

ВРЕМЕННОЙ КРИТЕРИЙ АГРЕГАЦИИ В КЛАСТЕРНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ ДОСТАВКИ ГРУЗОВ

© 2017 г. К.С. Подшиваловаⁱ, С.Ф. Подшиваловⁱⁱ

Аннотация. Рассматривается эвристический подход для решения транспортной задачи при партионной доставке однородного груза в пункты непересекающихся кластеров с нескольких баз обслуживания. Математическая формулировка вопроса сводится к задаче линейного программирования. Алгоритм ее решения состоит из двух этапов и основан на идеях агрегации и дезагрегации пунктов в кластере. Оптимизационной моделью первого этапа выступает задача маршрутизации движения с баз через каждый кластер. При этом холостой прогон с каждого пункта принимается равным нулю. Благодаря этому оптимальный кольцевой или радиальный маршрут определяется с помощью одного алгоритма. Задача маршрутизации решается методом фиктивных узлов и ветвей, позволяющим неоднократно посещать вершины транспортного графа. В качестве критерия агрегации используется минимальное время грузового прогона с базы в конечный пункт разгрузки кластера на взвешенном графе. Он позволяет учесть время простоя в пунктах транспортной сети и движения между ними. На втором этапе проводится оптимальное распределение веса груза между базами и кластерами в полученном агрегированном транспортном графе с дугами, равными минимальному времени грузового прогона. Данный подход позволил решить транспортную задачу с учетом особенностей доставки мелких партий груза.

Ключевые слова: маршрутизация, кластер, транспортная задача, фиктивный узел, линейное программирование, агрегация.

Классификация JEL: C61.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исходя из поставленной задачи управления материальными потоками, большую транспортную сеть подвергают декомпозиции и разбивают на кластеры. Количество пунктов определяется временем решения задачи в каждом отдельно взятом кластере, а затем и в системе в целом.

Постановка задачи при доставке груза автомобилем по нескольким пунктам потребления (партионная развозка) заключается в следующем. Однородный груз находится в n базах весом $G_1, \dots, G_n$ тонн. Груз отправляется по m непересекающимся кластерам в количестве $Q_1, \dots, Q_m$ тонн. Между k пунктами каждого кластера груз развозится последовательно весом $q_1, \dots, q_k$ тонн. Требуется составить оптимальный план перевозок по времени, который включает в себя маршруты движения и количество перевозимого по ним груза в тоннах.

Математическая формулировка задачи записывается в виде задачи линейного программирования

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m t_{ij} X_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^m X_{ij} = G_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = Q_j, \quad j = 1, \dots, m; \quad (3)$$

ⁱКристина Сергеевна Подшивалова — к.т.н., доцент кафедры «Организация и безопасность движения», Пенза; sharm-08@bk.ru.

ⁱⁱСергей Федорович Подшивалов — к.т.н., доцент кафедры «Механика», Пенза, podshivalov.s.f@mail.ru.

$$X_{ij} \geq 0; \quad (4)$$

$$Q_j = \sum_{\phi=1}^k q_{\phi j}, \quad \phi = 1, \dots, k; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n G_i = \sum_{j=1}^m Q_j, \quad (6)$$

где X_{ij} — искомое количество груза в тоннах, перевозимое автомобилем из базы i через кластер m ; t_{ij} — неизвестный временной параметр, требующий предварительного определения.

Ограничение по запасам выражает зависимость (2). Формула (3) обеспечивает условие, что все потребности будут удовлетворены полностью; (4) — условие неотрицательности переменной; (5) показывает, что груз развозится по k пунктам кластера; (6) обеспечивает равенство объема завозимого груза на всех маршрутах его объема, вывозимому от всех поставщиков.

Известен алгоритм определения оптимального плана грузоперевозок между грузополучателями и грузоотправителями при помашинной развозке грузов (Кожин, Мезенцев, 1994, с. 89, 140; Таха 2001, с. 179–219), основанный на решении транспортной задачи линейного программирования методом потенциалов (модифицированный распределительный метод, МОДИ). Чтобы применить его к транспортной задаче при партионной доставке груза, требуется знать оптимальный маршрут движения через кластер. Таким образом, алгоритм решения рассматриваемой кластерной транспортной задачи состоит из двух основных этапов, в каждом из которых используется один и тот же временной критерий оптимальности, отражающий физическую сущность исследуемого процесса доставки груза.

Существуют различные методы решения задачи маршрутизации, которые делятся на точные и приближенные. При кластерной постановке задачи предпочтение следует отдать точному методу ветвей и границ, поскольку на практике при развозке потребительских товаров в городах:

1) число пунктов обслуживания одним автомобилем на маршруте незначительно;

2) в силу планировки улиц городов транспортный граф является неполным. С увеличением числа пунктов обслуживания процент незаполненных клеток распределительной матрицы возрастает;

3) методика ветвей и границ продолжает совершенствоваться (Костюк, 2013, с. 89). Отметим, что одним из ее недостатков является возможность посещения вершин графа один раз (Литл и др., 1965, с. 94–107). В действительности более короткий путь может проходить через подциклы графа или вершины, уже вычеркнутые один раз в процессе расчета на дереве решений (Подшивалова, 2007, глава 2). Приближенные методы решения задачи коммивояжера также не рассматривают маршруты с петлями.

2. МОДЕЛЬ, АЛГОРИТМ И МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Для решения кластерной транспортной задачи используем эвристический подход. В его основу положена идея агрегации и дезагрегации. Однако в отличие от (David, Robert, 1991, p. 566–570) оптимизационной моделью первого уровня будет выступать маршрут передвижения в кластере.

Представим каждый кластер в виде одной вершины, сосредоточив в ней весь груз, и, таким образом, заменим действительную транспортную сеть агрегированным транспортным графом. Для этого необходимо выбрать критерий агрегирования и на его основе решить задачу маршрутизации при проезде с баз обслуживания через пункты кластера. Критерий агрегации должен отражать физическую сущность исследуемого процесса доставки груза, которая заключается в движении и простое под разгрузкой, так как груз считается доставленным, когда он разгружен на складе потребителя. При партионной развозке в населенных пунктах время простоя под разгрузочными работами может составлять значительную долю времени в наряде, и, следовательно, этот фактор влияет на выбор оптимального маршрута.

В качестве критерия агрегации при поиске оптимального кольцевого и радиального маршрутов предлагается использовать минимальное время груженого пробега, проходящего из базы через кластер, на взвешенном транспортном графе.

Затраты времени на некоторой груженой ветви $i-j$ при движении от вершины i к пункту j находим по формуле

$$t_{ij}^{\text{гп}} = l_{ij} / V_{ij} + t_j^{\text{р}} g_j + t_j^{\text{м}}, \quad (7)$$

где l_{ij} — длина груженой ездки на ветви $i-j$; V_{ij} — техническая скорость; $t_j^{\text{р}}$ — время разгрузки единицы груза в вершине j ; g_j — масса груза в вершине j ; $t_j^{\text{м}}$ — время маневрирования и ожидания в пункте j .

В обратном направлении при движении от пункта j к i время на ветви $j-i$ находится из выражения

$$t_{ji}^{\text{гп}} = l_{ji} / V_{ji} + t_i^{\text{р}} g_i + t_i^{\text{м}}. \quad (8)$$

Таким образом, необходимо учесть направление движения и вес разгружаемого груза на графе.

Под *радиальным грузовым маршрутом* понимается схема движения от базы до последнего пункта разгрузки на маршруте. Чтобы исключить влияние величины холостого пробега на выбор оптимального маршрута, используется следующий прием. Проводим ориентированные дуги нулевой величины, направленные от всех пунктов к базам. В результате получается грузовой кластерный граф. Следует отметить, что повторный проезд через базу запрещен.

Для возможности неоднократного посещения пунктов разгрузки и проезда по ветвям графа авторами была разработана методика фиктивных узлов и ветвей (ФУВ), которая является обобщением точного метода ветвей и границ (Подшивалова, 2007, глава 2). Методика ФУВ также дает точный результат. Математическая модель записывается в виде

$$\sum_{i=1}^n t_{ij}^{\text{гп}} \rightarrow \min. \quad (9)$$

Алгоритм поиска оптимального грузового маршрута

1. Используя формулы (7) и (8), составляется исходная матрица времени пробега с грузом для кластерного графа $T_{ij}^{\text{гп}}$ (табл. 1, в пустых ячейках таблицы находятся большие числа).

Таблица 1. Исходная матрица $T_{ij}^{\text{гп}}$

	Б	1	2	...	i	j
Б		$t_{Б1}^{\text{гп}}$	$t_{Б2}^{\text{гп}}$	...	$t_{Би}^{\text{гп}}$	
1	0			...	$t_{1i}^{\text{гп}}$	$t_{1j}^{\text{гп}}$
2	0			...	$t_{2i}^{\text{гп}}$	$t_{2j}^{\text{гп}}$
...	...	...	...	...	...	...
i	0			...		$t_{ij}^{\text{гп}}$
j	0	$t_{j1}^{\text{гп}}$	$t_{j2}^{\text{гп}}$	...	$t_{ji}^{\text{гп}}$	

2. Затем формируем приведенную матрицу $T_{ij}^{\text{гп}}$. Для этого в каждой строке таблицы $T_{ij}^{\text{гп}}$ находится минимальный элемент $\min t_{ij}^{\text{гп}}$ и вычитается из всех остальных элементов строки:

$$t_{ij}^{\text{np1}} = t_{ij}^{\text{np}} - \min t_{ij}^{\text{np}}, i = 1, \dots, k. \quad (10)$$

В полученной матрице выделяем минимальный элемент в каждом столбце $\min t_{ij}^{\text{np1}}$ и вычитаем его из остальных элементов столбца:

$$t_{ij}^{\text{np}} = t_{ij}^{\text{np1}} - \min t_{ij}^{\text{np1}}, j = 1, \dots, s. \quad (11)$$

Теперь в каждом столбце и строке есть хотя бы один нулевой элемент (табл. 2).

Таблица 2. Приведенная матрица T_{ij}^{np}

	Б	1	2	...	i	j
Б		0		...	t_{Bi}^{np}	
1	0			...	0	t_{1j}^{np}
2	0			...	t_{2i}^{np}	t_{2j}^{np}
...	...	...	...	...	...	...
i	0		t_{i2}^{np}	...		0
j	0	t_{j1}^{np}	0	...	t_{ji}^{np}	

3. Формируем оценочную матрицу T_{ij}^{o} (табл. 3). Для каждого элемента с $t_{ji}^{\text{o}} = 0$ строится оценка по формуле

$$A_{ij} = \min t_{ik}^{\text{o}} + \min t_{sj}^{\text{o}}, \quad (12)$$

где $\min t_{ik}^{\text{o}}$ – минимальный элемент в строке i ; $\min t_{sj}^{\text{o}}$ – минимальный элемент в столбце j ; $k \neq j$; $s \neq i$; $k, s = 1, \dots, z$. Затем определяем пару $i-j$ с максимальной оценкой

$$A_{ij} = \max A_{ij}, i, j = 1, \dots, z. \quad (13)$$

Таблица 3. Оценочная матрица T_{ij}^{o}

	Б	1	2	...	i	j
Б		$0 A_{B1}$	t_{B2}^{o}	...	t_{Bi}^{o}	
1	00			...	$0 A_{1i}$	t_{1j}^{o}
2	$0 A_{2Б}$			...	t_{2i}^{o}	t_{2j}^{o}
...	...	...	...	...	...	...
i	$0 A_{iБ}$		t_{i2}^{o}	...		$0 \max A_{ij}$
j	$0 A_{jБ}$	t_{j1}^{o}	$0 A_{j2}$	...	t_{ji}^{o}	

4. Переходим к новой матрице T_{ij} . Для этого удаляем из матрицы T_{ij}^o строку i и столбец j с наибольшей оценкой $\max A_{ij}$ (в табл. 3 они выделены цветом). В результате получаем матрицу меньшего размера (табл. 4), в которой блокируется ячейка на пересечении строки j и столбца i , а также ветвь, ведущая к зацикливанию цепи со звеном $i-j$.

Таблица 4. Матрица T_{ij}

	Б	1	2	...	i
Б		0	$t_{Б2}^o$	...	$t_{Би}^o$
1	0			...	0
2	0			...	t_{2i}^o
...	...	...	...		...
j	0	t_{j1}^o	0	...	

5. Создаем фиктивные матрицы Φ_i и Φ_j путем введения в T_{ij} фиктивных узлов i и j (табл. 5 и 6).

Таблица 5. Фиктивная матрица Φ_i

	Б	1	2	...	i	Φ_i
Б		0	$t_{Б2}^o$	...	$t_{Би}^o$	$t_{Би}^o$
1	0	...	0	0		
2	0			...	t_{2i}^o	t_{2i}^o
...	...	...	...	...	...	...
j	0	t_{j1}^o	0	...		t_{ji}^o
Φ_i	0		t_{i2}^o	...		

Таблица 6. Фиктивная матрица Φ_j

	Б	1	2	...	i	Φ_j
Б		0	$t_{Б2}^o$	...	$t_{Би}^o$	
1	0			...	0	t_{1j}^o
2	0			...	t_{2i}^o	t_{2j}^o
...	...	...	...	...	...	...
j	0	t_{j1}^o	0	...		...
Φ_j	0	t_{j1}^o	0	...		

6. Над матрицами T_{ij} , Φ_i и Φ_j выполняем операции, описанные в пунктах 4–5, до тех пор, пока последняя вычеркиваемая ветвь не станет очевидной.

7. Оптимальное время и схема маршрута устанавливается из сравнения всех возможных полученных рациональных вариантов.

Максимальное число фиктивных узлов, которое можно ввести, равно числу действительных ветвей в узле минус единица.

Пример. Рассмотрим методику применения алгоритма на простом примере для транспортной сети из 5 пунктов и 1 базы рис. 1.

В табл. 7 представлена матрица времени груженого пробега (грузовой транспортный граф – рис. 2, табл. 8). Время простоя в каждом пункте разгрузки для простоты расчетов будем считать одинаковым и равным 0,1 ч. Далее приводится краткое решение задачи.

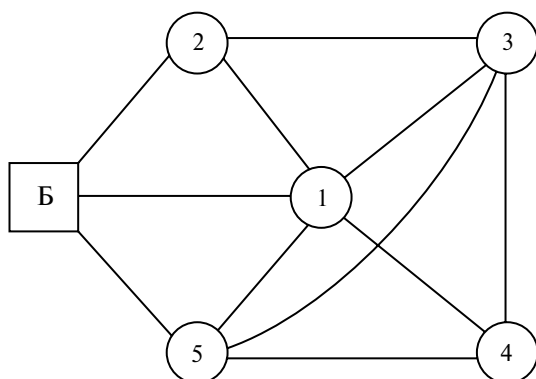


Рис. 1. Исходный транспортный граф

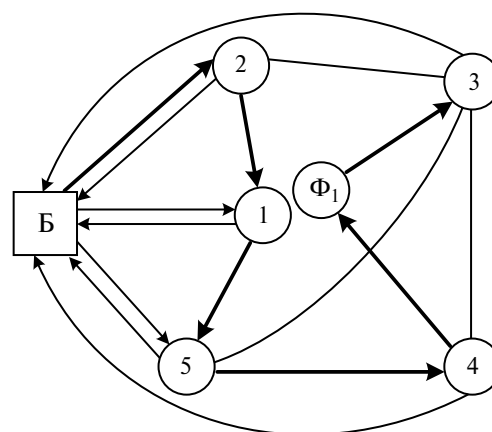


Рис. 2. Грузовой транспортный граф

Таблица 7. Матрица времени груженого пробега, ч

	Б	1	2	3	4	5
Б		0,964	0,512			0,813
1	0,464		0,465	0,820	0,403	0,325
2	0,842	0,362		0,865		0,935
3		0,750	0,642		1,200	1,586
4		0,303		1,300		0,830
5	0,500	0,300	0,746	1,100	0,600	

Таблица 8. Матрица грузового графа

	Б	1	2	3	4	5
Б		0,964	0,512			0,813
1	0		0,465	0,820	0,403	0,325
2	0	0,362		0,865		0,935
3	0	0,750	0,642		1,200	1,586
4	0	0,303		1,300		0,830

Выполняя 2 и 3 шаг алгоритма, получаем оценочную матрицу (табл. 9), где вычеркиваем ветвь Б–2, тем самым формируется матрица меньшего размера (табл. 10). В ней блокируется ячейка 2–Б и выполняются операции приведения и оценки.

Таблица 9. Оценочная матрица 1

	Б	1	2	3	4	5
Б		0,152	0,465 0			0,024 0
1	0		0,465	0,045 0	0,197 0	0,024
2	0,045 0	0,062		0,045		0,634
3	0,45 0	0,450	0,642		0,797	1,285
4	0,003 0	0,003		0,480		0,529
5	0	0,003 0	0,746	0,280	0,197	

Таблица 10. Оценочная матрица 2

	Б	1	2	3	4	5
Б	0		0	0,197	0,505	0
1		0,017	0,017		0,565	
2	0,47	0,470		0,797	1,261	0,47
3	0,003	0,003	0,480		0,505	0,003
4	0	0,003	0,280	0,197		0
5	0		0	0,197	0,505	0

Введение фиктивного узла в вершину 2 не дает оптимального результата, и подробное решение здесь не приводится.

В табл. 10 вычеркиваем дугу 1–5 и создаем фиктивную матрицу Φ_1 с фиктивным узлом в вершине 1 (табл. 11) и в ней блокируем ячейку 5–1.

Таблица 11. Фиктивная матрица Φ_1

	Б	1	3	4	Φ_1
2		0,017	0		0,017
3	0	0,470		0,797	0,470
4	0	0,003	0,480		0,003
5	0		0,280	0,197	0
Φ_1	0		0	0	

Приводим столбец 1, а затем оцениваем элементы полученной матрицы (табл. 12). В ней удаляем ветвь 3–Б.

Таблица 12. Оценочная матрица 3

	Б	1	3	4	Φ_1
2		0,014	0,014		0,017
3	0,467	0,467		0,797	0,470
4	0	0,014	0,480		0,003
5	0		0,280	0,197	0,003
Φ_1	0		0	0,197	

Далее расчеты производятся аналогично вышеизложенному алгоритму. Получается маршрут, выделенный на рис. 2: Б–2–1–5–4–Ф₁–3. Пункт 1 посещается дважды, с наименьшим временем груженого пробега $\min t^{\text{гп}} = 2,822$ ч. Использование других вариантов вычеркивания ветвей не приводит к улучшению полученного результата.

При решении исходной задачи методом ветвей и границ получается незамкнутый маршрут с $\min t^{\text{гп}} = 3,052$ ч (Б–2–3–1–5–4).

Таким образом, в результате расчета по методике ФУВ имеем самую короткую схему доставки груза в конечный пункт разгрузки по критерию времени.

На втором этапе рассчитанные минимальные значения временного критерия агрегации для каждого кластера записываются в правый верхний угол распределительной матрицы агрегированного графа (Кожин, 1994, с. 89). После ее решения и распределения объемов грузов между базами и кластерами производим его дезагрегацию. Определяем конечные пункты маршрутов разгрузки груза и время холостых пробега до каждого грузоотправителя. Далее производим оптимизацию холостых пробега методом совмещенных матриц (Кожин, 1994, с. 140).

Использование эвристического подхода и критерия агрегации в виде минимального времени груженого пробега позволяет свести решение задачи распределения грузопотоков в кластерном транспортном графе при совместной помашинной и партионной развозке к задаче линейного программирования. Применение точного метода фиктивных узлов и ветвей дает возможность определить более короткий и экономичный маршрут по сравнению с методом ветвей и границ за счет неоднократного посещения вершин транспортного графа. Разработанная модель может быть полезна при стоимостных или иных критериях агрегации взвешенного графа различных задач транспортного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Кожин А. П., Мезенцев В. Н. (1994). Математические методы планирования и управления грузовыми автомобильными перевозками. М.: Транспорт.
- Костюк Ю. Л. (2013). Эффективная реализация алгоритма решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ // *Прикладная дискретная математика*. № 2(20). С. 78–90.
- Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Карел К. (1965). Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // *Экономика и математические методы*. Т. 1. Вып. 1. С. 94–107.
- Подшивалова К. С. (2007). Повышение эффективности перевозок мелкопартионных грузов автомобильным транспортом. Автореф. дисс... канд. техн. наук. Волгоград.
- Таха Х. А. (2001). Введение в исследование операций. М.: ДомВильямс.
- David F.R., Plante R.D., Wong R.T., Evans J.R. (1991). Aggregation and Disaggregation Techniques and Methodology in Optimization // *Operations Research*. Vol. 39. No. 4. P. 553–582.

Поступила в редакцию
06.04.2015 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- David F.R., Plante R.D., Wong R.T., Evans J.R. (1991). Aggregation and Disaggregation Techniques and Methodology in Optimization // *Operations Research* 39(4), 553–582.
- Kostyuk Yu.L. (2013). Effective Implementation of Algorithm for Solving the Travelling Salesman Problem by Branch-and-Bound Method. *Applied Discrete Mathematics* 2(20), 78–90 (in Russian).
- Kozhin A.P., Mezencev V.N. (1994). Mathematical Methods of Planning and Management of Freight Automobile Transportations. Moscow: Transport (in Russian).
- Litl Dzh., Murti K., Suini D., Karel K. (1965). Algorithm for the Solution of a Task on the Direct-Sales Representative. *Economics and Mathematical Methods* 1, 1, 94–107 (in Russian).
- Podshivalova K.S. (2007). Improving the Efficiency of Transportation of Groupage Cargo by Road Transport. Abstract diss. ... cand. tech. sciences. Volgograd (in Russian).
- Taha X.A. (2001). Introduction to Operations Research. Moscow: Vil'yams (in Russian).

Received 06.04.2015

TEMPORAL CRITERION OF AGGREGATING IS IN A CLUSTER TRANSPORT TASK OF CARGO TRANSPORTATION

C.S. Podshivalovaⁱ, S.F. Podshivalovⁱⁱ

Abstract. Heuristic approach for the solution of a transport task at a lot-based delivery of a homogeneous load in points of not-crossed clusters from several bases of service is considered. The mathematical formulation of a question is consolidated to a problem of linear programming. The algorithm of its decision consists of two stages and is based on ideas of aggregation and disaggregation of points in a cluster. At the first stage the optimization model is the problem of routing of the transportation from bases through each cluster. At the same time single run from each point is accepted equal to zero. Thanks to it the optimum ring or radial route is decided with the help of one algorithm. The problem of routing is solved by the method of dummy nodes and branches allowing to visit repeatedly tops of the transport graph. The minimum time of cargo run from base in a terminal point of unloading of a cluster on the weighed graph is used as a criterion of aggregation. It allows to consider an idle time in points of a transport network and the movement between them. At the second stage optimum distribution of weight of a load between bases and clusters in the received aggregated transport graph with the arches equal to the minimum time of cargo run is carried out. This approach has allowed to solve a transport problem taking into account features of delivery of small consignments.

Keywords: routing, cluster, transport problem, dummy node, linear programming, aggregation.

JEL Classification: C61.

ⁱ**Christina S. Podshivalova** – Penza State University of Architecture and Construction, Candidate of Science (Engineering), Associate professor, Chair of Organization and Traffic Security, Penza, Russia.

ⁱⁱ**Sergei F. Podshivalov** – Penza State University of Architecture and Construction, Candidate of Science (Engineering), Associate professor, Chair of Mechanics, Penza, Russia; podshivalov.s.f@mail.ru.