
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

**РАСЧЕТ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ
НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ***© 2017 г. Е. А. Шелемех¹

Аннотация. Рассматривается неполный рынок с дискретным временем без транзакционных издержек, состоящий из одного рискованного и одного безрискового активов. Предполагается, что доходность рискованного актива на каждом шаге принимает одно из трех значений. Таким образом, предусмотрены возможности роста и снижения цены рискованного актива, а также временной остановки на уровне предыдущего значения. На этом рынке обращается экзотический опцион из класса контрактов, обязанность и момент исполнения которых зависят от некоторого случайного события (например, цена рискованного актива достигает некоторого заданного уровня). Для расчета такого опциона на описанном неполном рынке применен минимаксный подход, отражающий точку зрения продавца опциона и состоящий в следующем. Считается, что функция риска продавца экспоненциальная и зависит от полученной продавцом премии и от дефицита капитала его портфеля в момент исполнения контракта. Распределение цен рискованного актива участникам рынка неизвестно. Продавец разумен в следующем смысле. Он предполагает, что на рынке действует наихудшее для него распределение (максимизирует ожидаемое значение его риска), и в сложившейся ситуации стремится минимизировать это значение, управляя портфелем активов. Для описанной модели рынка впервые выведено рекуррентное соотношение, описывающее эволюцию минимаксного значения ожидаемого риска продавца. Для максимального значения ожидаемого риска продавца найден минимизирующий его самофинансируемый портфель (оптимальный портфель продавца). Доказано, что портфель с потреблением, соответствующий оптимальному портфелю продавца, является суперхеджирующим относительно любой дискретной вероятностной меры, а его капитал не превосходит капитала любого другого суперхеджирующего портфеля. Таким образом, полученное решение невозможно улучшить, выбирая другие функции риска. На основании полученных результатов выведены формулы для суперхеджирующих портфелей бинарного и барьерного опционов.

Ключевые слова: экзотический опцион, неполный рынок, минимаксный подход, суперхеджирование, бинарный опцион, барьерный опцион.

Классификация JEL: C73.

ВВЕДЕНИЕ

Опцион — это один из наиболее популярных инструментов биржевой и внебиржевой торговли (Hull, 2009). Под опционом (стандартный опцион, *vanilla option*) понимают контракт, в соответствии с которым покупатель приобретает право, а продавец берет на себя обязательство купить (продать) актив по цене, указанной в контракте, или осуществить денежную выплату в фиксированной сумме в будущем, а именно в момент времени: а) закрепленный условиями опциона (европейский опцион); б) выбранный покупателем в течение срока, предусмотренного опционом (американский опцион) (Hull, 2009; Фельмер, Шид, 2008; Ширяев, 1998). За это право покупатель выплачивает продавцу премию — *справедливую стоимость опциона* (см., например, (Ширяев, 1998)). Под исполнением опциона обычно понимают операцию обмена активами или выплату денежных средств, когда покупатель использует свое право по опциону.

Наравне со стандартными опционами на рынках торгуются также опционы, условия исполнения которых отличаются от стандартных. Их называют *экзотическими опционами* (*exotic option*) (Hull, 2009). Среди многообразия экзотических опционов выделяется класс контрактов,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 16-06-00098, 16-06-00229).

¹ Елена Александровна Шелемех — младший научный сотрудник, ЦЭМИ РАН, Москва; letis@mail.ru.

Автор благодарит д.ф.-м.н., профессора В. М. Хаметова за постановку задачи и общее научное руководство при подготовке статьи.

обязанность и момент исполнения которых зависят от некоторого случайного события, такого как достижение ценой рискованного актива некоторого заданного уровня или выход за пределы установленного коридора. Например, к таким опционам относятся так называемые *бинарные* (binary, или bet, или digital) и *барьерные* (barrier) опционы.

Рынок — это набор конечного числа рискованных и безрисковых активов (Ширяев, 1998). Безрисковыми называют активы, эволюция доходности которых может быть описана предсказуемой² случайной последовательностью или, в наиболее простом случае, детерминированной числовой последовательностью. Так, безрисковым активом является банковский счет с фиксированной процентной ставкой. В отличие от безрисковых активов эволюция доходности рискованного актива может быть задана только согласованной³ случайной последовательностью (Ширяев, 1998). Примером рискованных активов служат активы, обращающиеся на биржах, в частности акции компаний. Рынок полностью определяется распределением цен рискованных активов. Однако это распределение обычно неизвестно участникам.

На полученную при продаже опциона премию продавец формирует набор активов, называемый портфелем. Стоимость портфеля называют его капиталом. Рынок считают арбитражным, если при нулевых начальных вложениях на нем найдется такой портфель, капитал которого в момент исполнения опциона положителен с положительной вероятностью. В противном случае рынок называют безарбитражным (Ширяев, 1998). Известно, что рынок является безарбитражным тогда и только тогда, когда на нем найдется такое распределение цен рискованных активов (мартингальное распределение), относительно которого цены в среднем не меняются.

Расчет опционов, обращающихся на безарбитражном рынке, как правило, состоит в нахождении премии и самофинансируемого портфеля с потреблением (Ширяев, 1998) таких, что капитал портфеля продавца в момент исполнения опциона не меньше (равен) стоимости его обязательств по контракту. Такой портфель называют хеджирующим (совершенным хеджирующим). Рынок, на котором для любого финансового инструмента, величина выплаты по которому зависит от цен рискованных активов (но при этом ограничена), существует совершенный хеджирующий портфель, называют *полным*. Известно, что рынок полон тогда и только тогда, когда на нем имеется только одна мартингальная мера (Ширяев, 1998; Фельмер, Шид, 2008). Поэтому на полном рынке расчет опциона осуществляют относительно этой меры. В литературе имеются примеры расчета экзотических опционов на полных рынках. Так, для рынка Блека—Шоулза (полный рынок с непрерывным временем) известны формулы расчета бинарного и барьерного опционов (Hull, 2009), европейского опциона с ограничением выплаты сверху и снизу, а также барьерного опциона с ограничением на выплату снизу (Демин, Андреева, 2011). В случае дискретного времени и полного рынка, на котором цена рискованного актива описывается геометрическим случайным блужданием, в (Фельмер, Шид, 2008) выведены формулы для расчета барьерного опциона. Получить явные формулы для расчета экзотических опционов удастся очень редко, даже если известна вероятностная мера, задающая рынок. Чаще в этом случае для расчета экзотических опционов применяют численные методы (Carr, Nadtochiy, 2011; Kudryavtsev, Levendorskii, 2009).

Как правило, рынки являются неполными. Например, неполным будет рынок, на котором доходность рискованного актива на каждом шаге принимает не менее трех значений. На неполном рынке возникает проблема выбора меры, относительно которой следует производить расчет опциона. В настоящее время существуют два подхода к ее разрешению. Первый — это построение суперхеджирующего портфеля экзотического опциона, который состоит из рискованных и безрисковых активов, а также, у ряда авторов, из стандартных опционов и капитал которого позволяет исполнить обязательство по экзотическому опциону относительно любой вероятностной меры из множества эквивалентных мартингальных (Ширяев, 1998; Фельмер, Шид, 2008; Acciaio, Beiglbock, Penkner, Schachermayer, 2016). В работах (Ширяев, 1998; Фельмер, Шид, 2008) приведено доказательство существования суперхеджирующего портфеля с потреблением, основанное на равномерном разложении Дуба. Однако этот подход не дает конструктивного способа построения суперхеджирующего портфеля.

² Иными словами, располагая всей информацией, имеющейся на рынке на момент времени $n - 1$ включительно, любой участник рынка может точно определить цену безрискового актива в момент времени n .

³ Это означает, что цена рискованного актива в момент времени n становится известна участникам рынка только в этот момент времени, ее невозможно достоверно предсказать заранее.

Второй подход состоит в выборе меры, максимизирующей ожидаемую выплату по опциону и/или полезность продавца, как правило, по множеству эквивалентных мартингалных мер и в статической постановке (Гущин, 2013; Schachermayer, 2012; Beiglbock, Henry-Labordere, Penkner, 2013; Fahim, Huang, 2016). Показано, что эта задача является двойственной к задаче суперхеджирования, и получены условия существования решения обеих задач, которые оказалось трудно проверить.

В этой статье будет исследован рынок, состоящий из одного рискового и одного безрискового активов. Предполагается, что эволюция доходности рискового актива описывается случайной последовательностью, которая похожа на геометрическое случайное блуждание с той лишь разницей, что элементы порождающей ее последовательности принимают три значения с положительной вероятностью. В рамках этой модели учитывается не только возможность роста и падения цены рискового актива, но и тот факт, что в некоторые моменты времени цены на рынке не меняются. Данный рынок является неполным (Ширяев, 1998). Рассмотрение такого рынка обусловлено тем, что на нем могут быть наглядно описаны все сложности, связанные с теорией расчета экзотических опционов на неполном рынке.

Для расчета экзотических опционов был применен минимаксный подход, впервые изложенный в работе (Хаметов, Шелемех, 2015) для расчета американских опционов на неполных рынках. Этот подход состоит в следующем. Предполагается, что функция риска продавца экспоненциальная и зависит от полученной продавцом премии, а также от разности между капиталом его портфеля и величиной причитающейся покупателю выплаты в момент исполнения опциона (дефицит капитала портфеля продавца). Поскольку продавцу неизвестно распределение цен рискового актива на рынке, он предполагает, что это распределение максимизирует его ожидаемый риск. Продавец, управляя портфелем активов, стремится минимизировать свой ожидаемый риск. В этой статье на основании изложенного подхода получены новые формулы для портфеля, которому соответствует минимаксное значение ожидаемого риска продавца экзотического опциона на неполном рынке, и доказано, что построенный портфель является также суперхеджирующим относительно любой дискретной вероятностной меры.

Выбор экспоненциальной функции риска, с одной стороны, связан с ее мультипликативным свойством, которое позволило применить для решения рассматриваемой задачи стохастический вариант метода динамического программирования и существенно упростить вид полученных соотношений. С другой стороны, полученное решение задачи расчета экзотического опциона является наилучшим в том смысле, что капитал соответствующего суперхеджирующего портфеля минимален (не превосходит капитала любого другого суперхеджирующего портфеля относительно любой дискретной вероятностной меры).

Структура статьи следующая. Описание рынка и постановка задачи нахождения минимаксного риска продавца приведены в разд. 1–2. В разд. 3 выведено рекуррентное соотношение беллмановского типа, описывающее эволюцию минимаксного значения ожидаемого риска продавца в обратном времени; получены формулы для самофинансируемого портфеля продавца, соответствующего минимаксному значению ожидаемого риска; показано, что этот портфель является совершенным суперхеджирующим, а его капитал не превосходит капитала любого другого суперхеджирующего портфеля. В разд. 4 приведены расчеты, реализующие минимаксный подход для бинарного и барьерного опционов на рассматриваемом неполном рынке. Доказательства всех утверждений содержатся в Приложении.

1. ОПИСАНИЕ РЫНКА

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (F_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ задана одномерная согласованная случайная последовательность $\{S_n\}_{n \geq 0}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$S_0 = 1, \quad S_n = S_{n-1} \lambda^{\varepsilon_n}, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

где $\lambda > 1$ — шаг решетки (фиксирован); $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых в совокупности, одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения из множества

$\{-1, 0, 1\}$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3 > 0$, соответственно, $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$. Пусть последовательность $\{S_n\}_{n \geq 0}$ описывает эволюцию цены рискованного актива. Очевидно, что случайная величина $(\lambda^{\varepsilon_n} - 1)$ принимает значения из множества $\{-(\lambda - 1)/\lambda, 0, \lambda - 1\}$ и имеет экономический смысл *доходности рискованного актива* в момент времени n . Без ограничения общности можно считать, что $F_n = \sigma\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} = \sigma\{S_1, \dots, S_n\}$, $n \geq 1$.

Пусть на $(\Omega, F, (F_n)_{n \geq 0})$ заданы дискретные меры Q такие, что для любого $n \geq 1$:

$$q_1 = Q(\varepsilon_n = -1) \geq 0, \quad q_2 = Q(\varepsilon_n = 0) \geq 0, \quad q_3 = Q(\varepsilon_n = 1) \geq 0 \quad \left(\sum_{i=1}^3 q_i = 1\right).$$

Множество дискретных мер Q , относительно которых элементы последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ независимы в совокупности, обозначим через R . Очевидно, что R непусто и компактно (Биллингсли, 1977).

Легко убедиться, что в рассматриваемом случае мартингалов мер бесконечно много. Их множество может быть описано соотношением $\{Q \in R : q_1 = \lambda q_3, \quad q_2 = 1 - q_3(1 + \lambda), \quad 0 \leq q_3 \leq 1\}$.

Пусть также имеется один безрисковый актив, стоимость которого в любой момент времени равна 1. Набор, состоящий из безрискового и рискованного активов, называют $\{1, S\}$ -рынком. Очевидно, что описанный $\{1, S\}$ -рынок является безарбитражным и неполным (Ширяев, 1998).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ЭКЗОТИЧЕСКОГО ОПЦИОНА НА НЕПОЛНОМ $\{1, S\}$ -РЫНКЕ

Для удобства изложения материала приведем некоторые сведения из теории опционов (Ширяев, 1998). Пусть $\beta = \{\beta_n\}_{n \geq 0}$ и $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \geq 0}$ такие, что $\beta_0, \gamma_0 \in \mathbf{R}^1$ и для любого $n \geq 1$: β_n и γ_n — F_{n-1} -измеримые случайные величины, а $\mathbf{R}^1$ — множество действительных чисел. Элементы этих последовательностей имеют смысл, соответственно, *количества* безрискового и рискованного активов в момент времени n . Отметим, что β_n и γ_n могут принимать не только положительные, но и отрицательные значения. Последнее означает, что соответствующее количество безрискового или рискованного актива взято в долг. Обозначим через D — множество, состоящее из всех γ ; D_n^k — множество с элементами $\gamma_n^k = (\gamma_n, \dots, \gamma_k)$, $0 \leq n \leq k$.

Для портфеля $\pi = \{\beta, \gamma\}$ в момент времени $n \geq 0$ его капитал будет $X_n^\pi = \beta_n + \gamma_n S_n$, а начальный капитал портфеля продавца опциона X_0^π равен премии, полученной продавцом от покупателя (т.е. справедливой стоимости опциона).

Портфель π называют *самофинансируемым*, если для любого $n \geq 1$ справедливо равенство⁴

$$\Delta \beta_n = -\Delta \gamma_n S_{n-1}. \quad (2)$$

Далее мы будем использовать только самофинансируемые портфели. Последнее означает, что на данном рынке отсутствуют транзакционные издержки и продавец не получает инвестиций. Из (2) вытекает, что для любого $n \geq 1$ капитал портфеля π допускает представление

$$X_n^\pi = X_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta S_i.$$

Нам потребуются следующие обозначения: 1) N — горизонт; 2) T_n^{N+1} — множество моментов остановки τ относительно фильтрации $(F_n)_{n \geq 0}$, принимающих значения в множестве $\{n, \dots, N+1\}$. При $n \leq \tau$ момент остановки τ имеет смысл момента наступления случайного события, обуславливающего осуществление выплаты по экзотическому опциону. Для удобства изложения в рассмотрение введен также дополнительный момент времени $N+1$. Если случайное событие, обуславливающее выплату по экзотическому опциону, не произошло до момента

⁴ Везде ниже будем обозначать $\Delta Y_n = Y_n - Y_{n-1}$, где Y_n — любая случайная величина.

N включительно, то по соглашению $\tau = N + 1$. Например, $\tau = (N + 1) \wedge \min\{n \geq 0 : S_n \geq \lambda^m\}$ или $\tau = (N + 1) \wedge \min\{n \geq 0 : S_n \leq \lambda^m\}$, где m — целое число. Для вспомогательного момента времени $N+1$ примем $S_{N+1} = S_N$, $\beta_{N+1} = \beta_N$, $\gamma_{N+1} = \gamma_N$. Соответственно, $X_{N+1}^\pi = X_N^\pi$.

Пусть $\{f_n\}_{0 \leq n \leq N}$ — согласованная последовательность неотрицательных случайных величин. Для любого $n \in \{0, \dots, N\}$ случайная величина f_n имеет смысл величины выплаты по опциону в соответствии с условиями контракта в случае, если $\tau = n$. Если случайное событие не наступило до момента времени N включительно, опцион прекращает свое действие, но выплата по нему не осуществляется. Поэтому примем $f_{N+1} \equiv 0$. В этих обозначениях экзотический опцион — это пара (τ, f_τ) .

Разность $X_\tau - f_\tau$ назовем *дефицитом капитала портфеля продавца* экзотического опциона. Пусть функция риска продавца экспоненциальная, зависит от полученной продавцом премии и дефицита капитала его портфеля, т.е. имеет вид $\exp\{X_0 - (X_\tau - f_\tau)\}$. Число $I_0^{\gamma, Q} = E^Q \exp\{X_0 - (X_\tau - f_\tau)\}$ назовем *ожидаемым риском продавца* относительно меры $Q \in R$.

Предполагается, что явный вид распределения вероятностей, соответствующего описывающей рынок мере $Q \in R$, участникам рынка неизвестен. В соответствии с контрактом продавец обязан достоверно исполнить опцион. Поэтому разумный продавец считает, что на рынке действует такое распределение вероятностей из множества R , которое максимизирует его ожидаемый риск. Разумный продавец выбирает такой самофинансируемый портфель (возможно, с потреблением), который минимизирует максимальное значение ожидаемого риска. Таким образом, мы пришли к задаче нахождения минимаксного значения ожидаемого риска продавца:

$$I_0^{\gamma, Q} \rightarrow \inf_{\gamma \in D} \sup_{Q \in R} \quad (3)$$

Как и в теории игр (Петросян, 1998), величину $V_0 = \inf_{\gamma \in D} \sup_{Q \in R} I_0^{\gamma, Q}$ назовем *верхним гарантированным значением ожидаемого риска продавца*. Она имеет смысл минимаксного значения ожидаемого риска продавца.

3. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОРТФЕЛЬ ПРОДАВЦА

В этом разделе определим оптимальный портфель продавца экзотического опциона и установим его вид, а также некоторые важные свойства.

Определение 1. Самофинансируемый портфель $\pi^* = \{\beta^*, \gamma^*\}$ такой, что $\sup_{Q \in R} I_0^{\gamma^*, Q} = V_0$, назовем *оптимальным портфелем продавца* экзотического опциона на неполном $\{1, S\}$ -рынке, а предсказуемую последовательность γ^* — *оптимальной стратегией продавца*.

Оптимальный портфель продавца будем искать следующим образом. Сначала выведем рекуррентное соотношение, описывающее эволюцию верхнего гарантированного значения в обратном времени. Затем, основываясь на этом рекуррентном соотношении, получим формулы для оптимального портфеля продавца.

Нам понадобятся дополнительные обозначения. F_n -измеримую случайную величину $I_n^{\gamma, Q}(S_1, \dots, S_n) = 1_{\{\tau \geq n\}} E^Q(\exp\{X_n - (X_\tau - f_\tau)\} | F_n)$ назовем *ожидаемым риском продавца*⁵ относительно меры $Q \in R$ в момент времени $n \in \{1, \dots, N+1\}$.

Для любого $n \in \{1, \dots, N+1\}$ определим F_n -измеримую случайную величину $V_n(S_1, \dots, S_n) = \inf_{\gamma \in D_{n+1}^{N+1}} \sup_{Q \in R} I_n^{\gamma, Q}(S_1, \dots, S_n)$, которую назовем *верхним гарантированным значением ожидаемого риска продавца* в момент времени n . Из определения следует, что $V_N = 1_{\{\tau=N\}} \exp\{f_N\} + 1_{\{\tau > N\}}$, а $V_{N+1} = 1$.

Обозначим также: $\Theta = \{q = (q_1, q_2, q_3) : q_1, q_2, q_3 \geq 0, q_1 + q_2 + q_3 = 1\}$, $S_1^n = (S_1, \dots, S_n)$.

⁵ В определении ожидаемого риска продавца через $1_{\{\tau=n\}}$ обозначен индикатор события $\{\tau = n\}$, т.е. случайная величина, которая принимает значение «1», если событие произошло, и «0» в обратном случае.

Теорема 1. Случайная последовательность $\{V_n\}_{0 \leq n \leq N+1}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} V_n(S_1^n) &= 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \inf_{\gamma_{n+1} \in D_{n+1}} \max_{q \in \Theta} \{q_1 V_{n+1}(S_1^n, \lambda^{-1} S_n) \exp\{\gamma_{n+1} S_n(\lambda-1)/\lambda\} + \\ &+ q_2 V_{n+1}(S_1^n, S_n) + q_3 V_{n+1}(S_1^n, \lambda S_n) \exp\{-\gamma_{n+1} S_n(\lambda-1)\}\}; \\ V_N &= 1_{\{\tau=N\}} \exp\{f_N\} + 1_{\{\tau>N\}}, \quad V_{N+1} = 1. \end{aligned} \quad (4)^6$$

Приведем формулы для оптимального портфеля продавца. Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi_n^\gamma(S_1^n) &= \max_{q \in \Theta} \{q_1 V_{n+1}(S_1^n, \lambda^{-1} S_n) \exp\{\gamma S_n(\lambda-1)/\lambda\} + q_2 V_{n+1}(S_1^n, S_n) + \\ &+ q_3 V_{n+1}(S_1^n, \lambda S_n) \exp\{-\gamma S_n(\lambda-1)\}\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\gamma \in \mathbf{R}^1$ — любое число, $n \in \{0, \dots, N\}$.

Теорема 2. На $\{1, S\}$ -рынке, заданном (1), существует оптимальный самофинансируемый портфель продавца экзотического опциона $\pi^* = \{\beta^*, \gamma^*\}$ такой, что:

1) для любого $n \in \{1, \dots, N\}$ оптимальная стратегия продавца γ_n^* при условии, что $\tau \geq n$, имеет вид:

$$\gamma_n^* = \begin{cases} \frac{\lambda}{(\lambda^2 - 1)S_{n-1}} \ln \left(\frac{V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}\lambda)}{V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}\lambda^{-1})} \right), & \text{если для любого } \gamma: \Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1}) > V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}); \\ \alpha \gamma_{1,n}^* + (1 - \alpha) \gamma_{2,n}^*, & \text{если существует } \tilde{\gamma}: \Phi_{n-1}^{\tilde{\gamma}}(S_1^{n-1}) = V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}), \end{cases} \quad (6)$$

где $\alpha \in (0, 1)$,

$$\gamma_{1,n}^* = \frac{\lambda}{(\lambda - 1)S_{n-1}} \ln \left(\frac{V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1})}{V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}\lambda^{-1})} \right), \quad \gamma_{2,n}^* = \frac{1}{(\lambda - 1)S_{n-1}} \ln \left(\frac{V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}\lambda)}{V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1})} \right) \quad (7)$$

последовательность $\{\ln V_n\}_{0 \leq n \leq N}$ удовлетворяет соотношению:

$$\begin{aligned} \ln V_n(S_1^n) &= 1_{\{\tau=n\}} f_n + 1_{\{\tau>n\}} \max \left\{ \ln V_{n+1}(S_1^n, S_n); \right. \\ &\left. \frac{\lambda}{1+\lambda} \ln V_{n+1}(S_1^n, S_n \lambda^{-1}) + \frac{1}{1+\lambda} \ln V_{n+1}(S_1^n, S_n \lambda) \right\}; \quad \ln V_N = 1_{\{\tau=N\}} f_N; \quad \ln V_{N+1} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

2) элементы последовательности $\{\beta_n^*\}_{1 \leq n \leq N}$ могут быть найдены из условия самофинансируемости (2).

Замечание 1. В утверждении теоремы 2 без ограничения общности можно считать, что $\gamma_0^* = 0$, $\beta_0^* = \ln V_0$.

Замечание 2. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\alpha = 1/(1+\lambda)$. Тогда стратегия

$$\gamma_n^* = \frac{\lambda}{1+\lambda} \gamma_{1,n}^* + \frac{1}{1+\lambda} \gamma_{2,n}^* = \frac{\lambda}{(\lambda^2 - 1)S_{n-1}} \ln \left(\frac{V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}\lambda)}{V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}\lambda^{-1})} \right) \quad (9)$$

будет оптимальной для любых S_1^{n-1} .

Замечание 3. Согласно (Ширяев, 1998) неполный рынок является безарбитражным. Если рынок арбитражный (например, для любой меры $Q \in \mathbf{R}$ выполняется $q_1 = 0$ или $q_3 = 0$), то из доказательства теоремы 2 следует, что оптимальной будет стратегия $\gamma \equiv 0$.

Замечание 4. Из (8) следует, что для любого $n \in \{0, \dots, N\}$ справедливо неравенство $\ln V_n(S_1^n) \geq \ln V_{n+1}(S_1^n, S_n)$.

⁶ Рекуррентное соотношение (4) выведено впервые и не следует из результатов других работ.

Покажем, что оптимальный портфель продавца, описанный в теореме 2, является одновременно совершенным суперхеджирующим. Пусть $\{C_n\}_{0 \leq n \leq N+1}$, $C_0 = 0$ — неубывающая согласованная последовательность, элементы которой C_n имеют экономический смысл накопленного на момент времени n потребления. Пару $\{\pi, C\}$ называют портфелем с потреблением. Для любого $n \in \{0, \dots, N+1\}$ капитал портфеля с потреблением $\{\pi, C\}$ определяется как разность: $X_n^{\pi, C} = X_n^\pi - C_n$.

Капитал портфеля с потреблением $X_n^{\pi, C}$ допускает представление $X_n^{\pi, C} = X_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta S_i - C_n$.

Определение 2. Самофинансируемый портфель с потреблением $\{\pi^*, C^*\}$ будем называть *суперхеджирующим портфелем экзотического опциона*, если для любой $Q \in R$ выполняется $Q(X_\tau^{\pi^*, C^*} \geq f_\tau) = 1$ и совершенным суперхеджирующим — если $Q(X_\tau^{\pi^*, C^*} = f_\tau) = 1$.

Теорема 3. Пусть экзотический опцион задан парой (τ, f_τ) и π^* — оптимальный портфель продавца такого экзотического опциона в смысле определения 1. Тогда портфель с потреблением $\{\pi^*, C^*\}$, где

$$\Delta C_n^* = \gamma_n^* \Delta S_n - \Delta \ln V_n(S_1^n), \quad C_0^* = 0, \quad (10)$$

является совершенным суперхеджирующим портфелем экзотического опциона, причем его капитал $1_{\{n \leq \tau\}} X_n^{\pi^*, C^*} = 1_{\{n \leq \tau\}} \ln V_n(S_1^n)$, где $\{\ln V_n\}_{0 \leq n \leq N+1}$ удовлетворяет (8).

Определение 3. Совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением $\{\pi^*, C^*\}$ назовем *минимальным совершенным суперхеджирующим*, если для любого $n \in \{0, \dots, N\}$ и любого другого суперхеджирующего портфеля с потреблением $\{\tilde{\pi}, \tilde{C}\}$ справедливо неравенство $1_{\{n \leq \tau\}} X_n^{\pi^*, C^*} \leq 1_{\{n \leq \tau\}} X_n^{\tilde{\pi}, \tilde{C}}$.

Теорема 4. Совершенный суперхеджирующий портфель $\{\pi^*, C^*\}$, определенный в теореме 3, является минимальным.

Замечание 5. Из утверждений теорем 2–4 вытекает, что на рассматриваемом неполном $\{1, S\}$ -рынке для любого экзотического опциона всегда существует оптимальный портфель продавца, который также будет совершенным суперхеджирующим портфелем с минимальным капиталом.

Замечание 6. Формулы для расчета экзотического опциона на неполном $\{1, S\}$ -рынке, приведенные в теоремах 2–3, получены впервые.

Замечание 7. Полный рынок — это частный случай рассматриваемого $\{1, S\}$ -рынка, и для него справедливы утверждения теорем 1–4. Легко проверить, что при этом на полном $\{1, S\}$ -рынке для любого экзотического опциона (τ, f_τ) и $n \in \{1, \dots, \tau\}$:

- а) количество рискового актива в суперхеджирующем портфеле определяется (9);
- б) потребление $C_n^* = 0$.

Отсюда следуют известные формулы для суперхеджирующего портфеля европейского опциона на полном $\{1, S\}$ -рынке (Фельмер, Шид, 2008).

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ НА НЕПОЛНОМ $\{1, S\}$ -РЫНКЕ

Из теорем 1–3 следует, что для данного неполного $\{1, S\}$ -рынка построение решения задачи расчета экзотического опциона сводится к решению рекуррентного соотношения (8). В этом разделе мы найдем решения (8) для бинарного и барьерного опционов.

4.1. Бинарный опцион — это контракт на получение от продавца одной денежной единицы в момент, когда цена рискового актива превысила некоторую заданную величину, если это событие произошло до момента времени N включительно. Отметим, что бинарный опцион является одним из основных инструментов на рынке Форекс, торгуется на Американской (Нью-Йорк) и Чикагской фондовых биржах.

Пусть случайное событие состоит в том, что стоимость рискового актива превысит фиксированное значение λ^m ($m > 0$), т.е. $\tau = (N+1) \wedge \min\{n \geq 0 : S_n \geq \lambda^m\}$.

Пару $(\tau, 1_{\{\tau \leq N\}})$ называют *бинарным опционом первого касания с верхним барьером* (Hull, 2009).

Обозначим:

$$1) V_n^d = 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}} \inf_{\gamma_{n+1}^{N+1} \in D_{n+1}^{N+1}} \sup_{Q \in R} E^Q \left(\exp \left\{ X_n - (X_\tau - 1_{\{\tau \leq N\}}) \right\} \middle| F_n \right);$$

2) $Bi(n, k, p) = \sum_{i=0}^k C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ – биномиальное распределение от трех аргументов n, k, p , где $k \in \{0, \dots, n\}$.

3) $[\cdot]$ – целая часть действительного числа;

$$4) A(t) = [0, 5(N - n + \log_\lambda S_n + t)], \quad a(t) = [0, 5(N - n + \log_\lambda S_n + t)].$$

Теоремы 2–3 и следующее утверждение дают формулы расчета бинарного опциона первого касания с барьером сверху на рассматриваемом неполном $\{1, S\}$ -рынке.

Теорема 5. Пусть $(\tau, 1_{\{\tau \leq N\}})$ – бинарный опцион первого касания с верхним барьером. Тогда $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$:

$$\ln V_n^d = 1_{\{S_n \geq \lambda^m\}} + 1_{\{S_n < \lambda^m\}} \left\{ \text{Bi} \left(N - n, A(-m), \frac{\lambda}{1+\lambda} \right) + S_n \lambda^{-m} \left\{ 1 - \text{Bi} \left(N - n, a(m), \frac{\lambda}{1+\lambda} \right) \right\} \right\}, \quad (11)^7$$

$$\ln V_N^d = 1_{\{S_N \geq \lambda^m\}}, \quad \ln V_{N+1}^d = 0.$$

Замечание 8. Из утверждения теоремы 5 следует, что для любого $n \in \{1, \dots, N\}$ оптимальная стратегия $1_{\{\tau=n\}} \gamma_n^* \geq 0$, т.е. минимальный суперхеджирующий портфель не предполагает заимствований.

4.2. Барьерный опцион – это комбинация бинарного и стандартного европейского опциона, состоящая в следующем: если произошло событие, определенное условиями контракта, то в момент времени N покупатель получит выплату, равную выплате по стандартному опциону.

Рассмотрим случай, когда $f_n = (S_n - \lambda^k)^+$ соответствует стандартному опциону колл, а $\tau = (N+1) \wedge \min(n \geq 0 : S_n \geq \lambda^m)$, где константы k и m удовлетворяют неравенству $0 < k < m$. Пару (τ, f_τ) называют *барьерным опционом колл Up&In* (Hull, 2009).

Обозначим

$$V_n^b = \inf_{\gamma_{n+1}^{N+1} \in D_{n+1}^{N+1}} \sup_{Q \in R} E^Q \left(1_{\{\tau=n\}} (S_n - \lambda^k)^+ + 1_{\{\tau>n\}} \exp \left\{ X_n - (X_\tau - 1_{\{\tau \leq N\}}) (S_N - \lambda^k)^+ \right\} \middle| F_n \right).$$

Теорема 6. Пусть (τ, f_τ) – барьерный опцион колл Up&In. Тогда $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$:

$$\begin{aligned} \ln V_n^b = & 1_{\{S_n \geq \lambda^m\}} \left\{ S_n \text{Bi} \left(N - n, A(-k), \frac{1}{1+\lambda} \right) - \lambda^k \text{Bi} \left(N - n, A(-k), \frac{1}{1+\lambda} \right) \right\} + \\ & + 1_{\{S_n < \lambda^m\}} \left\{ S_n \text{Bi} \left(N - n, A(-m), \frac{1}{1+\lambda} \right) - \lambda^k \text{Bi} \left(N - n, A(-m), \frac{1}{1+\lambda} \right) - \right. \\ & \left. - \lambda^m \left[\text{Bi} \left(N - n, a(2m-k), \frac{1}{1+\lambda} \right) - \text{Bi} \left(N - n, a(m), \frac{1}{1+\lambda} \right) \right] - \right. \\ & \left. - S_n \lambda^{k-m} \left[\text{Bi} \left(N - n, a(2m-k), \frac{1}{1+\lambda} \right) - \text{Bi} \left(N - n, a(m), \lambda / (1+\lambda) \right) \right] \right\}, \\ \ln V_N^b = & 1_{\{S_N \geq \lambda^m\}} (S_N - \lambda^k)^+, \quad \ln V_{N+1}^b = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Замечание 9. Легко показать, что, как и в случае бинарного опциона, в данном случае минимальный совершенный суперхеджирующий портфель не предполагает заимствований.

Замечание 10. Из утверждения теоремы 6 следует, что формула для капитала суперхеджирующего портфеля барьерного опциона колл Up&In, приведенная в (Фельмер, Шид, 2008) для случая полного рынка, оказывается справедливой и для рассматриваемого неполного $\{1, S\}$ -рынка.

⁷ Формула (11) для бинарного опциона получена впервые.

Замечание 11. Дальнейшие перспективы исследований могут быть связаны с рассмотрением более общей модели неполного рынка, а также с включением в модель транзакционных издержек.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теорем 1–5. Для этого нам потребуются вспомогательные утверждения. В силу телескопического свойства условного математического ожидания для любого $n \in \{0, \dots, N\}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} I_n^{\gamma, Q}(S_1^n) &= 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} E^Q(\exp\{X_n - (X_\tau - f_\tau)\} | F_n) = \\ &= 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} E^Q(E^Q(\exp\{X_{n+1} - \Delta X_{n+1} - (X_\tau - f_\tau)\} | F_{n+1}) | F_n) = \\ &= 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} E^Q(\exp\{-\gamma_{n+1} \Delta S_{n+1}\} I_{n+1}^{\gamma, Q}(S_1^{n+1}) | F_n). \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначим через $\hat{I}_n^\gamma(S_1^n) = \sup_{Q \in R} I_n^{\gamma, Q}(S_1^n)$. Напомним, что $\Theta = \{q = (q_1, q_2, q_3) : q_1, q_2, q_3 \geq 0, q_1 + q_2 + q_3 = 1\}$.

Лемма 1. Для любого $\gamma_1^N \in D_1^N$ случайная последовательность $\{\hat{I}_n^\gamma(S_1^n)\}_{0 \leq n \leq N}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} \hat{I}_n^\gamma(S_1^n) &= 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \max_{q \in \Theta} \left\{ q_1 \exp\{\gamma_{n+1} S_n(\lambda - 1) / \lambda\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^n, S_n / \lambda) + \right. \\ &\quad \left. + q_2 \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^n, S_n) + q_3 \exp\{-\gamma_{n+1} S_n(\lambda - 1)\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^n, \lambda S_n) \right\}, \\ \hat{I}_N &= 1_{\{\tau=N\}} \exp\{f_N\} + 1_{\{\tau>N\}}, \quad \hat{I}_{N+1} = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Сначала докажем, что для любых $\gamma_1^N \in D_1^N$ и $n \in \{0, \dots, N\}$ справедливо неравенство

$$\hat{I}_n^\gamma(S_1^n) \geq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \sup_{Q \in R} E^Q \left(\exp\{-\gamma_{n+1} \Delta S_{n+1}\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^{n+1}) \middle| F_n \right). \quad (15)$$

В силу независимости в совокупности дискретных случайных величин $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \hat{I}_n^\gamma(S_1^n) &= 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \sup_{q \in \Theta} \left(q_1 \exp\{\gamma_{n+1} S_n(\lambda - 1) / \lambda\} \sup_{Q \in R} I_{n+1}^{\gamma, Q}(S_1^n, S_n \lambda^{-1}) + \right. \\ &\quad \left. + q_2 \sup_{Q \in R} I_{n+1}^{\gamma, Q}(S_1^n, S_n) + q_3 \exp\{-\gamma_{n+1} S_n(\lambda - 1)\} \sup_{Q \in R} I_{n+1}^{\gamma, Q}(S_1^n, S_n \lambda) \right) \geq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} (q_1 \times \\ &\quad \times \exp\{\gamma_{n+1} S_n(\lambda - 1) / \lambda\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^n, S_n \lambda^{-1}) + q_2 \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^n, S_n) + q_3 \exp\{-\gamma_{n+1} S_n(\lambda - 1)\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^n, S_n \lambda)) = \\ &= 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} E^Q \left(\exp\{-\gamma_{n+1} \Delta S_{n+1}\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^{n+1}) \middle| F_n \right). \end{aligned}$$

Левая часть последнего неравенства не зависит от меры Q , поэтому его можно переписать в виде (15). Однако для любых $\gamma_1^N \in D_1^N$ и $n \in \{0, \dots, N\}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} I_n^{\gamma, Q}(S_1^n) &\leq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} E^Q \left(\exp\{-\gamma_{n+1} \Delta S_{n+1}\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^{n+1}) \middle| F_n \right) \leq \\ &\leq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \sup_{Q \in R} E^Q \left(\exp\{-\gamma_{n+1} \Delta S_{n+1}\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^{n+1}) \middle| F_n \right). \end{aligned}$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от меры Q , поэтому оно справедливо и для $\hat{I}_n^\gamma(S_1^n)$. Из (15) и последнего неравенства для любых $\gamma_1^N \in D_1^N$ и $n \in \{0, \dots, N\}$ следует, что

$$\hat{I}_n^\gamma(S_1^n) = 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \sup_{Q \in R} E^Q \left[\exp\{-\gamma_{n+1} \Delta S_{n+1}\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^{n+1}) \middle| F_n \right]. \quad (16)$$

С учетом (1) формулу (16) можно переписать в виде (14). Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала, что для любого $n \in \{0, \dots, N\}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} V_n(S_1^n) &\geq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \inf_{\gamma_{n+1} \in D_{n+1}^N} \max_{q \in \Theta} \left\{ q_1 V_{n+1}(S_1^n, S_n \lambda^{-1}) \exp\left\{ \frac{\gamma_{n+1} S_n (\lambda - 1)}{\lambda} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + q_2 V_{n+1}(S_1^n, S_n) + q_3 V_{n+1}(S_1^n, S_n \lambda) \exp\{-\gamma_{n+1} S_n (\lambda - 1)\} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Очевидно, что для любых $\gamma \in D_{n+2}^N$ и $S_{n+1} : \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^{n+1}) \geq \inf_{\gamma_{n+2} \in D_{n+2}^N} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^{n+1}) = V_{n+1}(S_1^{n+1})$, поэтому из (14) следует неравенство:

$$\begin{aligned} \hat{I}_n^\gamma(S_1^n) &\geq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \inf_{\gamma_{n+1} \in D_{n+1}^N} \max_{q \in \Theta} \left\{ q_1 \exp\{\gamma_{n+1} S_n (\lambda - 1) / \lambda\} V_{n+1}(S_1^n, S_n / \lambda) + \right. \\ &\quad \left. + q_2 V_{n+1}(S_1^n, S_n) + q_3 \exp\{-\gamma_{n+1} S_n (\lambda - 1)\} V_{n+1}(S_1^n, \lambda S_n) \right\}. \end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства не зависит от γ_{n+1}^N , поэтому, взяв от обеих его частей нижнюю грань по $\gamma_{n+1}^N \in D_{n+1}^N$, получим (17).

Докажем, что для любого $n \in \{0, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} V_n(S_1^n) &\leq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \inf_{\gamma_{n+1} \in D_{n+1}^N} \max_{q \in \Theta} \left\{ q_1 V_{n+1}(S_1^n, S_n \lambda^{-1}) \exp\{\gamma_{n+1} S_n (\lambda - 1) / \lambda\} + \right. \\ &\quad \left. + q_2 V_{n+1}(S_1^n, S_n) + q_3 V_{n+1}(S_1^n, S_n \lambda) \exp\{-\gamma_{n+1} S_n (\lambda - 1)\} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из определения нижней грани, случайной величины $V_n(S_1^n)$ и (14) для любого $\gamma = (\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}^N) \in D_{n+1}^N$ имеем

$$\begin{aligned} V_n(S_1^n) &\leq \hat{I}_n^\gamma(S_1^n) = 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \max_{q \in \Theta} \left\{ q_1 \exp\left\{ \gamma_{n+1} S_n \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\} \hat{I}_{n+1}^\gamma\left(S_1^n, \frac{S_n}{\lambda}\right) + \right. \\ &\quad \left. + q_2 \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^n, S_n) + q_3 \exp\{-\gamma_{n+1} S_n (\lambda - 1)\} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^n, \lambda S_n) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу определения нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует $\gamma_{n+2}^N(\varepsilon) \in D_{n+2}^N$ такое, что для любого S_1^n имеет место равенство

$$V_{n+1}(S_1^{n+1}) = \inf_{\gamma_{n+2} \in D_{n+2}^N} \hat{I}_{n+1}^\gamma(S_1^{n+1}) \geq \hat{I}_{n+1}^{\gamma(\varepsilon)}(S_1^{n+1}) - \varepsilon,$$

где $\gamma(\varepsilon) = \gamma_{n+2}^N(\varepsilon)$. Поскольку формула (19) справедлива для любых $\gamma_{n+2}^N \in D_{n+2}^N$, она справедлива и для $\gamma_{n+2}^N(\varepsilon) \in D_{n+2}^N$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} V_n(S_1^n) &\leq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \max_{q \in \Theta} \left\{ q_1 \exp\left\{ \gamma_{n+1} S_n \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\} \hat{I}_{n+1}^{\gamma(\varepsilon)}\left(S_1^n, \frac{S_n}{\lambda}\right) + \right. \\ &\quad \left. + q_2 \hat{I}_{n+1}^{\gamma(\varepsilon)}(S_1^n, S_n) + q_3 \exp\{-\gamma_{n+1} S_n (\lambda - 1)\} \hat{I}_{n+1}^{\gamma(\varepsilon)}(S_1^n, \lambda S_n) \right\} \leq \\ &\leq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \left(\max_{q \in \Theta} \left\{ q_1 \exp\left\{ \gamma_{n+1} S_n \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right\} V_{n+1}\left(S_1^n, \frac{S_n}{\lambda}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q_2 V_{n+1}(S_1^n, S_n) + q_3 \exp\{-\gamma_{n+1} S_n (\lambda - 1)\} V_{n+1}(S_1^n, \lambda S_n) \right\} + \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$, поэтому верно неравенство

$$V_n(S_1^n) \leq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \max_{q \in \Theta} \left\{ q_1 \exp\left\{ \gamma_{n+1} S_n \frac{\lambda-1}{\lambda} \right\} V_{n+1}\left(S_1^n, \frac{S_n}{\lambda}\right) + \right. \\ \left. + q_2 V_{n+1}(S_1^n, S_n) + q_3 \exp\{-\gamma_{n+1} S_n (\lambda-1)\} V_{n+1}(S_1^n, \lambda S_n) \right\}.$$

Левая часть этого неравенства не зависит от $\gamma_{n+1} \in D_{n+1}$, поэтому из него следует (18).

Из (14), (17) и (18) следует (4). Теорема доказана.

Замечание 12. Легко показать, что рекуррентное соотношение (4) можно переписать в виде

$$V_n(S_1^n) = 1_{\{\tau=n\}} \exp\{f_n\} + 1_{\{\tau>n\}} \inf_{\gamma_{n+1} \in D_{n+1}} \max \left\{ V_{n+1}(S_1^n, \lambda^{-1} S_n) \times \right. \\ \left. \times \exp\left\{ \frac{\gamma_{n+1} S_n (\lambda-1)}{\lambda} \right\}, V_{n+1}(S_1^n, S_n), V_{n+1}(S_1^n, \lambda S_n) \exp\{-\gamma_{n+1} S_n (\lambda-1)\} \right\}, \quad (20)$$

$$V_N = 1_{\{\tau=N\}} \exp\{f_N\} + 1_{\{\tau>N\}}, \quad V_{N+1} = 1.$$

Замечание 13. Для любого $n \in \{1, \dots, N\}$ величины f_n ограничены, т.е. существует константа $c > 0$: $|f_n| \leq c$. Из рекуррентного соотношения (20) следует, что для любых $n \in \{1, \dots, N\}$ и S_1^{n-1} справедливы неравенства

$$V_{n-1}(S_1^{n-1}) \geq 1_{\{\tau=n\}} \exp\{-c\} + 1_{\{\tau>n\}} V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}) \geq \sum_{i=n}^N 1_{\{\tau=i\}} \exp\{-c\} + 1_{\{\tau>N\}} > 0. \quad (21)$$

Доказательство теоремы 2. По определению (см. формулу (5)) и в силу (20) для любого $n \in \{1, \dots, N\}$ функцию $\Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1})$ можно записать в виде

$$\Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1}) = \max \left\{ V_n(S_1^{n-1}, \lambda^{-1} S_{n-1}) \exp\{\gamma S_{n-1} (\lambda-1) / \lambda\}, \right. \\ \left. V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}), V_n(S_1^{n-1}, \lambda S_{n-1}) \exp\{-\gamma S_{n-1} (\lambda-1)\} \right\}, \quad (22)$$

где $\gamma \in \mathbf{R}^1$. Из последнего равенства видно, что $\Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1})$ — верхняя огибающая набора функций (от γ), стоящих в (22) под знаком максимума. Поскольку каждая из этих трех функций выпукла по γ , то $\Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1})$ также выпукла по γ .

Из определения случайной величины $\Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1})$ и (21) следует, что для любого $\gamma \in \mathbf{R}^1$ верно $\Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1}) \geq V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}) \geq \exp\{-c\} > 0$. Таким образом, для любого $n \in \{1, \dots, N\}$ функция $\Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1})$ — непрерывная, выпуклая, ограниченная снизу по γ . Поскольку $S_{n-1}(\lambda-1)/\lambda > 0$ и $-S_{n-1}(\lambda-1) < 0$, а экспонента — монотонная неубывающая функция, то $\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1}) = \infty$. Следовательно, $\inf_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1})$ конечен и существует $\gamma^* \in \mathbf{R}^1$: $\inf_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1}) = \Phi_{n-1}^{\gamma^*}(S_1^{n-1})$.

Из (22) следует, что возможны две ситуации:

- 1) для любого γ справедливо неравенство $\Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1}) > V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1})$;
- 2) существует γ^* : $\Phi_{n-1}^{\gamma^*}(S_1^{n-1}) = V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1})$.

Рассмотрим случай 1, который означает, что выполняется неравенство

$$\min_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \left\{ V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1} \lambda^{-1}) \exp\{\gamma S_{n-1} (\lambda-1) / \lambda\}; V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1} \lambda) \exp\{-\gamma S_{n-1} (\lambda-1)\} \right\} > V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}).$$

В силу монотонности экспоненты минимум достигается в единственной точке γ^* :

$$V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1} \lambda^{-1}) \exp\{\gamma^* S_{n-1} (\lambda-1) / \lambda\} = V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1} \lambda) \exp\{-\gamma^* S_{n-1} (\lambda-1)\}. \quad (23)$$

В случае 2 $\min_{\gamma \in \mathbf{R}^1} \Phi_{n-1}^\gamma(S_1^{n-1}) = V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1})$. Этот минимум достигается на любом $\gamma \in [\gamma_1^*, \gamma_2^*]$, где γ_1^* и γ_2^* :

$$V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}\lambda^{-1}) \exp\{\gamma_1^* S_{n-1}(\lambda - 1) / \lambda\} = V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}),$$

$$V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}) = V_n(S_1^{n-1}, S_{n-1}\lambda) \exp\{-\gamma_2^* S_{n-1}(\lambda - 1)\}.$$

Отсюда немедленно следуют формулы (6) и (7). При подстановке полученного выражения для γ^* в (20) после преобразований получаем (8). Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 3. Докажем сначала, что существует такая неубывающая согласованная последовательность $\{C_n\}_{0 \leq n \leq N+1}$, что справедливо представление

$$f_\tau = \ln V_0 + \sum_{i=1}^{\tau} \gamma_i^* \Delta S_i - C_\tau \quad (24)$$

Пусть $\{V_n\}_{0 \leq n \leq N+1}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (20) и для любого $n \in \{1, \dots, N\}$ существует $\gamma_n \in D_n$, доставляющее в (20) нижнюю грань. Очевидно, что справедливо неравенство $1_{\{\tau \geq n\}} \ln V_{n-1}(S_1^{n-1}) \geq 1_{\{\tau \geq n\}} (\ln V_n(S_1^n) - \gamma_n^* \Delta S_n)$.

Обозначим $1_{\{\tau \geq n\}} \Delta C_n = 1_{\{\tau \geq n\}} \{\gamma_n^* \Delta S_n - \Delta \ln V_n(S_1^n)\} \geq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $C_0 = 0$. Поскольку $C_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} \Delta C_i$, то справедливо

$$C_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} (\gamma_i^* \Delta S_i - \Delta \ln V_i(S_1^i)) = \sum_{i=1}^{\tau} \gamma_i^* \Delta S_i - (\ln V_\tau(S_1^\tau) - \ln V_0). \quad (25)$$

Отсюда следует, что для любого $n \in \{1, \dots, N+1\}$ случайные величины C_n являются F_n -измеримыми.

Формулу (25) можно записать в виде $\ln V_n = \ln V_0 + \sum_{i=1}^{\tau \wedge n} \gamma_i^* \Delta S_i - C_{\tau \wedge n}$. Из (20) вытекает, что $\ln V_\tau = f_\tau$, а из двух последних равенств получаем (24).

Из (24) следует, что самофинансируемый портфель с потреблением $\{\pi^*, C^*\}$ такой, что:

- а) количество рискового актива в нем определяется оптимальной стратегией покупателя γ_0^{*N} ;
- б) количество безрискового актива вычисляется, исходя из определения самофинансируемого портфеля (2);
- в) потребление находим по формуле (10);

г) для любого $n \in \{1, \dots, N\}$ капитал портфеля $X_n^{\pi^*, C^*} = \ln V_n$

является совершенным суперхеджирующим. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\{\tilde{\pi}, \tilde{C}\}$ – суперхеджирующий портфель, $\{\tilde{\pi}, \tilde{C}\} \neq \{\pi^*, C^*\}$. Тогда справедливы равенства:

$$1_{\{\tau > n\}} f_\tau \leq 1_{\{\tau > n\}} X_\tau^{\tilde{\pi}, \tilde{C}} = 1_{\{\tau > n\}} \left(X_n^{\tilde{\pi}, \tilde{C}} + \sum_{i=n+1}^{\tau} \tilde{\gamma}_i \Delta S_i - (\tilde{C}_\tau - \tilde{C}_n) \right),$$

$$1_{\{\tau > n\}} f_\tau = 1_{\{\tau > n\}} X_\tau^{\pi^*, C^*} = 1_{\{\tau > n\}} \left(X_n^{\pi^*, C^*} + \sum_{i=n+1}^{\tau} \gamma_i^* \Delta S_i - (C_\tau^* - C_n^*) \right).$$

Несложные преобразования разности этих равенств, с учетом того что $X_n^{\pi^*, C^*} = \ln V_n$, $X_\tau^{\pi^*, C^*} = f_\tau$ (см. теорему 3), позволяют получить неравенство

$$1_{\{\tau > n\}} \exp\{X_n^{\pi^*, C^*} - \tilde{X}_n^{\tilde{\pi}, \tilde{C}} - \ln V_n + X_n^{\tilde{\pi}} - (X_\tau^{\tilde{\pi}} - f_\tau)\} \leq 1_{\{\tau > n\}}.$$

Возьмем от обеих частей последнего неравенства условное математическое ожидание относительно σ -алгебры F_n :

$$1_{\{\tau > n\}} \geq 1_{\{\tau > n\}} \exp\{X_n^{\pi^*, C^*} - X_n^{\tilde{\pi}, \tilde{C}}\} E^Q \left(\exp\{X_n^{\tilde{\pi}} - (X_\tau^{\tilde{\pi}} - f_\tau)\} \middle| F_n \right) / V_n,$$

или, что то же, $1_{\{\tau > n\}} \exp\{X_n^{\pi^*, C^*} - X_n^{\tilde{\pi}, \tilde{C}}\} \leq 1_{\{\tau > n\}} V_n / I_n^{\tilde{\gamma}, Q}(S_1^n)$. Левая часть этого неравенства не зависит от меры Q , поэтому верхняя грань по всем $Q \in \mathcal{R}$ дает неравенство

$$1_{\{\tau > n\}} \exp\{X_n^{\pi^*, C^*} - X_n^{\bar{\pi}, \bar{C}}\} \leq 1_{\{\tau > n\}} V_n / \hat{I}_n^{\bar{\pi}}(S_1^n) \leq 1.$$

Следовательно, $1_{\{\tau > n\}} X_n^{\pi^*, C^*} \leq 1_{\{\tau > n\}} X_n^{\bar{\pi}, \bar{C}}$ и $f_\tau = X_\tau^{\pi^*, C^*} \leq X_\tau^{\bar{\pi}, \bar{C}}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5 основывается на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 3. Пусть мера $Q^* \in R$ такова, что для любого $n \in \{1, \dots, N\}$ вероятности $Q^*(\varepsilon_n = -1) = \lambda / (1 + \lambda)$, $Q^*(\varepsilon_n = 0) = 0$ и $Q^*(\varepsilon_n = 1) = 1 / (1 + \lambda)$. Тогда для любого $n \in \{1, \dots, N\}$

$$Q^*\left(\max_{n \leq t \leq N} S_t \geq \lambda^m \middle| F_n\right) = 1_{\{S_n \geq \lambda^m\}} + 1_{\{S_n < \lambda^m\}} \{ \text{Bi}(N - n, A(-m), \lambda / (1 + \lambda)) + \\ + S_n \lambda^{-m} \{1 - \text{Bi}(N - n, a(m), \lambda / (1 + \lambda))\} \}. \quad (26)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left\{ \max_{n \leq t \leq N} S_t \geq \lambda^m \right\} = \{S_n \geq \lambda^m\} \cup \left\{ S_n < \lambda^m, \max_{n+1 \leq t \leq N} S_t \geq \lambda^m \right\}. \quad (27)$$

Возьмем условную вероятность от левой и правой частей равенства (27), тогда

$$Q^*\left(\max_{n \leq t \leq N} S_t \geq \lambda^m \middle| F_n\right) = 1_{\{S_n \geq \lambda^m\}} + Q^*\left(S_n < \lambda^m, \max_{n+1 \leq t \leq N} S_t \geq \lambda^m \middle| F_n\right). \quad (28)$$

Обозначим $M_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, $1 \leq n \leq N$. Событие $\{S_n < \lambda^m\} \in F_n$, поэтому на основании свойств условной вероятности (Ширяев, 2004, свойство K*) второе слагаемое в правой части (28) можно записать в виде

$$Q^*\left(S_n < \lambda^m, \max_{n+1 \leq t \leq N} S_t \geq \lambda^m \middle| F_n\right) = 1_{\{S_n < \lambda^m\}} Q^*\left(\max_{0 \leq t \leq N-n-1} M_t \geq m - \log_\lambda S_n \middle| F_n\right). \quad (29)$$

Для условной вероятности, стоящей в правой части (29), справедливо представление

$$Q^*\left(\max_{0 \leq t \leq N-n-1} M_t \geq m - \log_\lambda S_n \middle| F_n\right) = Q^*(M_{N-n-1} \geq m - \log_\lambda S_n \middle| F_n) + \\ + Q^*(M_{N-n-1} < m - \log_\lambda S_n, \max_{0 \leq t \leq N-n-1} M_t \geq m - \log_\lambda S_n \middle| F_n) = \\ = Q^*(M_{N-n-1} \geq m - \log_\lambda S_n \middle| F_n) + S_n \lambda^{-m} Q^*(M_{N-n-1} < -m + \log_\lambda S_n \middle| F_n).$$

Последнее равенство получено из известного принципа отражения (Фельмер, Шид, 2008, с. 273–275). Поскольку для любых $0 \leq h < n$:

$$Q^*\left(\sum_{i=0}^t 1_{\{\varepsilon_i = -1\}} = h, \sum_{i=0}^t 1_{\{\varepsilon_i = 1\}} = t - h\right) = Q^*(M_{t-1} = t - 2h) = C_t^i (\lambda / (1 + \lambda))^h (1 / (1 + \lambda))^{t-h},$$

справедливы равенства

$$Q^*(M_{N-n-1} \geq m - \log_\lambda S_n \middle| F_n) = \sum_{l \geq m - \log_\lambda S_n} Q^*(M_{N-n-1} = l \middle| F_n) = \\ = \sum_{i \leq (-m + \log_\lambda S_n + N - n)/2} Q^*(M_{N-n-1} = N - n - 2i \middle| F_n) = \text{Bi}(N - n, A(-m), \lambda / (1 + \lambda)), \\ Q^*(M_{N-n-1} < -m + \log_\lambda S_n \middle| F_n) = 1 - \text{Bi}(N - n, a(m), \lambda / (1 + \lambda)). \quad (30)$$

Из (28)–(30) следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 5. Будем доказывать (11) методом индукции назад. Очевидно, что для шагов $N+1$ и N утверждение теоремы выполнено. Пусть для любого $n \in \{N-1, \dots, k+1\}$ верно, что

$$\ln V_n^b(S_1, \dots, S_n) = 1_{\{\tau = n\}} f_n + 1_{\{\tau > n\}} \left\{ \frac{\lambda}{1 + \lambda} \ln V_{n+1}^b(S_1^n, S_n \lambda^{-1}) + \frac{1}{1 + \lambda} \ln V_{n+1}^b(S_1^n, S_n \lambda) \right\}. \quad (31)$$

Легко показать, что решение (31) представимо в виде $\ln V_n^b = Q^*(\tau = n | F_n)$. Вид такой условной вероятности при заданном τ установлен формулой (26).

В силу теоремы 2 случайная величина $\ln V_k^b(S_1^k)$ удовлетворяет (8). Согласно предположению выражения, стоящие под знаком максимума в (8), определяются формулой (26). Несложные, но громоздкие вычисления позволяют найти разность величин, стоящих под знаком максимума, и получить, что при $S_k < \lambda^m$ выполняется

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} \ln V_{k+1}^b(S_1^k, S_k \lambda^{-1}) + \frac{1}{1+\lambda} \ln V_{k+1}^b(S_1^k, S_k \lambda) - \ln V_{k+1}^b(S_1^k, S_k) \geq 0.$$

Следовательно, $\ln V_k^b(S_1^k)$ также удовлетворяет (31). Отсюда по индукции следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 6 почти дословно повторяет доказательство теоремы 5, поэтому мы его не приводим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Биллингсли П. (1977). Сходимость вероятностных мер. М.: Наука.
- Гущин А. А. (2013). О верхней цене хеджирования неотрицательных платежных обязательств // *Современные проблемы математики и механики*. Т. VIII. Математика. Вып. 3. С. 60–72.
- Демин Н. С., Андреева У. В. (2011). Экзотические опционы купли с ограничением выплат и гарантированным доходом в модели Блэка–Шоулса // *Проблемы управления*. № 1. С. 33–39.
- Петросян Л. А. (1998). Теория игр. М.: Высшая школа.
- Фельмер Г., Шид А. (2008). Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО.
- Хаметов В. М., Шелемех Е. А. (2015). Суперхеджирование американских опционов на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом // *Автоматика и телемеханика*. № 9. С. 125–149.
- Ширияев А. Н. (1998). Основы стохастической финансовой математики (теория). Т. 2. Теория. М.: Фазис.
- Ширияев А. Н. (2004). Вероятность. М.: МЦНМО.
- Acciaio B., Beiglbock M., Penkner F., Schachermayer W. (2016). Model-Free Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing and the Super-Replication Theorem // *Mathematical Finance*. Vol. 26. Issue 2. P. 233–251.
- Beiglbock M., Henry-Labordere P., Penkner F. (2013). Model-Independent Bounds for Option Prices – a Mass Transport Approach // *Finance and Stochastics*. Vol. 17. Issue 3. P. 477–501.
- Carr P., Nadtochiy S. (2011). Static Hedging under Time-Homogeneous Diffusions // *SIAM Journal on Financial Mathematics*. Vol. 2. Issue 1. P. 794–838.
- Fahim A., Huang Y. (2016). Model-Independent Superhedging under Portfolio Constraints // *Finance and Stochastics*. Vol. 20. Issue 1. P. 51–81.
- Hull J. C. (2009). Options, Futures and other Derivatives. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.
- Kudryavtsev O. E., Levendorskii S. Z. (2009). Fast and Accurate Pricing of Barrier Options under Levy Processes // *Finance and Stochastics*. Vol. 13. No. 4. P. 531–562.
- Schachermayer W. (2012). Optimization and Utility Functions // *Documenta Mathematica*. Extra Volume ISMP. P. 455–460.

Поступила в редакцию
14.12.2015 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Acciaio B., Beiglbock M., Penkner F., Schachermayer W. (2016). Model-Free Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing and the Super-Replication Theorem. *Mathematical Finance* 26, 2, 233–251.
- Beiglbock M., Henry-Labordere P., Penkner F. (2013). Model-Independent Bounds for Option Prices – a Mass Transport Approach. *Finance and Stochastics* 17, 3, 477–501.

- Billingsley P.** (1977). Convergence of Probability Measures. Moscow: Nauka (in Russian).
- Carr P., Nadtochiy S.** (2011). Static Hedging under Time-Homogeneous Diffusions. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 2, 1, 794–838.
- Dyomin N. S., Andreeva U. V.** (2011). Exotic Call Options with Limited Payments and Guaranteed Income in Black–Scholes Model. *Control Sciences* 1, 33–39.
- Fahim A., Huang Y.** (2016). Model-Independent Superhedging under Portfolio Constraints. *Finance and Stochastics* 20, 1, 51–81.
- Föllmer H., Schied A.** (2008). Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Moscow: MTsNMO (in Russian).
- Gushchin A. A.** (2013). On the upper Hedging Price for Non-Negative Payoffs. *Contemporary Problems of Mathematics and Mechanics VIII*, Mathematics, 3, 60–72 (in Russian).
- Hull J. C.** (2009). Options, Futures and other Derivatives. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.
- Khametov V. M., Shelemekh E. A.** (2015). Superhedging of American Options on an Incomplete Market with Discrete Time and Finite Horizon. *Automatika i Telemekhanika* 9, 125–149 (in Russian).
- Kudryavtsev O. E., Levendorskii S. Z.** (2009). Fast and Accurate Pricing of Barrier Options under Levy Processes. *Finance and Stochastics*. 13, 4, 531–562.
- Petrosyan L. A.** (1998). Game Theory. Moscow: Vysshaya shkola (in Russian).
- Schachermayer W.** (2012). Optimisation and Utility Functions. *Documenta Mathematica*. Extra Volume ISMP, 455–460.
- Shiryaev A. N.** (1998). Essentials of Stochastic Finance. Vol. 2. Theory. Moscow: Fazis (in Russian).
- Shiryaev A. N.** (2004). Probability. Moscow: MTsNMO (in Russian).

Received 14.12.2015

CALCULATION OF EXOTIC OPTIONS IN INCOMPLETE MARKETS*

E. A. Shelemekhⁱ

Abstract. We consider incomplete market with discrete time and without transaction costs, consisting of a risky and a risk-free assets. Return on risky asset is supposed to take on each step one of three values, so that increase, decrease and constancy of risky asset's price are possible. There is exotic option in the market. In the article exotic option is a contract, for which payoff and moment of execution depend on some event, such as risky asset's price reaches some given value. To calculate such an option in the incomplete market minimax approach was adopted. The approach reflects seller's point of view and implies the following. Seller's risk function is supposed to be exponential and to depend on the option's initial price and on deficit of seller's portfolio at the execution moment. Participants of the market do not know the distribution of risky asset's price. The seller is prudent, i.e. the seller assumes that the distribution is the worst one (it maximizes seller's expected risk) and seeks to minimize expected risk by portfolio management. For this problem we have derived a new recurrent equation describing evolution of minimax value for seller's expected risk. A self-financing portfolio has been found, which minimizes maximum value of seller's expected risk (optimal portfolio). It has been proved that a corresponding portfolio with consumption is a superhedging one with respect to any discrete measure and its capital does not exceed capital of any other superhedging portfolio. Thus it is impossible to improve obtained solution choosing another risk functions. By use of this results formulas for superhedging portfolios of binary and barrier options have been derived.

Keywords: exotic option, incomplete market, minimax approach, superhedging, binary option, barrier option.

JEL Classification: C73.

*The research was supported by the Russian Science Foundation (Project № 16-06-000980 and № 16-06-00229)

ⁱ**Elena A. Shelemekh** — Junior scientific researcher, Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; letis@mail.ru.