ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2017, том 53, № 2, с. 76–89

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

О СТАДНОМ ПОВЕДЕНИИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАМКНУТОГО ОДНОТОВАРНОГО РЫНКА, УЧАСТНИКАМИ КОТОРОГО ЯВЛЯЮТСЯ КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ*

© 2017 г. М.М. Вороновицкий[i]

Аннотация. В работе исследуется модель однотоварного рынка с неизменными количествами денег и товара. В каждый момент времени каждый участник может иметь один из трех статусов: продавец, покупатель или не участвовать в торговле. Используя информацию о результатах своей торговли в предыдущий момент времени и стремясь обеспечить себе максимальную прибыль, участники переходят в новые статусы и назначают новые цены. В качестве участников торговли рассматриваются конечные автоматы с двумя алгоритмами выбора цены с различными уровнями риска. В предлагаемой работе исследуются механизмы стадного поведения агентов, т.е. случай, когда участники, отказываясь от использования собственной информации о ситуации и последствиях своих решений, повторяют действия некоторого большинства участников коллектива. Данная работа преследует достаточно скромную цель – исследовать возможности стадного поведения в этой модели. В нашей работе о модели однотоварного замкнутого рынка, в которой поведение участников моделировалось с помощью конечных автоматов (Вороновицкий, 2016), было показано, что в большинстве случаев траектория системы попадает в стационарное множество (в каждом случае свое) и характеризуется почти постоянной средней ценой рынка. В настоящей работе посредством компьютерного исследования этой же модели показана возможность двух видов стадного поведения: 1) индуцирующего рост средней цены рынка; 2) ведущего к падению средней цены рынка. Стадное поведение может возникать только на конечном отрезке времени.

Ключевые слова: математическая модель, стадное поведение, игра на повышение, игра на понижение, замкнутый рынок, однотоварный рынок, динамика цен, траектория, стационарное множество, стационарное состояние, конечные автоматы.

Классификация JEL: C51, D01.

1. ВВЕДЕНИЕ

Термин «стадное поведение» применяют в случае, когда участники коллектива, отказываясь от использования собственной информации о ситуации и последствиях своих решений, повторяют действия большинства других участников. Стадное поведение (встречается во многих сферах жизни) в экономике давно отмечено не только как наблюдаемое явление, но и как существенный фактор в выборе направления развития и в динамике экономических процессов. В сфере потребления такое поведение обусловлено желанием индивида соответствовать предпочтениям (а следовательно, и потреблению других людей), а не стремлением максимизировать полезность качественных характеристик и минимизировать цены товаров. Это ярко проявляется в увлечениях и моде. Например, в часто наблюдаемом (по крайней мере в последнее время) массовом изъятии вкладов из банков, которое называют «нападением на банк» (run of bank), скорее всего также проявляется стадное поведение клиентов банка. Среди инвестиционных фондов, финансовых аналитиков и в прогнозах экономических ситуаций также довольно часто наблюдается стадное поведение.

Но особенно важным для экономики в целом могут оказаться проявления стадного поведения участников финансового рынка при возникновении биржевых пузырей (bubles). Такие изменения могут быть как краткосрочными и связанными с не очень сильными изменениями

* Работа выполнена в Институте проблем рынка РАН и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-06-00110).

[i] **Марк Моисеевич Вороновицкий** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИПР РАН, Москва; v_mark50@hotmail.com.

ситуации, так и довольно длительными и быть связанными с большими изменениями цен и объемов торговли и производства. В последних случаях последствия такого поведения влияют на значительные сферы экономики, и стадное поведение становится определенным элементом функционирования экономики. Чаще всего говорят о стадном поведении участников фондовых бирж, объясняя с его помощью резкие взлеты и падения биржевых цен как на длительных интервалах времени, так и кратковременные.

Следует отметить, что в настоящее время для финансового рынка отсутствуют адекватные объяснения многим явлениям как в поведении отдельных участников рынка, так и коллектива участников в целом, хотя в последние годы в этом направлении разработаны очень перспективные теории, в частности, объясняющие отношение участников к оценке рискованности их решений. Много исследований стадного поведения участников финансового рынка носят прикладной характер. Это изучение наблюдаемых примеров стадного поведения на финансовых рынках в целях непосредственного применения результатов исследований. Имеются теоретические объяснения характера этого явления, исходя из моделей поведения участников финансового рынка. Однако это требует модельного описания поведения и взаимодействия участников финансового рынка, что является непростой задачей. Для ее решения необходимо понять характер стадного поведения участников и причины его возникновения при логически оправданном и достаточно простом механизме поведения и взаимодействия участников.

В последние годы уделялось много внимания стадному поведению участников финансового рынка, в частности фондовой биржи. В работах (Banerjee, 1992; Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1992) были разработаны и исследованы модели стадного поведения, возникающего в коллективах агентов, принимающих решения в порядке очереди и на основе результатов последствий решений предшественников в очереди. Это быстро распространяющееся стадное поведение получило название «каскад». За упомянутыми работами последовало множество исследований, объясняющих стадное поведение участников биржи на основе теории каскадов. Наиболее интересной представляется работа (Avery, Zemsky, 1998). Изложение основных исследований стадного поведения участников биржи можно найти в обзорах (Bichandany, Sharma, 2000; Вороновицкий, Цветков, 2012). В работе (Topol, 1991) математически показана возможность стадного поведения участников биржи. Наряду с серьезным математическим результатом, с нашей точки зрения, большой интерес представляет построенная автором модель биржи, включающая множество участников, различающихся их ценами, описание поведения и взаимодействия участников. Эта модель в значительной мере соответствует возникшему позже подходу агент-ориентированного моделирования (Макаров, 2012), который использовался также и в наших моделях однотоварного открытого и замкнутого рынка. Эти модели не претендуют на описание реальной ситуации на рынках, а лишь на логически оправданное математическое описание поведения и взаимодействия участников, так же как и на достаточно простое их описание, которое требуется для математического анализа описанных процессов. В модели (Вороновицкий, 2016) (может быть, в самой простой и достаточно нереалистичной для подобной модели) принятие решения участников моделировалось посредством конечных автоматов, предложенных в (Цетлин, 1969).

Эмпирическое изучение разнообразных случаев стадного поведения групп участников реальных финансовых рынков, попытки теоретического объяснения этих явлений, в частности, с помощью поведенческих моделей, представляют крайне важную для теории и практики задачу. Цель данной работы гораздо скромнее. Мы хотим показать возможность стадного поведения участников разработанной нами ранее агент-ориентированной модели замкнутого однотоварного рынка, которое обусловлено внешним сигналом или сигналом, связанным с внутренним состоянием рынка.

Для этого нам придется посвятить второй раздел этой работы краткому описанию нашей агент-ориентированной модели однотоварного рынка с конечными автоматами в качестве участников. В разд. 3 описаны динамика коллектива участников рынка, соответствующая стадному поведению в виде алгоритмов поведения отдельных участников, и динамика всей системы.

Мы надеемся, что предложенная нами в предшествовавших работах агент-ориентированная модель замкнутого однотоварного рынка отражает, хотя бы частично, динамику фондовой биржи в короткие периоды внешней стабильности.

Рассматривается система, состоящая из фиксированного числа элементов (участников), каждый из которых характеризуется количеством товара, денег, состоянием (статусом) и ценой. Статус участника может принимать одно из трех значений. В каждый момент времени участник может быть или продавцом, или покупателем, или не участвовать в торговле, ожидая более выгодного соотношения цен на рынке. Количества товара и денег в системе постоянны. Система существует во времени, причем момент времени состоит из двух тактов. На первом такте происходит торговля между продавцами и покупателями. Порядок торговли определяется соотношением цен. После первого такта у продавцов возникают новые количества товара и денег и меняется их статус (например, продавцы становятся покупателями или ожидающими, и наоборот). На втором такте, исходя из результатов предшествовавшей торговли, участники назначают новые цены. Каждый участник может уменьшать или увеличивать свою цену в пределах заданной константы. В его распоряжении имеются два способа изменения цены: осторожный и рискованный. Осторожный способ в большой мере гарантирует его участие в торговле в следующий момент времени. Рискованный – связан с опасностью, что новая цена продавца будет слишком велика или новая цена покупателя будет слишком мала для его участия в торговле в следующий момент времени. Алгоритм выбора между осторожным или рискованным назначением цены определяется структурой конечного автомата, которой меняет свои состояния (а соответственно, и действия по выбору новой цены) в зависимости от результата своего участия в торговле на первом такте. Этот результат оценивается посредством сравнения реального изменения средней цены на рынке с максимально возможным (для продавца) или минимально возможным (для покупателя). Центральный результат компьютерных экспериментов по данной модели состоит в том, что за конечный период времени система попадает в стационарное множество состояний, характеризующееся постоянным (с определенной точностью) значением средней цены торговли.

В разд. 3 описываются возможные случаи стадного поведения участников модели замкнутого однотоварного рынка, обусловленные как внутренними, так и внешними причинами. Наиболее часто внимание финансистов и исследователей, пытающихся понять взаимосвязь финансовых показателей, привлекает стадное поведение на финансовых рынках, в том числе на фондовых биржах, вызванное внешними для рынков причинами (теми или иными событиями в экономической жизни, например резким изменением фундаментальной ценности (fundamental value)). Некоторые эмпирические факты говорят о возможности стадного поведения участников рынка, не связанного с внешними причинами. По крайней мере в некоторых наблюдаемых случаях, когда участники биржи демонстрируют стадное поведение, внешние условия кажутся неизменными.

Не стоит забывать, что в реальности на фондовой бирже торгуется много товаров и имеются разные по манере поведения участники, тогда как в нашей модели торгуется один товар и участники конструктивно одинаковы. Самым простым случаем стадного поведения является случай одинакового выбора цены всеми участниками. Предполагается, что некоторый внешний параметр влияет на переход между состояниями автомата при ненулевом значении этого параметра. В этом случае система, включая переходы между состояниями автомата-участника, действует так, как описано в разд. 2. При значении внешнего параметра, равном 0, все участники постепенно приходят в состояние, когда они при всех условиях осуществляют осторожный выбор цены, а при –1 – осуществляют рискованный выбор цены. В этих случаях, как показывают многочисленные компьютерные эксперименты, траектория системы всегда попадает в стационарное множество с мало меняющимся значением средней цены рынка. В случае осторожного выбора эта почти постоянная средняя цена меньше по величине, чем в случае рискованного выбора.

Другая ситуация возникает, когда внешний параметр равен 2 или –2. При значении 2 через некоторое конечное время все продавцы и ожидающие участники используют только осторожное назначение цен, а покупатели и ожидающие участники, обладающие товаром, используют только рискованный выбор цен. Вероятно, эта ситуации ведет к повышению средней цены обмена, в чем нас дополнительно убеждают компьютерные эксперименты. При значении –2 происходит падение средней цены рынка. Несомненно, рост или падение средней цены рынка, связанные с описанным стадным поведением, могут быть остановлены изменением внешнего сигнала, но в этом разделе мы рассматриваем только внутренние критерии перехода от стадного поведения к обычному поведению, и наоборот. Следует отметить, что в работе не изучаются начальные этапы стадного поведения, появление сигнала, стимулирующего стадное поведение, и распространение стадного поведения.

Большое число компьютерных экспериментов демонстрирует влияние стадного поведения на динамику траектории модели и показывает, что при одних и тех же начальных условиях и параметрах модели средняя цена рынка сильно растет (уменьшается) при соответствующем виде стадного поведения в сравнении с траекторией той же цены при выборе между осторожной или рискованной ценами посредством конечного автомата.

В разд. 4 обсуждаются значение работы и перспективы дальнейшего изучения финансовых рынков и стадного поведения их участников посредством агент-ориентированных моделей.

2. АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ОДНОТОВАРНОГО ЗАМКНУТОГО РЫНКА

Для дальнейшего исследования свойств агент-ориентированной модели замкнутого однотоварного рынка с конечными автоматами в качестве участников, начатого в статье (Вороновицкий, 2016), нам потребуется краткое изложение механизма модели.

Пусть имеется N взаимодействующих между собой участников рынка (агентов). Состояние агента i в момент t определяется несколькими переменными: $x_i(t)$ – количеством товара, которым он обладает в момент t; $y_i(t)$ – количеством денег, которым он обладает в момент t; статусом $\alpha_i(t) \in \{-1, 0, 1\}$, т.е. в каждый момент времени агент может быть покупателем ($\alpha_i(t) = -1$), продавцом ($\alpha_i(t) = 1$) и ждать более подходящего для участия в торговле момента ($\alpha_i(t) = 0$); $v_i(t)$ – ценой, которую агент запрашивает, если он продавец, предлагает, если покупатель, или использует в качестве ориентира, если не участвует в данный момент в торговле.

Динамика модели рассматривается в конечном времени: $t = 0, 1, \ldots$ Замкнутость рынка означает, что на рынке присутствуют 1 единица товара и 1 единица денег; количества денег или товара у каждого участника меняются только в результате обмена между ними. Каждый момент t предполагается состоящим из двух тактов. На первом такте происходит процесс торговли между агентами, а на втором – каждый агент принимает решение о своем статусе и цене в момент $t + 1$, причем у агента есть два способа выбора цены в момент $t + 1$ – осторожный и рискованный.

В процессе обмена товара на деньги, происходящем на первом такте момента t, каждый продавец стремится продать весь имеющийся у него товар по наибольшей из возможных цен, а каждый продавец – купить товар на все имеющиеся у него деньги по наименьшей из возможных цен. Порядок сделок между продавцами и покупателями определяется соотношением цен на рынке.

Пусть в момент t участники $i = i_1, \ldots, i_k$ – продавцы и $v_{i_1}(t) \le \ldots \le v_{i_k}(t)$, а участники $j = j_1, \ldots, j_l$ – покупатели и $v_{j_1}(t) \ge \ldots \ge v_{j_l}(t)$. Первая сделка происходит между продавцом с номером i_1 и покупателем с номером j_1, причем они торгуют по цене $0{,}5(v_{i_1}(t) + v_{j_1}(t))$. Пусть покупатель j_1 истратил все свои деньги на покупку товара у продавца i_1. Если у продавца i_1 остался товар, он предлагает его покупателю j_2. Сделка между ними осуществляется по цене $0{,}5(v_{i_1}(t) + v_{j_2}(t))$. Если у продавца i_1 не осталось товара, а у покупателя j_1 остались деньги, то последний обращается за товаром к продавцу с номером i_2, и сделка между ними будет происходить по цене $0{,}5(v_{i_2}(t) + v_{j_1}(t))$. Далее в зависимости от результата этой второй сделки заключаются остальные сделки. Процесс продолжается до тех пор, пока не окажется, что у продавцов больше не осталось товара, или у покупателей больше не осталось денег, или цена продавца, у которого еще есть товар, больше цены покупателя, у которого еще остаются деньги.

В конце первого такта момента t для участников можно определить среднюю цену $w_i(t)$ состоявшегося обмена

$$w_i(t) = \begin{cases} (y_i(t+1) - y_i(t)) / (x_i(t) - x_i(t+1)), & \text{если } \alpha_i(t) = 1; \\ (y_i(t) - y_i(t+1)) / (x_i(t+1) - x_i(t)), & \text{если } \alpha_i(t) = -1, \end{cases}$$

количество денег и товара, участвовавших в обмене:

$$\Delta Y(t)=\sum_{j=j_1}^{j=j_l}\left(y_j(t)-y_j(t+1)\right);\quad \Delta X(t)=\sum_{i=i_1}^{i=i_k}\left(x_i(t)-x_i(t+1)\right)\ -$$

и среднюю по рынку цену обмена ($u(t)$)

$$\Delta X(t)>0,\ u(t)=\Delta Y(t)/\Delta X(t).$$

Мы предполагаем, что на первом такте момента t каждый агент знает среднюю цену торговли на рынке в целом $u(t)$ и свою цену $w_i(t)$ и использует эти величины для принятия решения на втором такте момента t.

На втором такте осуществляется выбор статуса для момента $t+1$, а затем и цен, относящихся к этому моменту. Оправдывая себя тем, что исследование подобной модели реализуется впервые, и руководствуясь стремлением к простоте, мы рассматриваем только два простейших характера выбора цен (два действия) – осторожный и рискованный. Обозначим $v_i^{(c)}(t+1)$ – цену агента i, выбранную осторожно, и $v_i^{(r)}(t+1)$ – цену агента i, выбранную с риском потерять возможность участвовать в торговле в момент $t+1$.

Алгоритм назначения статуса и цены на втором такте имеет следующий вид.

Если $\alpha_i(t) = 1$:

при $y_i(t+1)>y_i(t)>0$, $u(t)>w_i(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=0$, $v_i^{(c)}(t+1)=w_i(t)$, $v_i^{(r)}(t+1)=w_i(t)-d$;

при $y_i(t+1)>y_i(t)>0$, $u(t)\le w_i(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=-1$, $v_i^{(c)}(t+1)=w_i(t)$, $v_i^{(r)}(t+1)=\min(w_i(t)-d, u(t))$;

при $y_i(t+1)=y_i(t)>0$, $u(t)\le v_i(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=-1$, $v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)$, $v_i^{(r)}(t+1)=\min(v_i(t)-d, u(t))$;

при $y_i(t+1)=y_i(t)>0$, $u(t)>v_i(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=0$, $v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)-d$, $v_i^{(r)}(t+1)=v_i(t)$;

при $y_i(t+1)=y_i(t)=0$, $u(t)\le v_i(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=1$, $v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)-d$, $v_i^{(r)}(t+1)=v_i(t)$;

при $y_i(t+1)=y_i(t)=0$, $u(t)>v_i(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=1$, $v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)-d$, $v_i^{(r)}(t+1)=v_i(t)$.

Если $\alpha_i(t) = -1$, выбор статуса и цены в момент $t+1$ происходит симметрично с заменой $x_i(t+1)$ на $y_i(t+1)$, знаков неравенства и функций max и min – на противоположные, $-d$ на d.

Если $\alpha_i(t) = 0$:

при $x_i(t)>0$, $v_i(y)>u(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=0$, $v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)-d$, $v_i^{(r)}(t+1)=v_i(t)$;

при $x_i(t)>0$, $v_i(y)\le u(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=1$, $v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)$, $v_i^{(r)}(t+1)=\max(v_i(t)+d, u(t))$;

при $x_i(t)=0$, $v_i(y)<u(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=0$, $v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)+d$, $v_i^{(r)}(t+1)=v_i(t)$;

при $x_i(t)=0$, $v_i(y)\ge u(t)$ имеем $\alpha_i(t+1)=-1$, $v_i^{(c)}(t+1)=v_i(t)$, $v_i^{(r)}(t+1)=\min(v_i(t)-d, u(t))$.

Здесь d – внешняя константа модели (точность), т.е. величина возможного максимального или минимального изменения цены по отношению к $w_i(t)$ или $v_i(y)$.

Частью модели поведения агента является конечный детерминированный автомат с линейной тактикой, емкостью памяти $2m$ и с двумя действиями, которые в работах М.Л. Цетлина и его сотрудников (Цетлин, 1969) обозначается $L_{2m,2}$. Поэтому $\varphi_i(t)$, состояние автомата в момент t, является еще одной характеристикой агента i в момент времени t.

Автомат $L_{2m,2}$ выполняет два действия (в нашем случае это назначение цены $v_i^{(c)}$– осторожное и $v_i^{(r)}$ – рискованное) и имеет $2m$ состояний: $\varphi_j = \varphi_1,\ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1},\ldots, \varphi_{2m}$. Риск состоит в уменьшении вероятности участия в торговле в следующий момент при рискованной цене по сравнению с осторожной. В состояниях $\varphi_1,\ldots, \varphi_m$ автомат назначает цену $v_i^{(c)}(t+1)$, а в $\varphi_{m+1},\ldots, \varphi_{2m}$ автомат назначает рискованную цену $v_i^{(r)}(t+1)$. Нам будет удобнее обозначать состояния автомата в момент t, регулирующего выбор решения о назначении цены в момент $t+1$, двумя числами – $l_i(t)$ и $k_i(t)$. В случае осторожного выбора $k_i = 1$, в случае рискованного выбора $k_i = -1$. $l_i = 1,\ldots, m$. Состояние l_i, k_i соответствует состоянию φ_j автомата $L_{2m,2}$, где $j = l_i + (1-k_i)m/2$. Автомат воспринимает в каждый момент времени $t = 1, 2,\ldots$ один сигнал s, принимающий два значения: $s = 1$ – поощрение, $s = -1$ – штраф; и в зависимости от сигнала меняет свое внутреннее состояние следующим образом:

при $s(t) = 1$ (поощрение): $l_i(t+1) = \begin{cases} l_i(t)+1, \text{ если } 1 \le l_i(t) < m, \\ l_i(t), \text{ если } l_i(t) = m; \end{cases}$

при $s(t) = -1$ (штраф): $l_i(t+1) = \begin{cases} l_i(t)-1, \text{ если } m \ge l_i(t) > 1, \; k_i(t+1) = -k_i(t), \\ l_i(t), \text{ если } l_i(t) = 1. \end{cases}$

Мы рассматриваем вероятность поощрения как некоторую оценку результата торговли агента i на первом такте момента t. Если это невозможно, то берем вероятность поощрения как характеристику всего рынка после первого такта момента t. Обозначим вероятность поощрения агента i в момент t через $p_i(t)$.

Предположим, что агент i в момент времени t является продавцом ($\alpha_i(t) = 1$) и продает весь имеющийся у него товар $x_i(t)$ или часть этого товара. Если $u(t) \le w_i(t)$, то в следующий момент он становится покупателем и может купить товар по цене меньшей $w_i(t)$ (т.е. получить еще раз прибыль), иначе он попадает в число ожидающих (т.е. не участвует в торговле в момент $t+1$). Условно будем считать, что при $w_i(t) = u(t)$ вероятность поощрения или штрафа равны 1/2. При $w_i(t)>u(t)$ действие продавца по выбору цены в момент t будем оценивать через отношение $w_i(t) - u(t)$ к максимально возможному значению этой величины. Максимальное значение величины $w_i(t) - u(t)$ возникает при торговле данного продавца с покупателем, предлагающим в момент t максимальную цену. Оно равно $\left(v_i(t) = \max_{\alpha_j(t)=1} v_j(t)\right)/2 - u(t)$. В случае если в момент $t+1$ этот агент ожидающий, его действие в момент t будем оценивать через отношение разности $u(t) - w_i(t)$ к максимальному значению этой величины, которое могло бы возникнуть при торговле данного продавца с обладающим минимальной ценой в момент t покупателем, т.е. к $u(t) - \left(v_i(t) + u(t-1)\right)/2$.

Обозначим для удобства:

$$F_i^s = \frac{2(w_i(t) - u(t))}{v_i + \max\limits_{\alpha_j(t)=-1}(v_j(t) - 2u(t))}, \quad G_i^s = \frac{2(u(t) - w_i(t))}{2u(t) - u(t-1) - v_i(t)}.$$

Тогда мы можем определить вероятность поощрения за действия данного участника торговли в момент t:

$$p_i(t) = \begin{cases} \left(1 + F_i^s\right)/2, \text{ если } w_i(t) > u(t), \\ 1/2, \text{ если } w_i(t) = u(t), \\ \left(1 - G_i^s\right)/2, \text{ если } w_i(t) < u(t). \end{cases}$$

Если участник рынка является в начале момента t покупателем и на первом такте этого момента тратит все или часть денег, действуют симметричные рассуждения. Обозначим

$$F_i^b = \frac{2(w_i(t) - u(t))}{v_i + \min\limits_{\alpha_j(t)=1} v_j(t) - 2u(t)}, \quad G_i^b = \frac{2(u(t) - w_i(t))}{2u(t) - u(t-1) - v_i(t)}.$$

Тогда

$$p_i(t) = \begin{cases} \left(1 + F_i^b\right)/2, \text{ если } w_i(t) < u(t), \\ 1/2, \text{ если } w_i(t) = u(t). \\ \left(1 - G^b\right)/2, \text{ если } w_i(t) > u(t). \end{cases}$$

Теперь остается рассмотреть случаи, когда продавец ничего не продал, покупатель ничего не купил или агент вообще не участвовал в торговле в момент t. Здесь вероятность поощрения действия агента определяется через изменение цены рынка. Действие агента, желающего продать

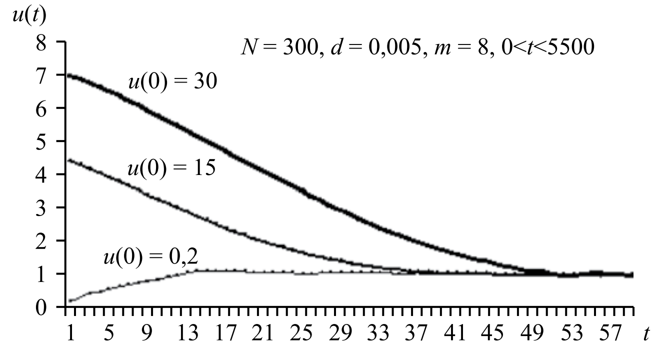

Рис. 1. Траектории $u(t)$ в случаях различных начальных условий ($\tau_1 > 4500$), когда все участники являются автоматами $L_{2m,2}$

товар, оценивается через отношение реального изменения цены рынка к максимально и минимально возможным ее изменениям:

$$F^{av} = \frac{2\big(u(t) - u(t-1)\big)}{\max\limits_{\alpha_j(t)=-1} v_j(t) - u(t-1)}, \quad G^{av} = \frac{2\big(u(t-1) - u(t)\big)}{u(y-1) - \min\limits_{\alpha_i(t)=1} v_i(t)}.$$

Тогда

$$R_i = \begin{cases} \left(1 + F^{av}\right)/2, \text{ если } u(t) > u(t-1), \\ 1/2, \text{ если } u(t) = u(t-1), \\ \left(1 - G^{av}\right)/2, \text{ если } u(t) < u(t-1). \end{cases}$$

Действие агента i, желающего купить товар, оценивается через отношение реального изменения цены рынка к минимально и максимально возможным ее изменениям:

$$R_i = \begin{cases} \left(1 - F^{av}\right)/2, \text{ если } u(t) < u(t-1), \\ 1/2, \text{ если } u(t) = u(t-1), \\ \left(1 + G^{av}\right)/2, \text{ если } u(t) > u(t-1). \end{cases}$$

Итак, набор $7N$ переменных – $x_1(t), y_1(t), \alpha_1(t), v_1(t), l_1(t), k_1(t), \ldots, x_N(t), y_N(t), \alpha_N(t), v_N(t), l_N(t), k_N(t)$ – определяет состояние $r(t)$ системы в момент t. Выбор автоматом, описывающим часть поведения участника, состояния в момент $t+1$ зависит от случайной величины $s(t)$ (поощрение/штраф), поэтому система является стохастической.

Посредством компьютерного исследования модели было показано, что *существует момент времени* τ_3: *для* $t>\tau_3$ *имеет место* $r(t) \in M_2(d)$ *и для всех точек множества* $M_2(d)$ *выполняются* $u_0 - R(m,d) < u(t) < u_0 + R(m,d)$ *(где* u_0 *– усредненное за большой промежуток времени значение* $u(t)$*)* *и* $u_0 = \frac{1}{\theta}\sum_{t=\tau_3}^{t=\tau_3+\theta} u(t)$, когда θ – *достаточно велико.*

Пример того как три траектории средней цены рынка, при сильно различающихся начальных условиях $u(0)$, начиная с одного и того же момента времени довольно мало различаются по своей величине, приведен на рис. 1.

3. СТАДНОЕ ПОВЕДЕНИЕ УЧАСТНИКОВ В АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ЗАМКНУТОГО ОДНОТОВАРНОГО РЫНКА

Стадное поведение участников часто наблюдается на финансовых рынках. Иногда оно проявляется на протяжении довольно длительного периода, а иногда оказывается краткосрочным. Есть немало причин полагать, что такое поведение участников возникает как следствие событий, происходящих вне рассматриваемого финансового рынка. Но иногда кажется, что наблюдаемое краткосрочное стадное поведение участников вызвано внутренним развитием рынка. Ответ на вопрос относительно характера и причин стадного поведения на реальных финансовых рынках требует кропотливых и длительных эмпирических и теоретических исследований и не является предметом этого исследования. Мы исследуем построенную нами агент-ориентированную модель замкнутого однотоварного рынка, которая, по нашему мнению, отражает хотя бы некоторые черты реальной динамики рынка. Это одна из первых подобных моделей. Необходимость ее простоты, продиктованная желанием получить хоть какие-то аналитические результаты, вынуждает нас максимально упростить модель, что уменьшает ее возможность отразить реальную ситуацию. В рамках изучения финансового рынка мы рассматриваем не любое наблюдаемое на рынке стадное поведение, а стадное поведение агентов модели, разработанной в (Вороновицкий, 2016). В этой модели участник выбирает только между двумя действиями – осторожным и рискованным назначениями цены. Простота и связанная с ней ограниченность модели вряд позволят нам дать практически содержательный ответ на эти и другие вопросы относительно стадного поведения участников финансового рынка. Тем не менее мы обсудим возможности и структуру стадного поведения агентов в этой модели. Хотя существует немало причин полагать, что стадное поведение участников рынка возникает как следствие внешних причин, но, как будет показано ниже, в нашей модели иногда такое поведение может возникнуть и на рассматриваемом нами замкнутом рынке.

Наиболее распространенным видом стадного поведения является случай, когда все участники, начиная с некоторого момента, выбирают одно и то же действие. В работе (Вороновицкий, 2016) мы изучали модели с одним и тем же способом выбора цены без помощи автомата, делающего выбор. В случае когда в поведении всех агентов присутствовал только осторожный выбор, компьютерные эксперименты показали сходимость системы при любом начальном состоянии к стационарному множеству состояний $M_0(d)$ такому, что средняя цена рынка $u(t)$ в этом множестве состояний находится в пределах между $u_0 - 5d$ и u_0+5d, где u_0 – средняя величина $u(t)$ в множестве $M_0(d)$. В этом случае постепенно устанавливается ситуация, когда средняя цена рынка мало меняется (учитывая, естественно, что d мало). При рискованном выборе цены компьютерные эксперименты показали сходимость траектории системы при любом начальном состоянии к стационарному множеству состояний $M_1(d)$ такому, что средняя цена рынка $u(t)$ в этом множестве состояний находится в пределах между $u_0 - 25d$ и $u_0 = 25d$. Эксперименты показали, что колебания средней цены $u(t)$ в множестве $M_1(d)$ нерегулярны, хотя и больше по амплитуде, чем в случае осторожной цены. Со стадным поведением участников связывают обычно серьезный рост, падение или значительные колебания средних цен рынка. Оба рассмотренных нами случая можно считать стадным поведением, так как все агенты совершают одни и те же действия по назначению новой цены, независимо от их положения на рынке. Но при этом в обоих случаях с течением времени мы имеем мало меняющиеся средние цены рынка, что делает эти разновидности не столь интересными для изучения динамики рынка и требует рассмотрения других видов стадного поведения на моделируемом рынке. Учет различных ролей участников в каждый момент времени и рассмотрение стадного поведения участников, играющих определенную роль в торговле на первом такте момента t, это путь обнаружения других видов стадного поведения.

В нашей модели однотоварного замкнутого рынка с конечными автоматами в качестве участников в каждый момент времени агенты исполняют разные роли, точнее, различаются статусами: продавцы, покупатели, ожидающие. Причем, как было показано ранее (Вороновицкий, 2016), ожидающие четко делятся на два множества: ожидающие, имеющие только товар и желающие его продать, и ожидающие, обладающие только деньгами и поэтому желающие купить товар. Благодаря этому можно выделить две роли участников: имеющие статус продавцов, плюс ожидающие, имеющие товар, и имеющие статус покупателей, плюс ожидающие, обладающие деньгами. Исходя из этого, имеет смысл рассматривать не обычный вид поведения, а стадное поведение групп участников: 1) для продавцов и ожидающих, имеющих товар (один из двух способов назначения цены); 2) для покупателей и ожидающих, имеющих деньги (другой из этих двух способов назначения цены). При этом каждый агент не всегда использует один и тот же выбор цены, а меняет эти выборы в зависимости от статуса. Необходимо иметь в виду, что в нашей модели замкнутого рынка торгующие агенты получают прибыль от торговли, обусловленную и пропорциональную разности цен участников сделки. Мы рассмотрим два таких вида стадного поведения агентов, не отрицая возможности существования и других видов стадного поведения[1], представляющих, может быть, больший прикладной интерес. Заметим, что согласно определению стадного поведения при таком поведении отсутствует выбор агентом действия посредством конечного автомата, а существует жесткая зависимость действия от статуса агента, если он продавец или покупатель, и наличия у него товара, если он ожидающий.

Первый вид стадного поведения состоит в том, что продавцы и ожидающие, обладающие товаром, осуществляют осторожный выбор цены, а покупатели и ожидающие, не имеющие товара (как показано ранее, т.е. имеющие деньги), осуществляют рискованный выбор цены. Поскольку рискованный выбор предлагаемой цены продавцами означает ее понижение, а осторожный выбор запрашиваемой покупателями цены означает ее уменьшение или неизменность, то в целом средняя цена рынка при таком стадном поведении понижается.

Второй вид стадного поведения состоит в том, что покупатели и ожидающие, обладающие деньгами, осуществляют осторожный выбор цены, а продавцы и имеющие товар осуществляют рискованный выбор цены. Поскольку осторожный выбор предлагаемой цены покупателями означает ее повышение или неизменность, а рискованный выбор запрашиваемой продавцами цены означает ее увеличение, то в целом средняя цена рынка при таком стадном поведении повышается.

Переход от назначения цены посредством конечного автомата к стадному поведению одного из двух описанных выше видов (включение стадного поведения) может быть инициирован, по нашему мнению, несколькими причинами. Это прежде всего изменение внешних условий (цен на других рынках или изменение фундаментальной ценности (fundamental value)). Но это может произойти и по некоторым внутренним для рынка причинам, например из-за стремления участников получить большую прибыль за счет изменения цен на этом рынке. Точно так же внешние и внутренние причины могут вызвать обратный переход от стадного поведения одного из упомянутых выше типов к выбору осторожного или рискованного назначения цены посредством конечного автомата.

В частности, в нашей модели рынка переход от выбора каждым участником цены посредством конечного автомата к одному из описанных видов стадного поведения может произойти по внутренней причине, например из-за желания участников получать прибыль за счет покупки товара и продаже его по более высокой цене (или наоборот). Маленькие колебания средней цены рынка в стационарном множестве $M_2(d)$ не позволяют этого, и участники рынка переходят к стадному поведению. Один из возможных критериев перехода одновременно всех участников рынка к стадному поведению мы предполагаем следующим:

$$\max_{t-\theta\le\tau\le t} u(\tau) - \min_{t-\theta\le\tau\le t} u(\tau) < ld, \tag{1}$$

где l — некоторая константа, θ — некоторый не слишком большой период времени, заданный заранее.

Предположим, что агенты при выполнении критерия (1) с равной вероятностью выбирают первый или второй вид стадного поведения.

Заметим, что при росте средней цены рынка цены растут за счет роста запрашиваемых продавцами цен, а изменение предлагаемых покупателями цен сдерживает этот рост. Рост запрашиваемых цен в каждый момент ограничен средней ценой рынка в предыдущий момент, потому наступает момент, когда цены продавцов мало отличаются от предыдущей средней цены рынка и рост цен замедляется. Далее происходят незначительные колебания средней цены рынка на высоком уровне ее значений. Можно показать, что наступит момент $\tau^{(1)}$, начиная с которого

$$\max_{\alpha_i(t)=-1} v_i(t) - \min_{\alpha_i(t)=1} v_i(t) < 0,5d, \quad t > \tau^{(1)}, \tag{2}$$

где $\tau^{(1)}$ — некоторый момент времени. Поскольку агентам известны предлагаемые и запрашиваемые в данный момент цены на рынке, критерий (2) служит сигналом прекращения стадного

[1] В частности, стадное поведение возможно, когда продавцы и ожидающие, обладающие товаром, осуществляют только рискованный выбор цены, а остальные участники, как и прежде, управляют выбором цены посредством конечных автоматов, или рискованный выбор цены осуществляют во всех случаях только покупатели и ожидающие, имеющие деньги.

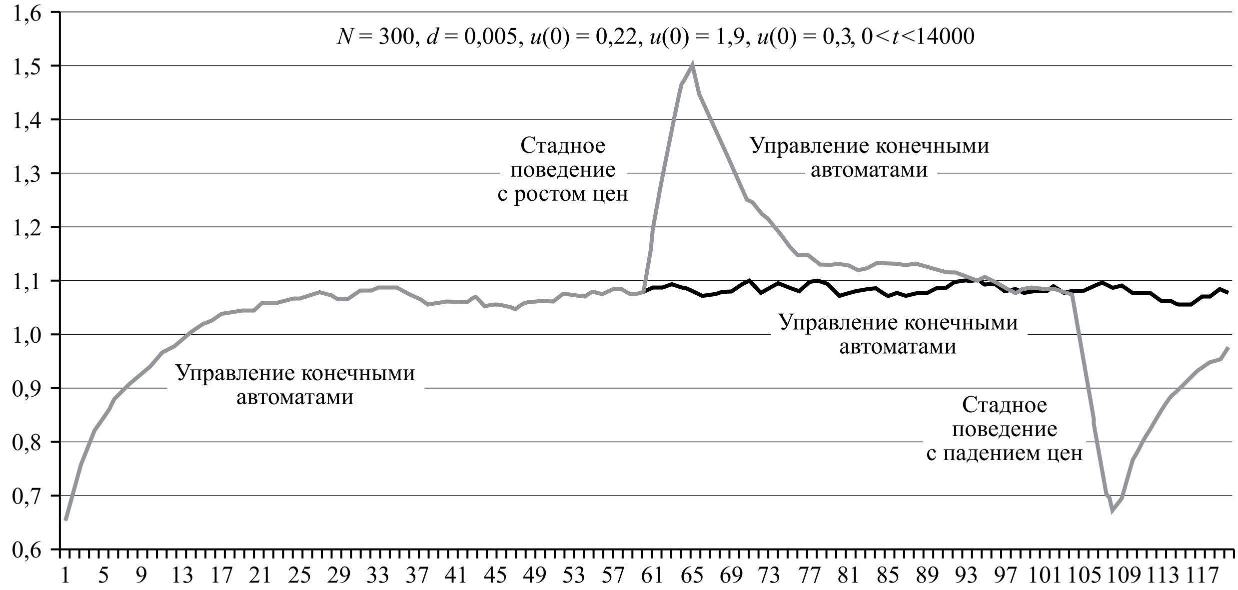

Рис. 2. Траектория $u(t)$ при модели назначения цены, когда все участники являются автоматами $L_{2m,2}$ и при использовании ими критериев (1), (2)

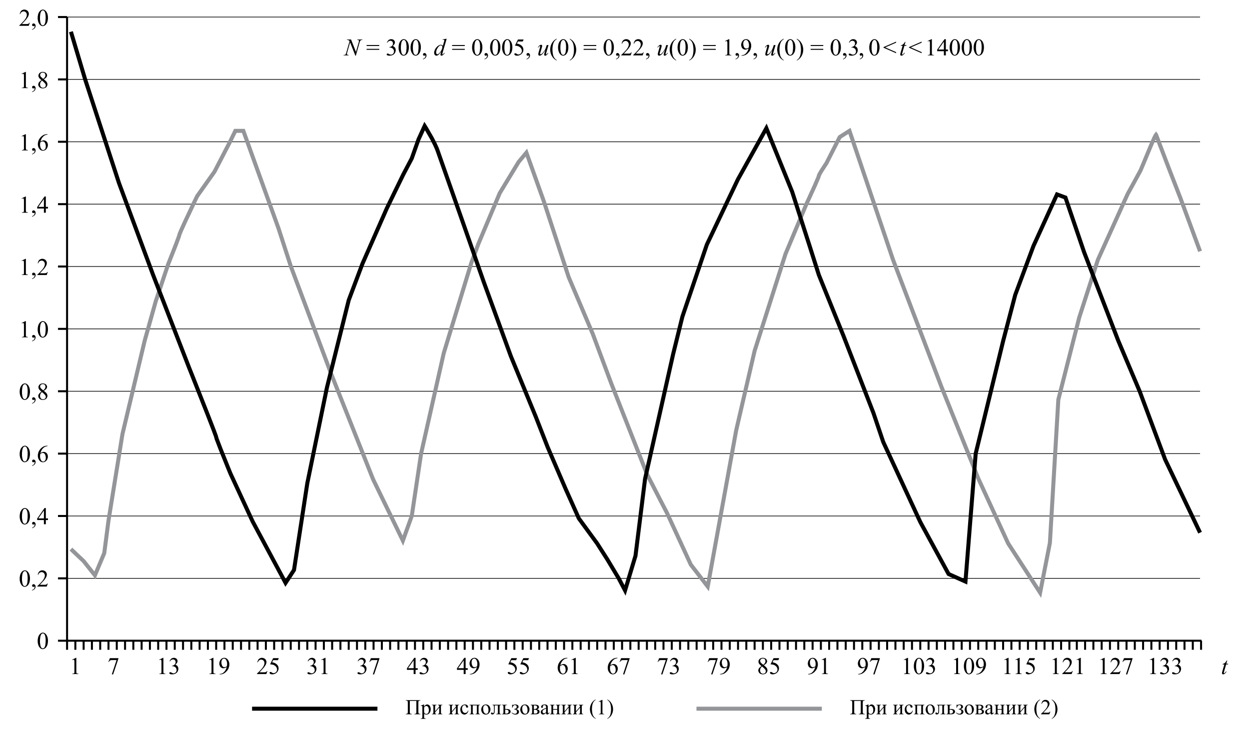

Рис. 3. Траектория $u(t)$ при стадном поведении вида (1) и (2)

поведения, связанного с ростом цен, и перед участниками возникает альтернатива перехода либо к стадному поведению, связанному с понижением цен, или к выбору цен посредством конечных автоматов.

То же самое происходит в случае падения средней цены рынка при стадном поведении второго вида с той лишь разницей, что в этом случае прекращается неуклонное падение средней цены рынка. Важно отметить, что при выполнении критерия (2) прибыль торгующих участников снова становится незначительной или отсутствует. Критерий (2) также служит сигналом прекращения стадного поведения, связанного с падением цен, и перед участниками возникает

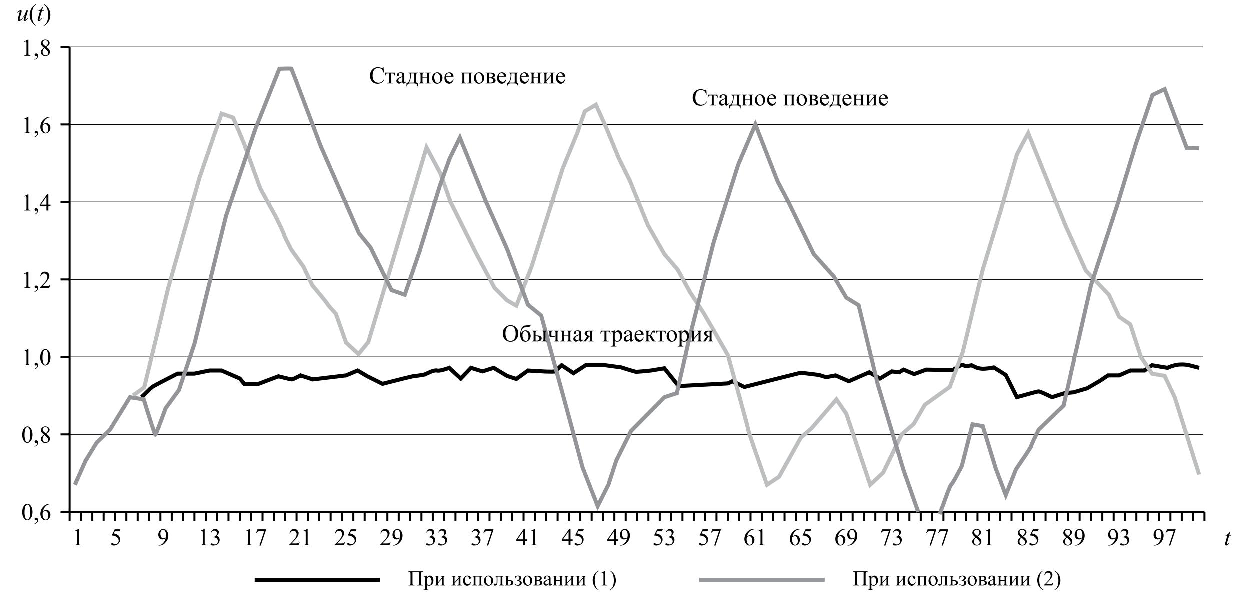

Рис. 4. Траектории $u(t)$ для случаев, когда агенты выбирают цену посредством автоматов и стадного поведения вида (1) и (2)

альтернатива перехода либо к стадному поведению, связанному с понижением цен, или к выбору цен посредством конечных автоматов. Сначала рассмотрим наиболее естественный, по нашему мнению, случай, когда после выполнения критерия (2) все участники возвращаются к назначению цен посредством конечных автоматов. Этот случай мы видим на рис. 2, на котором показаны две траектории системы при общем начальном состоянии системы. Одна из этих траекторий соответствует постоянному назначению цены с помощью конечных автоматов (в частности, в начальный отрезок времени), вторая включает стадное поведение, регулируемое критериями (1) и (2), причем при выполнении критерия (2) система однозначно переходит от стадного поведения к назначению цены посредством конечных автоматов.

Другим, более экзотическим вариантом, представляется случай, когда при стадном поведении и выполнении критерия (2) происходит переход к противоположному виду поведения. На рис. 3 изображен случай, когда агенты после стадного поведения, связанного с ростом цен, при выполнении критерия (2) переходят к противоположному стадному поведению, связанному с падением цен, а затем снова при выполнения критерия 1 переходят к стадному поведению, связанному с ростом цен, и т.д. Если эта стратегия уже не дает роста средней цены рынка, они меняют стратегии: все продавцы выбирают осторожный выбор, а все покупатели осуществляют рискованный выбор во все моменты следующего интервала времени (похоже на игру на понижение (go to a bear)). На рис. 3 приведены как случай, когда в начальный момент имеет место стадное поведение первого вида, так и случай, когда в начальный момент имеет место стадное поведение второго вида.

На рис. 4 приведены случаи траектории системы, соответствующей назначению цены посредством конечных автоматов (обычная траектория) и двух траекторий (траектория стадного поведения), когда после первого выполнения критерия (1) все агенты переходят к стадному поведению. Траектории различаются тем, что при выполнении критерия (1) агенты переходят к стадному поведению первого или второго вида. Заметим, что согласно нашему предположению переходы к стадному поведению каждого вида равновероятны.

Графики на рис. 2–4 и многочисленные компьютерные эксперименты показывают, что увеличение (уменьшение) средней цены рынка при стадном поведении многократно больше колебаний средней цены рынка внутри стационарного множества, в которое попадает и остается в течение бесконечного времени траектория системы при управлении выбора цен всеми участниками с помощью конечных автоматов.

Возможность участников увеличивать свое богатство (стоимость своих активов) за счет разности цен покупателя и продавца, вероятно, увеличивается при возникновении стадного

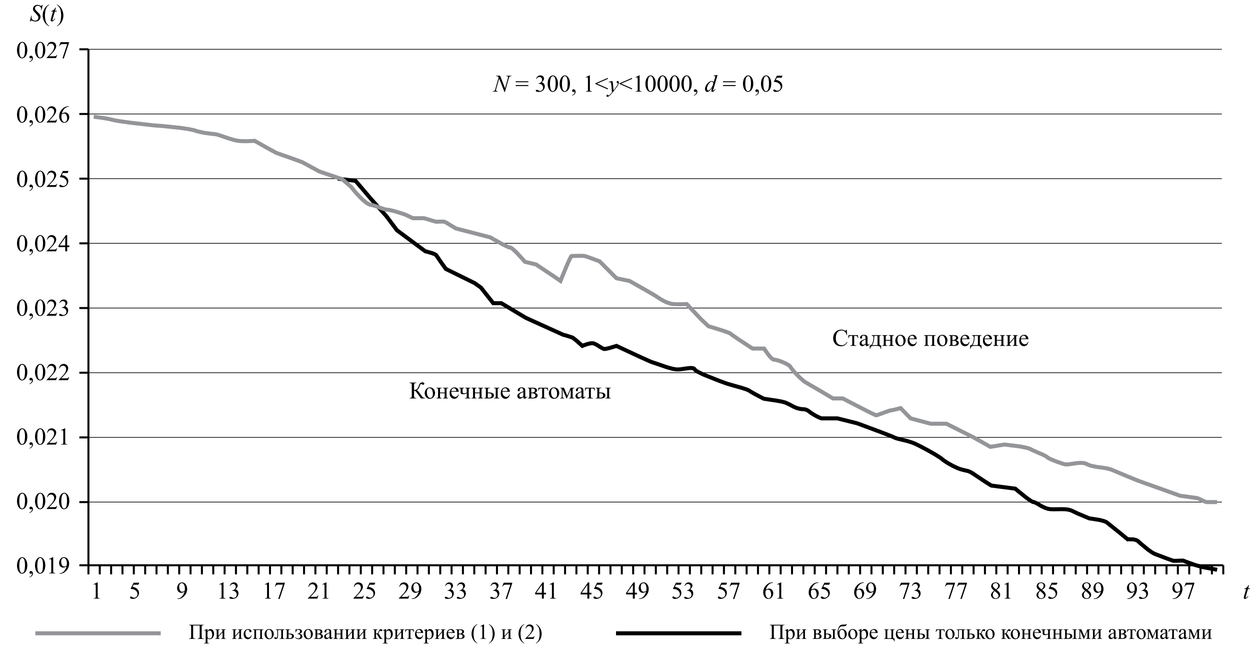

Рис. 5. Траектории $S(t)$ при одном и том же $u(0)$: при выборе цены только конечными автоматами и при использовании критериев (1) и (2)

поведения. Одинаковость алгоритмов поведения участников, заложенная в модели, является главной причиной развития системы в сторону выравнивания их богатства. Вопрос состоит в скорости этого выравнивания. Вероятно, стадное поведение дает возможность некоторым участникам увеличивать свое богатство за счет большей возможности роста цены продажи в сравнении с ценой покупки товара, или наоборот.

Мы попытались косвенно проверить это предположение, поэтому исследовали динамику $S(t)$ – отношения квадратного корня из суммы квадратов отклонений активов каждого агента от среднего актива агента в момент t к суммарному богатству рынка в момент t.

$$S(t)=\left\{\sum_{i=1}^{i=N}\left[x_i(t)u(t)+y_i(t)-(1+u(t))/N\right]^2\right\}^{1/2}/(1+u(t)).$$

На рис. 5 приведена динамика $S(t)$ для случая участников, которые проявляют стадное поведение первого типа, и случая, когда участники выбирают цены посредством конечных автоматов. Величина $S(t)$ характеризует распределение активов между участниками рынка. Довольно маленькое значение этой величины в случае, когда назначение цены производится конечными автоматами, объясняется близким к равномерному начальным распределением активов между участниками и однотипным механизмом принятия решений участниками. Случай стадного поведения не показывает большого отличия от предыдущего случая. Величина $S(t)$ также уменьшается со временем, но стадное поведение замедляет это уменьшение. Это замедление подтверждает наше предположение о том, что при стадном поведении некоторые участники могут увеличивать свои активы за счет длительного увеличения или уменьшения цен на рынке, получая благодаря изменению этих цен дополнительную прибыль, что невозможно при почти постоянной средней цене рынка.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы рассмотрели возможность стадного поведения агентов в разработанной и исследованной прежде простой модели замкнутого однотоварного рынка. Простота модели, с одной стороны, позволяет нам исследовать закономерности динамики модели аналитически и с помощью компьютерного моделирования, а с другой стороны, значительно ограничивает изучение многих наблюдаемых в реальности явлений функционирования рынков. В качестве возможного исследован только один вариант взаимодействия участников рынка и два варианта выбора ими решения о ценах: осторожное и рискованное, — причем возможность риска предполагается ограниченной. Одинаковость структуры механизмов выбора решения ее участниками облегчает (а то и просто делает возможным) исследование стадного поведения участников и изучение других свойств модели.

Удалось исследовать только 4 варианта стадного поведения: 1) все участники предпринимают только осторожные действия; 2) все участники предпринимают только рискованные действия; 3) все продавцы в каждый момент действуют осторожно, тогда как покупатели в этот момент действуют рискованно; 4) все продавцы в каждый момент действуют рискованно, тогда как покупатели в этот момент действуют осторожно. Ограниченность модели, связанная с ее простотой, не позволила нам изучать такие процессы, как переход части агентов к стадному поведению и распространение такого поведения среди остальных агентов. Варианты стадного поведения, которые возникают по внутренним для модели причинам, были изучены при помощи компьютерного моделирования. Результаты компьютерных экспериментов позволяют предположить следующее. Такое явление возможно на некоторых реально замкнутых (конечно, в ограниченный промежуток времени) рынках, и рассмотренные нами механизмы стадного поведения так же, как это описано здесь, могут возникать и прекращаться на незамкнутых рынках при изменении, например, фундаментальной ценности или увеличении (уменьшении) количества денег или товара на рынке. Но, к сожалению, наши исследования не дают возможности судить о существовании этих явлений в реальной ситуации. Связь с эмпирикой в наших рассуждениях невелика, и первое место занимает стремление наиболее просто отразить черты торговли на рынке и механизмы выбора решения участниками так, чтобы был возможен простой математический анализ поведения модели. Устранение этих недостатков связано с созданием более реалистичных и поэтому более трудных для исследования моделей.

Данная работа завершает наше исследование агент-ориентированных моделей однотоварного рынка. Понимая всю ограниченность полученных результатов и многие недостатки нашего описания реальных процессов торговли и принятия решения, мы надеемся, что данный подход к исследованию этих явлений может оказаться полезным при дальнейшем изучении динамики процессов, происходящих на финансовых рынках. Полный ответ на вопрос об адекватности динамики нашей агент-ориентированной модели и реальности еще впереди.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вороновицкий М.М. (2016). Динамическая модель замкнутого однотоварного рынка с конечными автоматами в качестве участников // *Экономика и математические методы*. Т. 52. № 2. С. 57–72.

Вороновицкий М.М., Цветков В.А. (2012). Модели стадного поведения участников рынка М.: ИПР РАН.

Макаров В.Л. (2012). Искусственные общества // *Экономика и математические методы*. Т. 48. № 3. С. 3–20.

Цетлин М.Л. (1969). Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука.

Avery C., Zemsky P. (1998). Multidimensional Uncertainty and Herd Behavior in Financial Market *American Economic Review*. Vol. 88. No. 4. P. 724–748.

Banerjee A.V. (1992). A Simple Model of Herd Behavior // *The Quarterly Journal of Economics*. Vol. CVII. August. P. 797–817.

Bikhandany S., Hirsheifer D., Welch I. (1992). A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades' // *Journal of Political Economy*. Vol. 100. No. 5. P. 992–1026.

Bichandany S., Sharma S. (2000). Herd Behavior in Financial Markets. A Review IMF Working paper, IMF Institute WP/00/48.

Topol R. (1991). Bubbles and Volatility of Stock Prises; Effect of Mimenic Copnyagion // *The Economic Journal*. Vol. 101. P. 176–809.

Поступила в редакцию
21.06.2016 г.

REFERENCES (with English translation and transliteration)

Avery C., Zemsky P. (1998). Multidimensional Uncertainty and Herd Behavior in Financial Market. *American Economic Review* 88, 4, 724–748.

Banerjee A.V. (1992). A Simple Model of Herd Behavior. *The Quarterly Journal of Economics* CVII, August, 797–817.

Bichandany S., Sharma S. (2000). Herd Behavior in Financial Markets. A Review IMF Working paper, IMF Institute WP/00/48.

Bikhandany S., Hirsheifer D., Welch I. (1992). A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades'. *Journal of Political Economy* 100, 5, 992–1026.

Makarov V.L. (2012). The Artificial Societies. *Economics and Mathematical Methods* 48, 3, 3–20 (in Russian).

Topol R. (1991). Bubbles and Volatility of Stock Prises; Effect of Mimenic Copnyagion. *The Economic Journal* 101, 176–809.

Tsetlin M.L. (1969). Automaton Theory and Modeling of Biological Systems. Moscow: Nauka (in Russian).

Voronovitsky M.M. (2016). The Dynamic Model of the Closed Market with One Commodity and Finite Automata as Participants. *Economics and Mathematical Methods* 52, 2, 57–72 (in Russian).

Voronovitsky M.M., Tsvetkov V.A. (2012). Models of Herd Behavior of Participanys of a Market. Moscow: Market Economy Institute of RAS (in Russian).

Received 21.06.2016

ON THE HERD BEHAVIOR IN THE DYNAMIC MODEL OF CLOSED ONE COMMODITY MARKET WITH FINITE AUTOMATA AS PARTICIPANTS*

M.M. Voronovitsky[i]

Abstract. We investigate the mechanisms of the herd behavior of participants in a closed model of one-commodity market. The herd behavior is a case of behavior when participants renounce from using all the own information and repeats the actions of majority of other participants of the collective. The investigation of a herd behavior of participants in real financial market is an important and a very complicated problem. A rather modest problem of investigation of the herd behavior in the agent is based on a model of a closed one-commodity market, which was formulated and investigated in our previous paper, is an object of this article. Two cases of choice by all agents of the same algorithm of definition of price was investigated in the previous paper. It was shown that in both cases trajectory of system after some time is a stationary set in which an average price at market oscillates close to its constant value. In this paper we show, that there is a possibility of the two other cases of herd behavior in the same model: one induces the growth of the average price at a market and the other – herd behavior induces decreasing the average price of market. It is obviously from this investigation that herd behavior can occur in the finite interval of time. The opportunity of herd behavior which has the interior state of market is a reason of its arising was discussed in the article.

Keywords: model, closed market, herd behavior, go to a bear, go to a bull/one commodity market, dynamics of prices, trajectory, stationary set, steady state, rational choice, finite automata.

JEL Classification: C51, D01.

* This work was fulfilled in Market Economy Institute of Russian Academy of Sciences with support of Russian Foundation of Fundamental Researches (grant 14–06–00110).

[i] **Mark M. Voronovitsky** – Ph.D (mathematics), associated professor, pensioner at the Market Economy Institute RAS, Moscow, Russia; v_mark50@hotmail.com.