а остальные 6 ребер (на рисунке они отрезаны шестигранной призмой) лежат на гранях шестигранной призмы (14).

Теорема. Система неравенств (6) совместна тогда и только тогда, когда совместны системы неравенств (7) и

$$\begin{aligned} \max\{a_5 - b_3, a_2\} &\leq x - y \leq \min\{b_5 - a_3, b_2\} \\ \max\{a_3 - b_1, a_4\} &\leq -x + z \leq \min\{b_3 - a_1, b_4\}, \\ \max\{a_1 - b_5, a_6\} &\leq y - z \leq \min\{b_1 - a_5, b_6\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектор (x_0, y_0, z_0) является одновременно и решением (6), и решением (8). Система (8) входит в (6), в (7) и в систему (14), которая содержит все решения системы (7). Следовательно, вектор (x_0, y_0, z_0) является решением (15), множество решений которой совпадает с пересечением множеств решений систем (7) и (14).

Достаточность. Предположим, что системы (7) и (15) совместны и вектор (x_0, y_0, z_0) – решение (15). Но, как показывает прямая подстановка, решением будет и каждая точка прямой

$$x(t) = x_0 + t, \quad y(t) = y_0 + t, \quad z(t) = z_0 + t, \quad (16)$$

где $-\infty < t < +\infty$.

По построению системы неравенств (15) прямая (16) пересекает параллелепипед (7), если он непуст. Следовательно, в общем случае на прямой (16) находится отрезок, точки которого являются решениями системы неравенств (6). ■

Следствие. Система неравенств (6) непротиворечива тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} 0 &\leq L_1 = b_1 - a_1, \quad 0 \leq L_3 = b_3 - a_3, \quad 0 \leq L_5 = b_5 - a_5, \\ 0 &\leq L_2 = \min\{b_5 - a_3, b_2\} - \max\{a_5 - b_3, a_2\}, \\ 0 &\leq L_4 = \min\{b_3 - a_1, b_4\} - \max\{a_3 - b_1, a_4\}, \\ 0 &\leq L_6 = \min\{b_1 - a_5, b_6\} - \max\{a_1 - b_5, a_6\}, \\ 0 &\leq H_1 = -\max\{a_5 - b_3, a_2\} - \max\{a_3 - b_1, a_4\} - \max\{a_1 - b_5, a_6\}, \\ 0 &\leq H_2 = \min\{b_5 - a_3, b_2\} + \min\{b_3 - a_1, b_4\} + \min\{b_1 - a_5, b_6\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. Необходимость. Согласно теореме систему неравенств (6) можно преобразовать так, что она распадается на два блока: параллелепипед (7) и призму (15), непротиворечивость которых можно проверять по отдельности. Для проверки непустоты параллелепипеда (7) необходимо и достаточно трех сравнений – ни одна из трех толщин (L_1, L_3, L_5) параллелепипеда не должна быть строго меньшей нуля.

Для доказательства непустоты призмы (15) необходимо проверить непустоту каждого из трех слоев, пересечением которых она является. Ни одна из трех толщин призмы L_2, L_4, L_6 не должна быть строго отрицательной. Однако попарное пересечение слоев не гарантирует их совместного пересечения. Действительно, если мы сложим три неравенства (15), то получим два следствия

$$\begin{aligned} -H_1 &= \max\{a_5 - b_3, a_2\} + \max\{a_3 - b_1, a_4\} + \max\{a_1 - b_5, a_6\} \leq 0, \\ 0 &\leq \min\{b_5 - a_3, b_2\} + \min\{b_3 - a_1, b_4\} + \min\{b_1 - a_5, b_6\} = H_2, \end{aligned} \quad (18)$$

каждое из которых может не выполняться.

Чтобы понять смысл этих оценок, разобьем систему неравенств (15) на две подсистемы³, каждая из которых имеет самостоятельный смысл

$$\begin{aligned} \max\{a_5 - b_3, a_2\} &\leq x - y, \\ \max\{a_3 - b_1, a_4\} &\leq -x + z, \\ \max\{a_1 - b_5, a_6\} &\leq y - z, \end{aligned} \quad (19)$$

определяя самостоятельную трехгранную призму

$$\begin{aligned} x - y &\leq \min\{b_5 - a_3, b_2\}, \\ -x + z &\leq \min\{b_3 - a_1, b_4\}, \\ y - z &\leq \min\{b_1 - a_5, b_6\}, \end{aligned} \quad (20)$$

единственной метрической характеристикой которой является высота:

$$\begin{aligned} -H_1 &= \max\{a_3 - b_1, a_4\} + \max\{a_3 - b_5, a_2\} + \max\{a_1 - b_3, a_6\} \leq 0, \\ 0 &\leq \min\{b_1 - a_5, b_4\} + \min\{b_3 - a_5, b_2\} + \min\{b_1 - a_3, b_6\} = H_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Система неравенств (20) противоречива, если высота призмы H_2 строго отрицательна. Умножая все три неравенства (19) на минус единицу, получаем аналогичный критерий для системы неравенств (19) – она противоречива, если строго отрицательна высота призмы H_1 . Необходимость доказана.

Достаточность. Параллелепипед (7) непуст, если выполняются три первых условия (17). Значит, непусто и множество прямых, параллельных вектору (1, 1, 1), образующих призму (14). Три слоя, образующих систему неравенств (15), в общем случае, могут не пересекаться, даже если они непусты, однако любые два из них пересекаются, образуя четырехгранную призму.

Первый и последний слой из (15) образуют призму

$$\begin{aligned} \max\{a_3 - b_5, a_2\} &\leq x - y \leq \min\{b_3 - a_5, b_2\}, \\ \max\{a_1 - b_3, a_6\} &\leq y - z \leq \min\{b_1 - a_3, b_6\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Складывая их, получаем слой

$$\max\{a_3 - b_5, a_2\} + \max\{a_1 - b_3, a_6\} \leq x - z \leq \min\{b_3 - a_5, b_2\} + \min\{b_1 - a_3, b_6\}, \quad (23)$$

параллельный второму слою из (15)

$$-\min\{b_1 - a_5, b_4\} \leq x - z \leq -\max\{a_1 - b_5, a_4\}, \quad (24)$$

состоящий из плоскостей

$$x - z = x_0 - z_0, \quad (25)$$

где (x_0, y_0, z_0) – решение системы неравенств (22).

Если слои (23) и (24) не имеют ни одной общей плоскости, система (15) несовместна, потому что не содержит ни одной точки призмы (22). В свою очередь, слои (23), (24) не пересекаются тогда и только тогда, когда не пересекаются отрезки $[-\min\{b_1 - a_5, b_4\}, -\max\{a_1 - b_5, a_4\}]$ и $[\max\{a_3 - b_5, a_2\} + \max\{a_1 - b_3, a_6\}, \min\{b_3 - a_5, b_2\} + \min\{b_1 - a_3, b_6\}]$. То есть при $-\max\{a_1 - b_5, a_4\} < [\max\{a_3 - b_5, a_2\} + \max\{a_1 - b_3, a_6\}]$, что равносильно $H_1 < 0$, либо при $\min\{b_3 - a_5, b_2\} + \min\{b_1 - a_3, b_6\} < -\min\{b_1 - a_5, b_4\}$, что равносильно $H_2 < 0$. Достаточность доказана.

³Еще одна дихотомия.

Оценка сложности задачи (6). Чтобы из системы неравенств (6) получить систему неравенств (17), необходимо вычислить три максимума и три минимума, затратив 6 сравнений. Чтобы проверить систему неравенств (17), надо затратить 8 сравнений. Для решения задачи о возможности параллельного вложения тела в ромбододекаэдр требуется проверить 14 сравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бабат Л. Г., Фридман А. А. (2015). Параллельные вложения многогранников и эффективное использование природных алмазов // *Экономика и математические методы*. Т. 51. № 3. С. 54–63.
- Вотяков А. А. (2015). Об оптимальном вложении тела в октаэдр // *Экономика и математические методы*. Т. 51. № 3. С. 115–123.

Поступила в редакцию
21.03.2016 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Babat L. G., Freedman A. A. (2015). Parallel Embedding of Polyhedrons and Efficient Use of Natural Diamonds. *Economics and Mathematical Methods* 51, 3, 54–63.
- Votyakov A. A. (2015). On Optimal Body Embedding in Octahedron. *Economics and Mathematical Methods* 51, 3, 115–123.

Received 21.03.2016

ON OPTIMAL BODY EMBEDDING IN RHOMBIC DODECAHEDRON

A. A. Votyakov⁴

Abstract. To properly assess the value of a natural crystal, it is necessary to know what products can be made from. In the language of mathematics, geometric body having the form of a crystal, it is necessary to put a body having a shape of a product. Attachment diamond rhombic dodecahedron — this is a classic problem of production technology jewelry algorithms solutions which are investigated in this paper. Embedding problem is reduced to a linear programming problem. The estimation of the complexity of algorithms. It is proved that the complexity of the algorithms in the attachment body crystals belonging to the class of rhombic dodecahedron is decided for 14 comparisons questions.

Keywords: natural crystals, diamond, rhombic dodecahedron, investment in the rhombic dodecahedron, consistency conditions, comparison, estimation of complexity.

JEL Classification: C610.

⁴Anatolii A. Votyakov — Candidate of Science (Physics & Mathematics), Senior scientific researcher, Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; avotyakov@mail.ru.