

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА И ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

ЧАСТЬ 2. СТРУКТУРНО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИ, АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

© 2017 г. Э.И. Позамантир¹

Аннотация. Модель динамического межотраслевого баланса (Макаров, 2007; Позамантир, 2014) включает удельные транспортные наценки, но не учитывает возможности их изменения в зависимости от выбираемых объемов производства и потребления продуктов. Такая зависимость определяется тем, что при изменении объемов производства и потребления может изменяться их размещение по территории страны, а следовательно, и определяемая размещением производства и потребления средняя дальность перевозок, которая, в свою очередь, влияет на величину удельных транспортных наценок. Кроме того, в модели МОБ определяются лишь целесообразные, обеспеченные источниками финансирования объемы инвестиций в инфраструктуру транспорта, но необходимо еще определить состав конкретных территориально фиксированных объектов инфраструктуры, которые должны быть реконструированы или построены заново. Для получения указанных недостающих показателей разработана система моделей, в которой модель МОБ и модель выбора территориального размещения производства взаимосвязаны. Из модели МОБ в модель размещения производства передаются суммарные по стране объемы производства и потребления продуктов и объемы инвестиций, а в задаче размещения эти суммарные величины распределяются по территории страны так, чтобы минимизировать суммарные затраты на производство продукции и ее транспортировку. В обратном направлении передаются определяемые выбранным размещением значения средней дальности перевозок, а также перечень транспортных объектов, пропускная способность которых должна быть увеличена для реализации выбранного размещения. Показано, что задача выбора размещения производства и потребления продуктов представляет собой задачу линейного программирования чрезвычайно большой размерности, однако она имеет специальную блочную структуру, позволяющую организовать эффективный вычислительный процесс. Уравнения, связывающие между собой отдельные блоки, подразделяются на части, соответствующие каждому блоку, путем введения дополнительных переменных, значения которых итеративно улучшаются на основе использования двойственных оценок ограничений блоков. Предусмотрены верификация и калибровка модели путем выполнения расчетов по данным отчетного периода и сопоставления полученных расчетным путем данных с отчетными.

Ключевые слова: объем выпуска продукции; территориальное размещение, расчетная транспортная сеть, узлы и участки сети, объемы отправления и прибытия в узле, многоуровневое блочное линейное программирование.

Классификация JEL: C02, C31, C68, E17, L91, L92.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

1.1. Размерность задачи. Оценим размерность производственно-транспортной задачи. Ориентировочная оценка численных значений размерности системы уравнений/неравенств (35)—(36)¹ приведена в табл. 1, 2 для случая, когда количество позиций в номенклатуре МОБ $n = 100$, в том числе товаров $n^T = 50$, число позиций видов грузов в номенклатуре, принятой в отчетности железнодорожного

¹Эльмар Ильич Позамантир — д.т.н., профессор, главный научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление», Институт системного анализа Российской академии наук; Москва, e.pozamantir@yandex.ru.

¹Здесь и далее нумерация формул приводится по (Позамантир, 2017).

транспорта, $g = 100$, число узлов расчетной сети железных дорог $s = 300$, в том числе узлов, через которые осуществляется импорт/экспорт, $|Q_h^{\text{имп}}| = |Q_h^{\text{имп}}| = 50$, число участков этой сети $p = 500$.

Таким образом, размерность матрицы ограничений составляет $0,1312 \times 10^6$ строк и $36,271 \times 10^6$ столбцов, общее число элементов матрицы приближенно равно $4,76 \times 10^{12}$, из них ненулевых $(0,120 \times 4 + 0,120 \times 2 + 36 \times 6 + 0,030 \times 1 + 0,001 \times 1) \times 10^6 = 216,751 \times 10^6$. Доля ненулевых в общем числе элементов матрицы $\approx 45,6 \times 10^{-6}$, т.е. матрица весьма разрежена. Для

Таблица 1. Число уравнений/неравенств системы

Номер формулы, определяющей группу уравнений/неравенств	Формула для определения числа уравнений/неравенств, входящих в группу	Число уравнений/неравенств, входящих в группу
(35)	$g s$	30×10^3
(36)	$g Q_h^{\text{имп}} $	5×10^3
(37)	$g s$	30×10^3
(38)	$g Q_h^{\text{эксп}} $	5×10^3
(40)	N	$0,1 \times 10^3$
(41)	$2n^T s$	30×10^3
(42)	$g s$	30×10^3
(42)	p	$0,5 \times 10^3$
(43)	p	$0,5 \times 10^3$
(45)	$N-1$	99
(46)	1	1
Итого		$131,2 \times 10^3$

Таблица 2. Число переменных системы

Переменные многомерной матрицы	Формула для определения числа элементарных переменных	Число элементарных переменных	Номера уравнений, в которые входит переменная	Число уравнений, в которые входит каждая из элементарных переменных
$z_{tchq}^{\text{от}}$	$4g s$	120×10^3	(35), (40), (41), (42)	4
$z_{tchq}^{\text{пб}}$	$4g s$	120×10^3	(37), (41)	2
$z_{tchqr}^{\text{корр}}$	$4g s^2$	36×10^6	(35), (36), (37), (38), (43), (44)	6
$\Delta \mu_{thq}$	$g s$	30×10^3	(45)	1
$\Delta N_{ik}^T, \Delta N_{ik}^{\text{об}}$	$2p$	1×10^3	(46)	1
Итого		$36,271 \times 10^6$		

задач линейного программирования с разреженными матрицами в современных системах программирования (в том числе в MATLAB) имеются специальные модификации солверов с экономным расходом памяти компьютера и эффективной организацией вычислений, однако для матрицы получившегося размера возможности и таких солверов могут оказаться недостаточными. Поэтому весьма актуальной является попытка разложения матрицы на блоки существенно меньшей размерности.

1.2. Выявление блочной структуры и декомпозиция задачи. Один из возможных способов — разложение матрицы по индексам h и α . Уравнения (35)—(38) уже представляют собой отдельные по h и α блоки. Уравнения (42) разлагаются по h , но при каждом h объединяют блоки, относящиеся к $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$. Уравнения (40) и (45) распадаются на группы по индексу i , но при каждом i связывают группы блоков, относящихся к значениям h , входящим в одно множество G_i , а уравнение (40) связывает еще и блоки, относящиеся к $\alpha = 1, 2$. Уравнение (41) при каждом фиксированном i включает выражения $(z_{i1hq}^{\text{от}} + z_{i2hq}^{\text{от}})$, относящиеся ко всем значениям индекса h . Тем самым совокупность уравнений (41), относящихся ко всем значениям i , представляет собой единую связную систему. Неравенства (43) и (44) распадаются по индексу k , но при каждом фиксированном k эти неравенства включают переменные, относящиеся ко всем значениям индексов h и α .

Исходя из выявленной структуры связей между блоками и опираясь на идеи метода Корнаи — Липтака (Цурков, 1981) решения задач блочного линейного программирования, разложение рассматриваемой задачи выполняется следующим образом.

Предварительно преобразуем запись группы уравнений (41): во втором слагаемом совокупность внешнего суммирования по $j = 1, \dots, n^T$ и внутреннего суммирования по $h \in G_j$ заменим на сплошное суммирование по $h = 1, \dots, g$ с введением обозначений $a_{t\alpha ij(h)} = a_{t\alpha ij} \quad \forall h \in G_j$, $e_{thq} / \gamma_{t\alpha hq} = \beta_{t\alpha hq}$, $a_{t\alpha ij(h)} e_{thq} / \gamma_{t\alpha hq} = \varphi_{t\alpha i hq}$. Тогда уравнение (41) можно представить в виде

$$\sum_{h \in G_i} \beta_{t\alpha hq} z_{t\alpha hq}^{\text{пб}} - \sum_{h=1}^g \varphi_{t\alpha i hq} (z_{i1hq}^{\text{от}} + z_{i2hq}^{\text{от}}) = b_{t\alpha i q}^{\text{фикс.МОБ}} \quad \forall t, q, \quad i = 1, \dots, n^T, \alpha = 1, 3. \quad (51)$$

Для разложения уравнений (43)—(44) введем дополнительные переменные $\Delta \widehat{N}_{(t-1)\alpha hk}^T$ и $\Delta \widehat{N}_{(t-1)\alpha hk}^{\text{об}}$, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{h=1}^g \Delta \widehat{N}_{(t-1)\alpha hk}^T = \Delta \bar{N}_{(t-1)k}^T \quad \forall t, k, \quad (52)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{h=1}^g \Delta \widehat{N}_{(t-1)\alpha hk}^{\text{об}} = \Delta \bar{N}_{(t-1)k}^{\text{об}} \quad \forall t, k. \quad (53)$$

С помощью этих дополнительных переменных разложим уравнения (43) и (44) по индексам α и h :

$$\sum_{(qr) \in \Omega_k^T} (\varepsilon_{thk} (1 + \alpha_k^{\text{пор.т}}) z_{t\alpha hqr}^{\text{корр}}) - \Delta \widehat{N}_{(t-1)\alpha hk}^T \leq \bar{N}_{(t-1)\alpha hk}^T \quad \forall t, \alpha, h, k, \quad (54)$$

$$\sum_{(qr) \in \Omega_k^{\text{об}}} (\varepsilon_{thk} (1 + \alpha_k^{\text{пор.об}}) z_{t\alpha hqr}^{\text{корр}}) - \Delta \widehat{N}_{(t-1)\alpha hk}^{\text{об}} \leq \bar{N}_{(t-1)\alpha hk}^{\text{об}} \quad \forall t, \alpha, h, k. \quad (55)$$

Для разложения уравнений (45) введем дополнительные переменные $\Delta m_{t\alpha h}$ и уравнения:

$$\sum_{h \in G_i} \sum_{\alpha=1,2} \Delta m_{t\alpha h} = (m_{ti} - m_{(t-1)i}) \quad \forall t, i = 1, \dots, n^T, \quad (56)$$

$$\sum_{q=1}^s \Delta \mu_{(t-1)\alpha hq} e_{(t-1)hq}^{\text{УКВ}} = \Delta m_{(t-1)\alpha h} \quad \forall t, h, \quad \alpha = 1, 2; \quad (57)$$

для разложения уравнения (46) — $\Delta m_{t\alpha hi}^{\text{жид}}$ и уравнения:

$$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{h=1}^g \Delta m_{t\alpha h i жли} = m_{t i жли} - m_{(t-1) i жли} \quad \forall t, \quad (58)$$

$$\sum_{k=1}^s \left(\Delta N_{(t-1)\alpha h k}^T + \Delta \widehat{N}_{(t-1)\alpha h k}^{об} \right) e_{i жли k}^{УКВ} = \Delta m_{t\alpha h i жли} \quad \forall t, \alpha, h. \quad (59)$$

С использованием введенных дополнительных переменных и уравнений систему (35)—(46) можно представить в виде совокупности блоков следующим образом.

Уравнения (39), (40), (51), неравенства (42), (45), (46) не содержат переменных $z_{t\alpha h q r}^{корр}$, включим эти уравнения и неравенства в отдельную группу. Для лучшей обзорности перепишем совокупность этих уравнений / неравенств в виде компактной группы:

$$\sum_{q=1}^s z_{t\alpha h q}^{от} - \sum_{q=1}^s z_{t\alpha h q}^{пб} = 0 \quad \forall t, h, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (60)$$

$$\sum_{h \in G_i} \sum_{q=1}^s (\beta_{t1 h q} z_{t1 h q}^{от} + \beta_{t2 h q} z_{t2 h q}^{от}) = c_{ii}^{вып} \quad \forall t, i, \quad (61)$$

$$\sum_{h \in G_i} \beta_{t\alpha h q} z_{t\alpha h q}^{пб} - \sum_{h=1}^g \varphi_{t\alpha i h q} (z_{t1 h q}^{от} + z_{t2 h q}^{от}) = b_{t\alpha i q}^{фикс.МОБ} \quad \forall t, i, q, \quad \alpha = 1, 3, \quad (62)$$

$$\left(\frac{1}{\gamma_{t1 h q}} z_{t1 h q}^{от} + \frac{1}{\gamma_{t2 h q}} z_{t2 h q}^{от} \right) - \Delta \mu_{(t-1) h q} \leq \mu_{(t-1) h q} \quad \forall t, h, q, \quad (63)$$

$$\sum_{h \in G_i} \sum_{q=1}^s \Delta \mu_{(t-1) h q} e_{(t-1) h q}^{УКВ} = m_{ti} - m_{(t-1)i} \quad \forall t. \quad (64)$$

Совокупность уравнений/неравенств (60)—(64) является системой ограничений задачи линейного программирования, ее целевой функцией является первое слагаемое формулы (47).

Задачу вида (60)—(64) естественно назвать производственным блоком, так как входящие в нее переменные $z_{t\alpha h q}^{от}$, $z_{t\alpha h q}^{пб}$ связаны с объемами производства и производственного потребления товаров.

Остальные, кроме (39)—(42), (45), условия задачи (35)—(46), т.е. условия (35)—(38), (43), (44), (46), если рассматривать их при фиксированных значениях переменных $z_{t\alpha h q}^{от}$, $z_{t\alpha h q}^{пб}$, содержат в качестве искомых переменных только объемы корреспонденций $z_{t\alpha h q r}^{корр}$ и ограничения по пропускной способности участков сети $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^T$, $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^{об}$. Поэтому совокупность условий (35)—(38), (43), (44), (46) естественно назвать транспортным блоком производственно-транспортной задачи.

Метод решения производственно-транспортной задачи (35)—(47) в самом общем виде можно представить так.

Организуется итеративный процесс, на каждой итерации которого решается сначала транспортный блок, затем производственный. Итерации такого процесса далее будем называть большими итерациями.

В транспортном блоке отыскиваются условно-оптимальные значения переменных $z_{t\alpha h q r}^{корр}$, $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^T$, $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^{об}$ при некоторых временно фиксированных значениях переменных $z_{t\alpha h q}^{от}$, $z_{t\alpha h q}^{пб}$ и соответствующие им двойственные оценки ограничений (35), (37). Эти оценки определяют влияние возможных небольших изменений переменных $z_{t\alpha h q}^{от}$, $z_{t\alpha h q}^{пб}$ на целевую функцию (47).

Затем решается производственный блок, в котором отыскиваются условно-оптимальные значения переменных $z_{t\alpha h q}^{от}$, $z_{t\alpha h q}^{пб}$, $\Delta \mu_{(t-1) h q}$, удовлетворяющие ограничениям (39)—(42), (45). При этом в целевую функцию производственного блока, кроме первого слагаемого целевой функции (47), дополнительно включаются слагаемые, порожденные двойственными оценками ограничений (35), (37). Таким образом, целевая функция производственного блока имеет вид

$$\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{h=1}^g \sum_{q=1}^s z_{t\alpha hq}^{\text{от}} e_{thq} + \sum_{\alpha=1,2} \sum_{h=1}^g \sum_{q=1}^s z_{t\alpha hq}^{\text{от}} \psi_{t\alpha hq}^{(35)} + \sum_{\alpha=1,3} \sum_{h=1}^g \sum_{q=1}^s z_{t\alpha hq}^{\text{пб}} \psi_{t\alpha hq}^{(37)} \rightarrow \min, \quad (65)$$

где $\psi_{t\alpha hq}^{(35)}$, $\psi_{t\alpha hq}^{(37)}$ — упомянутые выше двойственные оценки.

Включение двойственных оценок, полученных в транспортном блоке, в целевую функцию производственного блока позволяет при его решении косвенно учесть влияние выбираемых в производственном блоке небольших изменений значений $z_{t\alpha hq}^{\text{от}}$, $z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}$ на величину целевой функции транспортного блока.

1.3. Структура транспортного блока и общий подход к его решению. Рассмотрим структуру транспортного блока.

Уравнения (35)—(38) распадаются по индексам α и h на отдельные блоки. Эти блоки связаны между собой неравенствами (43), (44) и уравнением (46). Если каким-либо способом выбрать значения переменных $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^T$, $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^{\text{об}}$, удовлетворяющие условиям (46), и временно зафиксировать их, то блоки (35)—(38) останутся связанными между собой неравенствами (43), (44). При этом блоки (36), (38), а если, кроме того, зафиксированы значения переменных $z_{t\alpha hq}^{\text{от}}$, $z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}$, также и блоки (35), (37) представляют собой классическую транспортную задачу линейного программирования в матричной форме с дополнительными ограничениями для каждой из дуг сети на суммарную величину проходящих по ней корреспонденций. Существуют специальные алгоритмы, основные идеи которых изложены в (Левит, Лившиц, 1972), позволяющие получить приближенное решение задачи (35)—(38), (43), (44) путем независимого решения всех задач (35)—(38) с пересчетом условных длин дуг по мере заполнения их пропускной способности. При пересчете длин дуг частично меняются кратчайшие пути между пунктами отправления и прибытия и, соответственно, состав множеств Ω_k^T , $\Omega_k^{\text{об}}$, определяющих неравенства (43), (44). Пересчет условных длин дуг сети выполняется так, чтобы за счет изменения состава множеств Ω_k^T , $\Omega_k^{\text{об}}$ неравенства (43), (44) не нарушались.

Для дальнейшего разложения задачи каким-либо способом выбираются и временно фиксируются значения переменных $z_{t\alpha hq}^{\text{от}}$, $z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}$, удовлетворяющие всем условиям (39), (40), (42), (45), (51). Кроме того, фиксируются значения $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^T$, $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^{\text{об}}$, удовлетворяющие условиям (46). Отдельно и независимо для всех комбинаций индексов (α, h) решаются транспортные задачи (35)—(38) с целевыми функциями — соответствующими членами второго слагаемого целевой функции (47). В ходе этого решения условные длины некоторых дуг увеличиваются, и, соответственно, составы множеств Ω_k^T , $\Omega_k^{\text{об}}$ частично меняются так, чтобы неравенства (43), (44) не нарушались. Дуги сети, для которых условные длины приняты большими их реальных длин, являются ограничивающими в транспортных задачах. Для ограничивающих дуг определяются их так называемые прокатные оценки, т.е. двойственные оценки соответствующих ограничений (43), (44). Если двойственные оценки одной и той же перегруженной дуги в задачах, относящихся к различным комбинациям индексов (α, h) , существенно различаются, то значения $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^T$, $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^{\text{об}}$, относящиеся к дугам с наибольшими значениями двойственных оценок, увеличиваются на небольшую величину и одновременно значения $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^T$, $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^{\text{об}}$, относящиеся к дугам с наименьшими значениями двойственных оценок (в частности равными 0 для неперегруженных дуг), уменьшаются так, чтобы уравнение (46) оставалось ненарушенным. После этого все задачи (35)—(38) с их целевыми функциями решаются с учетом изменившихся составов множеств Ω_k^T , $\Omega_k^{\text{об}}$. Процесс уточнения значений $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^T$, $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^{\text{об}}$ и повторного решения задач (35)—(38) продолжается до тех пор, пока значения двойственных оценок каждой из перегруженных дуг сети во всех задачах окажутся достаточно близкими друг к другу. При достижении такого состояния транспортный блок оказывается приближенно решенным по отношению к принятым для его решения временно фиксированным значениям переменных $z_{t\alpha hq}^{\text{от}}$, $z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}$. Соответствующие приближенно-оптимальному решению двойственные оценки ограничений (35), (37), (46), обозначаемые $\psi_{t\alpha hq}^{(35)}$, $\psi_{t\alpha hq}^{(37)}$, $\psi_{t\alpha hq}^{(46)}$, передаются в производственный блок для учета их при оптимизации значений искомым в этом блоке переменных $z_{t\alpha hq}^{\text{от}}$, $z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}$.

Оценим размерность и вычислительную сложность транспортного блока. Каждая задача (35)–(38) имеет размерность матрицы ограничений $s \times s$, общее число таких задач равно $3g$ (s – число узлов расчетной сети, g – количество видов грузов по номенклатуре, принятой на железнодорожном транспорте, в рассматриваемом примере $s = 300, g = 100$)². Сами по себе такие размеры не вызывают вычислительных трудностей, тем более что все $3g$ задач решаются независимо друг от друга и, стало быть, могут решаться параллельно. Однако даже для одного фиксированного набора значений переменных $z_{t\alpha hq}^{от}, z_{t\alpha hq}^{пб}$, полученного из производственного блока на очередной большой итерации, все $3g$ задач придется решать многократно для получения приближенно-оптимальных значений величин $\Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^T, \Delta \widehat{N}_{(t-1)k}^{об}$, т.е. для оптимального распределения пропускной способности перегруженных дуг сети между корреспонденциями, претендующими на проход по дуге.

1.4. Структура производственного блока и общий подход к его решению. Производственный блок образуют, как указывалось выше, уравнения/неравенства (60)–(64) с целевой функцией (65). Рассмотрим структуру этого блока.

Группа уравнений (62) распадается на независимые блоки по индексу q , а при каждом фиксированном q – на два независимых блока, относящихся к значениям $\alpha = 1$ и $\alpha = 3$, т.е. всего на $2s$ независимых блоков. В каждый такой блок входят уравнения, относящиеся к значениям индекса $i = 1, \dots, n^T$, во все уравнения блока входят переменные $z_{t\alpha hq}^{от}, z_{t\alpha hq}^{пб}$, относящиеся к фиксированным парам значений индексов (α, q) . В соответствии со смыслом переменных $z_{t\alpha hq}^{от}, z_{t\alpha hq}^{пб}$ блоки, полученные при разложении группы уравнений (62), естественно назвать блоками отправления-прибытия в узле. При любом q в состав блока, относящегося к паре индексов $(1, q)$, дополнительно к уравнениям, относящимся к группе (62), входят также неравенства (63), относящиеся к этому значению q .

Совокупность всех блоков отправления-прибытия в узлах связывается в единый производственный блок группами уравнений (60), (61), (64). Для разложения этих связей введем вспомогательные переменные $\sigma_{t\alpha hq}^1, \sigma_{t\alpha hq}^2, \sigma_{t\alpha hq}^3$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{q=1}^s \sigma_{t\alpha hq}^{(1)} = 0 \quad \forall t, \alpha, h, \quad \sigma_{t\alpha hq}^{(1)} - \text{по знаку не ограничено}, \quad (66)$$

$$\sum_{q=1}^s \sum_{h \in G_i} \sigma_{thq}^{(2)} = c_{ii}^{вып}, \quad \sigma_{thq}^{(2)} \geq 0 \quad \forall t, i, \quad (67)$$

$$\sum_{q=1}^s \sum_{h \in G_i} \sigma_{thq}^{(3)} e^{y_{KB}} = m_{ti} - m_{(t-1)i} \quad \forall t, i, \quad \sigma_{thq}^{(3)} \geq 0 \quad \forall t, h, q. \quad (68)$$

Выберем каким-либо способом значения вспомогательных переменных $\sigma_{t\alpha hq}^1, \sigma_{t\alpha hq}^2, \sigma_{t\alpha hq}^3$ так, чтобы они удовлетворяли, соответственно, условиям (66), (67), (68), и будем временно рассматривать эти значения как известные фиксированные константы. С их помощью уравнения (60), (61), (64) представим в виде:

$$z_{t\alpha hq}^{от} - z_{t\alpha hq}^{пб} = \sigma_{t\alpha hq}^{(1)} \quad \forall t, h, q, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (69)$$

$$\sum_{h \in G_i} (\beta_{t1hq} z_{t1hq}^{от} + \beta_{t2hq} z_{t2hq}^{от}) = \sigma_{tiq}^{(2)} \quad \forall t, i, q, \quad (70)$$

$$\sum_{h \in G_i} \Delta \mu_{(t-1)hq} = \sigma_{tiq}^{(3)} \quad \forall t, i, q. \quad (71)$$

Система уравнений/неравенств (69), (70), (71), (62), (63) распадается по индексу q на независимые блоки. К каждому блоку присоединяется его целевая функция

² В действительности указанные полные размеры имеют транспортные задачи далеко не для всех видов грузов. Для большинства видов грузов число пунктов прибытия, и тем более пунктов отправления, значительно меньше полного числа узлов сети. В еще большей мере это относится к перевозкам импортных и экспортных грузов.

$$\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{h=1}^g z_{t\alpha hq}^{\text{от}} e_{thq} + \sum_{\alpha=1,2} \sum_{h=1}^g z_{t\alpha hq}^{\text{от}} \psi_{t\alpha hq}^{(35)} + \sum_{\alpha=1,3} \sum_{h=1}^g z_{t\alpha hq}^{\text{пб}} \psi_{t\alpha hq}^{(37)} \xrightarrow{\{z_{t\alpha hq}^{\text{от}}, z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}\}} \min. \quad (72)$$

Задача минимизации (72) при ограничениях (69), (70), (71), (62), (63) является задачей линейного программирования общего вида.

Общее число сформированных блоков отправления-прибытия в узлах равно s (в примере — 300), все они могут вычисляться отдельно и независимо друг от друга, в частности — параллельно.

В результате решения задачи (72), (69), (70), (71), (62), (63) будут определены условно-оптимальные значения искомым переменных $z_{t\alpha hq}^{\text{от}}$, $z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}$, $\Delta \mu_{(t-1)hq}$ и связанные с ними условно-оптимальные значения двойственных переменных, т.е. двойственных оценок ограничений. Нас здесь интересуют двойственные оценки ограничений (69), (70), (71), они показывают, насколько изменится найденное условно-минимальное значение целевой функции (72) при малых изменениях значений правых частей этих ограничений, т.е. введенных нами вспомогательных переменных $\sigma_{t\alpha hq}^1$, $\sigma_{t\alpha hq}^2$, $\sigma_{t\alpha hq}^3$. Обозначим векторы условно-оптимальных значений оценок ограничений (69), (70), (71) через $\psi_q^{(70)}$, $\psi_q^{(71)}$, $\psi_q^{(72)}$. С помощью этих оценок будем отыскивать целесообразное изменение ранее предварительно фиксированных значений переменных $\sigma_{t\alpha hq}^1$, $\sigma_{t\alpha hq}^2$, $\sigma_{t\alpha hq}^3$. Выбираем должным образом малые изменения этих переменных и повторяем решение задачи (72), (69), (70), (71), (62), (63), при этом значение целевой функции (72) уменьшается. Процесс продолжается до тех пор, пока изменение этой целевой функции станет достаточно малым. Полученные при этом значения переменных $z_{t\alpha hq}^{\text{от}}$, $z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}$ передаются в транспортный блок.

Итеративный процесс решения пар блоков — транспортного и производственного — повторяется до тех пор, пока изменения целевой функции (47) станут достаточно малыми.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Разработанный алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Формирование данных, являющихся исходными для задачи в целом.

2. Цикл повторения больших итераций. Каждая большая итерация включает решение:

1) транспортного блока — определение условно-оптимальных объемов корреспонденций между узлами сети. Полученные при этом двойственные оценки ограничений транспортного блока передаются в производственный блок;

2) производственного блока — определение условно-оптимальных объемов отправления и прибытия грузов в узлах сети. Эти значения передаются в транспортный блок для использования их в качестве правых частей ограничений задачи, решаемой на следующей большой итерации.

3. Повторение больших итераций заканчивается, когда снижение значения целевой функции производственно-транспортной задачи становится меньше принятого порогового значения.

Ниже следует детальное описание шагов алгоритма.

2.1. Формирование исходных данных. Из задачи МОБ получаются следующие данные:

1) x_{ti} — объемы выпусков видов продуктов, $i = 1, \dots, n^T$ — товары, $i = n^T + 1, \dots, n$ — услуги;

2) v_{ti} — объемы импорта товаров;

3) $y_{t\alpha il}$ — объемы конечного использования³ продуктов, $\alpha = 1$ — отечественных, $\alpha = 3$ — импортных, $i = 1, \dots, n^{\text{кп}}$ — конечное потребление, $l = l^{\text{ВНОК}}$ — валовое накопление основного капитала, $l^{\text{эксп}}$ — экспорт;

4) $w_{t\alpha ij}$ — коэффициенты прямых затрат (раздельно отечественных и импортных продуктов);

³ В состав конечного использования столбец «импорт со знаком “минус”» (в отличие от обычно принятого) не входит. Импорт учитывается отдельно в каждом из направлений промежуточного потребления и конечного использования.

- 5) Pc_Ind_{it} – индексы цен производителей в году t по отношению к базовому году;
- 6) $m_{(t-1)i}, m_{ti}$ – производственные мощности по выпуску продуктов по состоянию на начало годов $(t-1)$ и t ;
- 7) $G_i, i = 1, \dots, n^T$ – множество позиций номенклатуры видов грузов, принятой на железнодорожном транспорте, входящих в состав позиции i номенклатуры МОБ.

1. Характеристики расчетной сети железных дорог:

1) перечень узлов сети, перечень ее участков (каждый участок обозначается номерами ограничивающих его узлов), длины и пропускные способности участков по состоянию на начало прогнозного периода;

2) пропускная способность, занимаемая пассажирским движением по годам расчетного периода;

3) $Q^{\text{эксп}}$ – перечень узлов сети, являющихся пунктами выхода экспортных грузов из железнодорожной сети России (пограничные переходы, пункты передачи экспортных грузов на другие виды транспорта);

4) $Q^{\text{имп}}$ – перечень узлов сети, являющихся пунктами входа импортных грузов на железнодорожную сеть России (пограничные переходы, пункты поступления импортных грузов с других видов транспорта);

5) ε_{thk} – коэффициенты перехода от потока груза h , исчисленного в млн т/год, к поездопотоку, поездов/сутки.

2. Отчетные данные о перевозках грузов по железной дороге:

1) отчет о перевозках грузов между станциями сети железных дорог. Перечень строк и столбцов отчетной таблицы должен совпадать с перечнем узлов расчетной железнодорожной сети.

2) отчет о густоте перевозок грузов по участкам сети.

3. Из общеэкономической статистики, а также из статистики отраслей получают данные:

1) γ_{thq} – доля общего объема производства товара h (вида груза по железнодорожной номенклатуре видов грузов, в натуральном исчислении) в узле q железнодорожной сети в году t , поступающая на железнодорожный транспорт;

2) e_{th} – цена производителя товара h в году t . Определяется путем умножения известной по данным отчетности цены в базовом году на индекс основной цены соответствующего товара номенклатуры МОБ в году t , полученный при решении задачи МОБ. В соответствии с принятой в нашей работе моделью МОБ цена произведенного товара, направленного на экспорт, здесь принимается такой же, как для тождественного товара, использованного внутри России. Цена импортированного товара принята равной цене тождественного товара, произведенного в России. Если тождественный товар в России не производится, то в качестве цены принимается цена СИФ, пересчитанная по курсу Центрального банка;

3) $k_{thq}^{\text{ТДЦ}}$ – коэффициент территориальной дифференциации цены производителя товара h в пункте q по отношению к средней по стране цене производителей этого товара, задается экспертно;

4) $e_{th}^{\text{УКВ}}$ – удельные капитальные вложения на создание единичной производственной мощности по выпуску товара h , исчисленные в ценах года t . Эти значения пересчитываются к виду, позволяющему суммировать их с ежегодными затратами (т.е. так называемые приведенные капитальные затраты);

5) $\chi_{thq}^{\text{имп}}, \chi_{thr}^{\text{эксп}}$ – коэффициенты территориального распределения объемов общего по стране импорта и экспорта.

2.2. Цикл больших итераций. Номер большой итерации обозначим через u . Этот номер образует верхний индекс переменной.

2.2.1. Решение транспортного блока

Отдельно и независимо для каждой комбинации индексов (α, h) решаются задачи (35)—(38), (43), (44), (46) с целевой функцией, представляющей собой соответствующую часть второго слагаемого функции (47). Правые части уравнений (36), (38) определяются путем распределения общих по стране объемов импорта и экспорта по узлам сети по формулам

$$c_{ihq}^{\text{и}} = v_{ii} \chi_{iiq}^{\text{имп}}, \quad q \in Q^{\text{имп}}; \quad b_{ihr}^{\text{э}} = y_{iii} \chi_{ihr}^{\text{эксп}}, \quad r \in Q^{\text{эксп}}.$$

Величины $z_{i\alpha hq}^{\text{от.}(v-1)}$, $z_{i\alpha hq}^{\text{пб.}(v-1)}$, полученные в производственном блоке на предыдущей большой итерации, переносятся в правые части уравнений (35), (37). При выполнении первой большой итерации принимаем

$$z_{i\alpha hq}^{\text{от.0}} = z_{(t-1)\alpha hq}^{\text{от}} \frac{x_{ti}}{x_{(t-1)i}} \quad \forall h \in G_i, \quad z_{i\alpha hq}^{\text{пб.0}} = z_{(t-1)\alpha hq}^{\text{пб}} \frac{x_{ti}}{x_{(t-1)i}} \quad \forall h \in G_i.$$

Процесс построения приближенно-оптимального плана совокупности всех задач (35)—(38), (43), (44), (46), (47) путем решения задач (35)—(38), (47) без прямого учета ограничений (43), (44), (46) строится в виде двухуровневого цикла итераций. Верхний из этих уровней назовем циклом средних итераций, вложенный в него второй уровень назовем циклом малых итераций.

Перед началом первой средней итерации значения величин $\Delta N_{ik}^{\text{т}}, \Delta N_{ik}^{\text{об}}, k = 1, \dots, p$, где p — общее число участков сети, выбирается из условия соблюдения уравнения (46). Такие значения получаются при окончании средних итераций, выполненных на предыдущей большой итерации. Для выполнения первой большой итерации значения $\Delta N_{ik}^{\text{т}}, \Delta N_{ik}^{\text{об}}$ перед началом первой средней итерации определяются путем экстраполяции значений, полученных для предыдущего года прогнозного периода:

$$\Delta N_{ik}^{\text{т}} = \Delta N_{(t-1)k}^{\text{т}} \frac{e_{ii^{\text{жлн}}k}^{\text{УКВ}}}{e_{(t-1)i^{\text{жлн}}k}^{\text{УКВ}}} \frac{(m_{ii^{\text{жлн}}} - m_{(t-1)i^{\text{жлн}}})}{(m_{(t-1)i^{\text{жлн}}} - m_{(t-2)i^{\text{жлн}}})}, \quad \Delta N_{ik}^{\text{об}} = \Delta N_{(t-1)k}^{\text{об}} \frac{e_{(t-1)i^{\text{жлн}}k}^{\text{УКВ}}}{e_{ii^{\text{жлн}}k}^{\text{УКВ}}} \frac{(m_{ii^{\text{жлн}}} - m_{(t-1)i^{\text{жлн}}})}{(m_{(t-1)i^{\text{жлн}}} - m_{(t-2)i^{\text{жлн}}})}.$$

В составе каждой средней итерации выполняется цикл малых итераций решения совокупности задач (35)—(38), (47), относящихся ко всем комбинациям индексов (α, h) при фиксированных значениях переменных $\Delta N_{ik}^{\text{т}}, \Delta N_{ik}^{\text{об}}$, полученных в конце предыдущей средней итерации. Ограничения (43), (44) учитываются при этом косвенно, путем включения в целевую функцию штрафных функций, равных 0 до некоторого порогового значения и возрастающих при превышении порогового значения в ходе выполнения малых итераций. Скорость роста штрафных функций постоянно возрастает, так что значения штрафных функций при приближении к границам асимптотически стремятся к достаточно большому числу.

Каждая задача (35)—(38), (47) решается стандартным методом решения транспортной задачи линейного программирования в матричной форме (Гольштейн, 1969). Результатом решения являются объемы всех корреспонденций каждого из видов грузов в каждом виде сообщения (внутреннее, на экспорт, перевозки импортных грузов). Маршруты следования всех корреспонденций определяются путем построения деревьев кратчайших путей от каждого из узлов отправления соответствующего вида грузов. Просматривая дерево кратчайших путей последовательно от его конечных узлов к предыдущим, строим списки корреспонденций, проходящих по дугам, входящим в это дерево. Выполняем такие просмотры последовательно для каждого из деревьев, получаем списки корреспонденций одного вида груза для каждой из дуг сети. Аналогичная операция выполняется последовательно для всех видов грузов, т.е. для всех комбинаций индексов (α, h) . В результате получаем для каждого участка сети множества $\Omega_k^{\text{т}}, \Omega_k^{\text{об}}$ всех корреспонденций, проходящих по участку k в направлениях «туда» и «обратно». Используя эти множества, получаем размеры потоков грузов, а затем и поездов по участку, проверяем соблюдение условий (43), (44).

Перед первой малой итерацией решаются все задачи (35)—(38), (47) со сформированными правыми частями без учета ограничений (43), (44). В результате определяются исходные значения

искомых переменных $\tilde{z}_{t\alpha hqr}^{\text{корр}}$. Эти значения подставляются в неравенства (43), (44), в правые части которых перенесены значения $\Delta N_{(t-1)k}^{\text{т.}(\rho-1)}$, $\Delta N_{(t-1)k}^{\text{об.}(\rho-1)}$, полученные на предыдущей средней итерации. Дуги, у которых левая часть неравенств (43), (44) окажется больше правой части, называются перегруженными, отношение значения левой части к значению правой части, из которого (отношения) вычитается 1, будем называть коэффициентом перегрузки дуги $\pi_k > 0$, множество всех перегруженных дуг обозначим $K^{\pi, \rho} = \{k : \pi_k > 0\}$. Обозначим $\pi_{\max} = \max_{\forall(\alpha, h)} \left\{ \max_{k \in K^{\pi, \rho}} \{\pi_k\} \right\}$ и эксп-тно выберем величину порогового значения $\pi^{\text{порог}} < \pi_{\max}$, начиная с которого с целью недопущения перегрузки участков будем в последующих малых итерациях увеличивать условную длину каждого участка по формуле

$$\tilde{l}_k = \begin{cases} l_k & \text{при } \pi_k \leq \pi^{\text{порог}}; \\ l_k \left(1 + \beta (\pi_k - \pi^{\text{порог}}) / (1 - \pi_k) \right) & \text{при } \pi_k > \pi^{\text{порог}}, \end{cases} \quad (73)$$

где β — коэффициент, подбираемый эмпирически в серии пробных расчетов так, чтобы не увеличивать чрезмерно количество малых итераций и в то же время не закладывать в расчет чрезмерное недоиспользование пропускной способности перегруженных дуг.

Дальнейшее решение совокупности всех задач строится в виде последовательности малых итераций, нумеруемых индексом μ .

На малой итерации с номером 0 решаем задачи (35)—(38), (47), относящиеся ко всем комбинациям индексов (α, h) , без учета ограничений (43), (44), предварительно умножив правые части на множитель $\theta^0 = (1 - \pi_{\max} - \pi^{\text{порог}})$. Очевидно, что совокупность полученных таким способом решений всех задач не нарушает условий (43), (44) и для всех дуг выполняется условие $\pi_k \leq \pi^{\text{порог}}$. Это позволяет использовать в качестве длин дуг их фактические значения.

Для выполнения последующих малых итераций правые части задач (35)—(38) умножаются на $\vartheta = \theta^0 / n$, где n — достаточно большое число. Полученные таким способом правые части задач (35)—(38) обозначим $z_{t\alpha hqr}^{\text{от.} \vartheta}$, $c_{thq}^{\text{и.} \vartheta}$, $z_{t\alpha hqr}^{\text{пб.} \vartheta}$, $b_{thr}^{\text{э.} \vartheta}$, их значения принимаются одними и теми же на всех малых итерациях, общее количество которых равно n . Решения задач (35)—(38), полученные на малой итерации μ , обозначим $z_{t\alpha hqr}^{\text{корр.} \mu}$. Несмотря на одинаковость правых частей уравнений, решения, полученные при разных μ , могут различаться вследствие указанного ниже изменения коэффициентов целевых функций $\eta_{\alpha M_{qr}}$. В результате выполнения малой итерации $(\mu - 1)$ загрузки дуг сети увеличиваются путем прибавления величин $z_{t\alpha hqr}^{\text{корр.}(\mu-1)}$ к ранее существовавшим значениям загрузок. В начале малой итерации μ условные длины дуг пересчитываются по формуле (73) с учетом увеличения загрузки дуг, полученного в результате выполнения малой итерации $(\mu - 1)$. С учетом изменившихся условных длин дуг заново строятся все деревья кратчайших путей. Это приводит к изменению длин маршрутов следования корреспонденций и, соответственно, коэффициентов $\eta_{\alpha M_{qr}}$ целевой функции (47). Полученные значения объемов корреспонденций $z_{t\alpha hqr}^{\text{корр.} \mu}$ прибавляются к загрузкам дуг, входящих в маршрут следования корреспонденций, индексы дуг включаются дополнительно (без повторений) в соответствующие множества $\Omega_k^{\text{т}}$, $\Omega_k^{\text{об}}$. Затем по таким же правилам выполняется малая итерация $(\mu+1)$.

После выполнения всех n малых итераций общая величина каждой корреспонденции определяется формулой $z_{t\alpha hqr}^{\text{корр}} = \sum_{\mu=0}^n z_{t\alpha hqr}^{\text{корр.} \mu}$. Эти значения $z_{t\alpha hqr}^{\text{корр}}$ удовлетворяют условиям (35)—(38) в их исходном виде, условия (43), (44) не нарушаются ввиду быстрого роста условных длин дуг при приближении коэффициентов заполнения пропускной способности к 1. Однако значения $\Delta N_{(t-1)k}^{\text{т.}(\nu-1)}$, $\Delta N_{(t-1)k}^{\text{об.}(\nu-1)}$, принятые первоначально для выполнения законченного цикла малых итераций, не являются оптимальными для задачи (35)—(38), (43), (44) в целом. Для приближения значений этих переменных к их оптимальным значениям вычисляем новые значения, которые

обозначим $\Delta N_{(t-1)k}^{T.V.\rho}$, $\Delta N_{(t-1)k}^{об.v.\rho}$, где $\rho = 1, 2, \dots$ – номер выполняемой средней итераций, следующим образом.

Выписываем ряд значений прокатных оценок для совокупности всех перегруженных дуг, т.е. для всех k : $\pi_k > 0$. Общее число перегруженных дуг обозначим $p^{\pi\rho}$. Элементы этого ряда упорядочиваем в порядке убывания их значений. Номера членов упорядоченного ряда обозначим λ , каждому λ соответствует дуга сети k_λ . Новые значения приростов пропускной способности установим по формуле

$$\Delta N_{tk_\lambda} = \begin{cases} \Delta N_{tk_\lambda} + \frac{\delta N}{e_{и^{жлп}k_\lambda}^{УКВ}}, \lambda = 1, \dots, 0,5p^{\pi\rho}; \\ \Delta N_{tk_\lambda} - \frac{\delta N}{e_{и^{жлп}k_\lambda}^{УКВ}}, \lambda = (0,5p^{\pi\rho} + 1), \dots, p^{\pi\rho}, \end{cases} \quad (74)$$

где δN достаточно малая величина. Значения ΔN_{tk} при $k \notin K^{\pi,\rho}$ не пересчитываются.

Очевидно, что, поскольку значения ΔN_{tk} уравнению (46) удовлетворяли, то пересчитанные по формуле (74) значения этих величин также удовлетворяют этому уравнению. Условно-оптимальное значение целевой функции (47) при этом уменьшается. На этом заканчивается очередная средняя итерация. Средние итерации повторяются до тех пор, пока снижение целевой функции (47) окажется меньше некоторого приемлемого значения.

Двойственные оценки ограничений (35), (37), полученные при выполнении последней средней итерации, рассматриваются как приближенно-оптимальные, их значения передаются в производственный блок. На этом решение транспортного блока для текущей большой итерации закончено.

2.2.2. Решение производственного блока

Обозначим через⁴ $\delta\sigma_{t\alpha hq}^1$, $\delta\sigma_{t\alpha hq}^2$, $\delta\sigma_{t\alpha hq}^3$ искомые малые по модулю такие изменения переменных $\sigma_{t\alpha hq}^1$, $\sigma_{t\alpha hq}^2$, $\sigma_{t\alpha hq}^3$, при применении которых минимальное значение функции (72) снизится на наибольшую величину. Совокупность этих искомых изменений, т.е. направление вектора наискорейшего спуска минимального значения функции (72), при движении по которому остаются выполненными условия (66)–(68), является решением следующей задачи:

$$\sum_{q=1}^s \delta\sigma_{t\alpha hq}^{(1)} = 0 \quad \forall t, \alpha, h, \quad -\varepsilon^{(1)} \leq \delta\sigma_{t\alpha hq}^{(1)} \leq \varepsilon^{(1)} \quad \forall t, \alpha, h, q, \quad (75)$$

$$\sum_{q=1}^s \sum_{h \in G_i} \delta\sigma_{thq}^{(2)} = 0 \quad \forall t, i, \quad -\varepsilon^{(2)} \leq \delta\sigma_{thq}^{(2)} \leq \varepsilon^{(2)} \quad \forall t, h, q, \quad (76)$$

$$\sum_{q=1}^s \sum_{h \in G_i} \delta\sigma_{thq}^{(3)} e_{(t-1)hq}^{УКВ} = 0 \quad \forall t, i, \quad -\varepsilon^{(3)} \leq \delta\sigma_{thq}^{(3)} \leq \varepsilon^{(3)} \quad \forall t, h, q, \quad (77)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{h=1}^g \sum_{q=1}^s \left(\psi_{t\alpha hq}^{(70)} \delta\sigma_{t\alpha hq}^1 \right) + \sum_{i=1}^{n^T} \sum_{q=1}^s \left(\psi_{tiq}^{(71)} \delta\sigma_{tiq}^2 \right) + \sum_{i=1}^{n^T} \sum_{q=1}^s \left(\psi_{tiq}^{(72)} \delta\sigma_{tiq}^3 \right) \xrightarrow{\{\delta\sigma_{t\alpha hq}^1, \delta\sigma_{tiq}^2, \delta\sigma_{tiq}^3\}} \min. \quad (78)$$

Задача (75)–(78) является задачей линейного программирования, ее матрица ограничений имеет $(3g + 2n^T)$ строк и $(3g + 2n^T) \times s$ столбцов (в условиях примера 400 строк и 120 000 столбцов). Однако в действительности эта задача распадается на множество независимых задач гораздо меньшей размерности. Во-первых, системы (75), (76), (77) между собой независимы – переменные, входящие в одну из этих систем, не входят в другие две. Во-вторых, и каждая из этих систем распадается на независимые уравнения – переменные $\delta\sigma_{t\alpha hq}^{(1)}$, относящиеся к какой-либо

⁴Здесь стоящие рядом два символа $\delta\sigma$ означают не произведение величин, а одну переменную.

одной комбинации индексов (α, h) , входят только в одно уравнение (75) — в то, которое относится к этой комбинации индексов. Таким образом, задача (75) разлагается по комбинациям индексов (α, h) на $3g$ независимых задач, каждая из которых при фиксированной комбинации (α, h) представляет собой минимизацию функции

$$\sum_{q=1}^s \left(\psi_{t\alpha hq}^{(70)} \delta \sigma_{t\alpha hq}^1 \right) \xrightarrow{\{\delta \sigma_{t\alpha hq}^1\}} \min \quad (79)$$

при единственном ограничении на сумму искомых переменных

$$\sum_{q=1}^s \delta \sigma_{t\alpha hq}^{(1)} = 0 \quad (80)$$

с двусторонними ограничениями на каждую переменную

$$-\varepsilon^{(1)} \leq \delta \sigma_{t\alpha hq}^{(1)} \leq \varepsilon^{(1)}. \quad (81)$$

Аналогичным образом разлагаются по индексу i задачи (76) и (77) на n^T независимых задач с единственными ограничениями на сумму переменных и двусторонними ограничениями на каждую переменную.

Задачу (79)—(81) формально можно рассматривать как задачу линейного программирования, матрица ограничений которой имеет единственную строку, и использовать для решения такой задачи стандартный метод решения. Однако наличие лишь единственного ограничения в виде простой суммы всех искомых переменных позволяет получить ее решение тривиальным способом: переменные упорядочиваются в порядке убывания значений коэффициентов целевой функции, первым $s/2$ переменным присваивается значение нижней границы, остальным $s/2$ переменным присваивается значение верхней границы⁵. Очевидно, что ограничение (80) при этом выполняется (сумма переменных равна 0), а целевая функция достигает своего минимума. Обозначим полученное таким (или каким-либо иным) способом решение задачи (79)—(81) через $\delta \sigma_{t\alpha hq}^{(1)*}$. Аналогичные решения задач (76) и (77) обозначим через $\delta \sigma_{t\alpha hq}^{(2)*}$ и $\delta \sigma_{t\alpha hq}^{(3)*}$.

В задаче (72), (69), (70), (71), (62), (63) заменим правые части уравнений (69), (70), (71), т.е. предварительно принятые значения переменных $\sigma_{t\alpha hq}^{(1)}, \sigma_{t\alpha hq}^{(2)}, \sigma_{t\alpha hq}^{(3)}$, на новые значения $\sigma_{t\alpha hq}^{(1)\nu}, \sigma_{t\alpha hq}^{(2)\nu}, \sigma_{t\alpha hq}^{(3)\nu}$, определяемые формулами:

$$\sigma_{t\alpha hq}^{(1)\nu} = \sigma_{t\alpha hq}^{(1)} + \delta \sigma_{t\alpha hq}^{(1)*}, \quad (82)$$

$$\sigma_{t\alpha hq}^{(2)\nu} = \sigma_{t\alpha hq}^{(2)} + \delta \sigma_{t\alpha hq}^{(2)*}, \quad (83)$$

$$\sigma_{t\alpha hq}^{(3)\nu} = \sigma_{t\alpha hq}^{(3)} + \delta \sigma_{t\alpha hq}^{(3)*}. \quad (84)$$

Решаем задачу (72), (69), (70), (71), (62), (63) отдельно и независимо при всех значениях индекса q с новыми значениями правых частей уравнений (69), (70), (71), получаем новые значения условно-оптимальных двойственных наценок $\psi_q^{(70)}, \psi_q^{(71)}, \psi_q^{(72)}$. Построенный таким способом итеративный процесс продолжаем до тех пор, пока полученное на очередной средней итерации снижение значения целевой функции (52) станет достаточно малым. Полученные на этой итерации значения переменных $z_{t\alpha hq}^{\text{от}}, z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}, \Delta \mu_{(t-1)hq}$ являются приближенно-оптимальным планом (решением) задачи (60)—(65), т.е. задачи производственного блока. Для выполнения следующей большой итерации эти значения $z_{t\alpha hq}^{\text{от}}, z_{t\alpha hq}^{\text{пб}}, \Delta \mu_{(t-1)hq}$ передаются в транспортный блок.

⁵При нечетном s среднему члену ряда присваивается значение 0.

3. ВЕРИФИКАЦИЯ И КАЛИБРОВКА МОДЕЛИ

Верификация и калибровка модели выполняются по данным за отчетный (базовый) год, а при необходимости и за несколько последних лет ретроспективного периода.

Модель (35)—(46) решается с использованием исходных данных, получаемых из отчетности за базовый год. Ее решение (оптимальный план), полученное путем ее декомпозиции и выполнения достаточного числа итераций, обозначим $z_{0\alpha hq}^{от.*}$, $z_{0\alpha hr}^{пб.*}$, $z_{0\alpha hqr}^{корр.*}$, $\Delta\mu_{(-1)hq}^*$, $\Delta N_{(-1)k}^{т.*}$, $\Delta N_{(-1)k}^{об.*}$. Верификация и калибровка модели выполняется путем сравнения полученного для базового года решения с данными отчетности за этот год. На данном этапе исследования ограничимся сопоставлением значений $z_{0\alpha hq}^{от.*}$, $z_{0\alpha hr}^{пб.*}$, $z_{0\alpha hqr}^{корр.*}$ с данными отчетов РЖД «Перевозки грузов по корреспонденциям» отдельно по видам грузов h и по видам сообщения α (внутреннее, экспорт, импорт, транзит) и «Густота перевозок грузов по участкам сети». Данные первого отчета обозначим $d_{0\alpha hqr}$, второго — f_{0hk}^T , $f_{0hk}^{об}$. Напомним, что номера узлов сети железных дорог обозначены $q, r = 1, \dots, s$, номера участков сети $k = 1, \dots, p$. Нет оснований для уверенности, что каждая из величин $z_{0\alpha hqr}^{корр.*}$ в точности совпадет с соответствующей $d_{0\alpha hqr}$, хотя бы уже потому, что при формировании задачи (35)—(46) был принят целый ряд более или менее правдоподобных, но отнюдь не абсолютно достоверных гипотез. Введем переменные $\tilde{z}_{0\alpha hqr}^{корр}$ — откорректированные значения объемов поставок и положим

$$\tilde{z}_{0\alpha hqr}^{корр} = z_{0\alpha hqr}^{корр.*} (1 + \delta_{0\alpha hqr}), \quad (85)$$

где $\delta_{0\alpha hqr}$ — коэффициент корректировки.

Значения $\delta_{0\alpha hqr}$ будем определять отдельно для каждой комбинации (α, h) путем решения следующей задачи квадратичного программирования:

$$\sum_{r=1}^s \tilde{z}_{0\alpha hqr}^{корр.*} (1 + \delta_{0\alpha hqr}) = \bar{d}_{0\alpha hq}, \quad q = 1, \dots, s, \quad (86)$$

$$\sum_{q=1}^s \tilde{z}_{0\alpha hqr}^{корр.*} (1 + \delta_{0\alpha hqr}) = \hat{d}_{0\alpha hq}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (87)$$

$$\sum_{(q,r) \in \Omega_k^T} \tilde{z}_{0\alpha hqr}^{корр.*} (1 + \delta_{0\alpha hqr}) = f_{0\alpha hk}^T, \quad k = 1, \dots, p, \quad (88)$$

$$\sum_{(q,r) \in \Omega_k^{об}} \tilde{z}_{0\alpha hqr}^{корр.*} (1 + \delta_{0\alpha hqr}) = f_{0\alpha hk}^T, \quad k = 1, \dots, p, \quad (89)$$

$$-\varepsilon \leq \delta_{0\alpha hqr} \leq \varepsilon, \quad (90)$$

$$\sum_{q=1}^s \sum_{r=1}^s \delta_{0\alpha hqr}^2 \rightarrow \min, \quad (91)$$

где ε — максимально-допустимое значение модуля коэффициента корректировки назначается экспертно.

Если при выбранной величине ε система (86)—(90) оказывается несовместной, целесообразно на содержательном уровне проанализировать принятые при формировании задачи (35)—(46) гипотезы, в том числе определяющие значения коэффициентов территориального распределения производства электроэнергии и добычи природного газа, выполнения строительно-монтажных работ и потребления услуг. Может потребоваться также более тщательное обоснование и корректировка принятых значений доли объема выпускаемой продукции, поступающей в перевозку на железнодорожный транспорт.

В расчетах на прогнозный период при определении индексов средней дальности перевозок величины $z_{t\alpha hqr}^{корр}$ в формуле (49) заменяются на $\tilde{z}_{t\alpha hqr}^{корр}$, определяемые по формуле вида (85) с заменой индекса 0 на t у величин z и сохранением индекса 0 у величины δ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. (1969). Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука.
- Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. (1972). Нелинейные сетевые транспортные задачи. М.: Транспорт.
- Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сулакшин С.С. (2007). Применение вычислимых моделей в государственном управлении. М.: Научный эксперт.
- Позамантир Э.И. (2014). Вычислимое равновесие экономики и транспорта. М.: Поли Принт Сервис.
- Позамантир Э.И. (2017). Иерархическая система моделей межотраслевого баланса и территориального размещения производства. Часть 1. Постановка задачи и общий подход к ее решению // *Экономика и матем. методы*. Т. 53. № 2.
- Цурков В. (1981). Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука.

Поступила в редакцию
17.08.2016 г.

REFERENCES (WITH ENGLISH TRANSLATION OR TRANSLITERATION)

- Golstein Ye.G., Udin D.B. (1969). Linear Programming Tasks of Transportation Type. Moscow: Nauka (in Russian).
- Levit B. Yu., Livshits B.N. (1972). Non-Linear Network Transportation Tasks. Moscow: Transport (in Russian).
- Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Sulakshin S.S. (2007). Applying Computable Models in State Management [Book]. Moscow: Scientific Expert (in Russian).
- Pozamantir E.I. (2014). Computable General Equilibrium of Economy and Transport [Book]. Moscow: Poly Print Service (in Russian).
- Pozamantir E.I. (2017). Hierarchical System of Intersectoral Balance Models and the Models of Territorial Production Distribution. Part 1. Enunciation of the Task and a General Approach to Its Decision. *Economics and Mathematical Methods*, 53, 2 (in Russian).
- Tsurkov V. (1981). Decomposition in the Big-Size Tasks. Moscow: Nauka (in Russian).

Received 17.08.2016

HIERARCHICAL SYSTEM OF INTERSECTORAL BALANCE MODELS AND THE MODELS OF TERRITORIAL PRODUCTION DISTRIBUTION.

PART 2. ENUNCIATION OF THE TASK AND A GENERAL APPROACH TO ITS DECISION

E.I. Pozamantirⁱ

Abstract. Model of input-output balance (MIOB, Makarov, 2007; Pozamantir, 2014) is connected with a model of territorial manufacturing locations, consumption and transportation of products in the following way. In MIOB total production and consumption volumes on the country are determined for each kind of product. Along with it, unit costs of transport services are used, but it isn't taken into account that their value depends on territorial location of the production and consumption places of particular products being transported. Moreover, not only total volume of transport activities in this field depends on these locations, but distribution of the volume by territory is a pendent or a partially interchangeable element of the transportation system as well. In its turn, it determines the necessity to develop those of them that prove to be "bottlenecks". Transport elements' development requires investment in territory-fixed elements of the transportation system and these investments must be consistent with the total volume of investment in transport determined in MIOB. A system of models is constructed, in which MIOB and model of choosing territorial manufacturing locations are interconnected. Total (for the country) production and consumption volumes are transferred from

ⁱElmar I. Pozamantir — Doct. Sc. (Techn.), Professor, Chief Scientific Researcher, Federal Research Center "Informatics and Management", Institute of Systems Analysis (ISA) RAS; Russia, Moscow, e.pozamantir@yandex.ru.

МIOB to a model of territorial manufacturing locations, as well as the investment volumes. In the location task these total values are distributed over the country's territory so that total production and transportation costs were minimized. The values of average transportation distances determined by the chosen location are transferred in the opposite direction, as well as a list of transport objects, which capacity must be increased in order to realize the chosen location. It's shown that the problem of choosing manufacturing and consuming locations is a task of linear programming of extremely large dimensions; however it has a special block structure allowing to organize an effective computing process. The equations connecting the separate blocks are divided into parts, corresponding to each block, by introducing additional variables, and their values are improved by iterations on the base of dual estimates of blocks limitations. Verification and calibration of the model is carried through calculations on the data of a reporting period and comparing the data received with the reporting data.

Keywords: output, territorial location, calculated transport network, network junctions and sections, volumes of dispatches and receipts in junction, multi-level block linear programming.

JEL Classification: C02, C31, C68, E17, L91, L92.