ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2017, том 53, № 4, с. 89–104

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МОДЕЛЬ КОЛЛЕКТИВНЫХ ДЕЙСТВИЙ. ЧАСТЬ 2: ЛИДИРУЮЩАЯ КОАЛИЦИЯ

© 2017 г. Е.М. Скаржинская[i], В.И. Цуриков[ii]

Аннотация. Рассматривается группа агентов, способных создавать совокупный доход путем осуществления частных специфических инвестиций (усилий). В качестве величины ожидаемого совокупного дохода используется строго выпуклая вверх функция, возрастающая с ростом величины инвестиций, осуществляемых каждым агентом. Агентам известна зависимость величины ожидаемого дохода от размера инвестиций. Каждый член коллектива преследует только личные эгоистические интересы и стремится максимизировать собственный выигрыш. Предполагается, что внутри коллектива может выделиться некоторая группа агентов (коалиция), пользующаяся в коллективе достаточно высоким уровнем доверия и не имеющая никаких других способов влияния на их поведение. Для максимизации собственного выигрыша и на основе выбранной стратегии инвестирования со стороны своих членов коалиция определяет правило распределения совокупного дохода в коллективе и доводит до всех членов информацию об этом правиле и масштабах инвестирования, осуществляемого членами коалиции. Агенты, не состоящие в коалиции, воспринимают эту информацию как достоверную и примут предложение коалиции только в том случае, если размер ожидаемого индивидуального выигрыша каждого агента будет больше выигрыша при альтернативном варианте, в качестве которого выступает равновесие по Нэшу. В рамках модели найдены условия относительно размера и состава коалиции, при выполнении которых равновесие по Стакельбергу оказывается доминирующим по Парето над равновесием по Нэшу. Установлены связи индивидуальных характеристик членов коалиции и интегральной характеристики всех членов коллектива как с размером и составом коалиции, так и с объемами соответствующих инвестиций и величинами совокупного и индивидуальных выигрышей.

Ключевые слова: коллективные действия, специфические инвестиции, лидирующая коалиция, равновесие по Стакельбергу, координация, распределение дохода.

Классификация JEL: C02, D23.

Ранее, в первой части (Скаржинская, Цуриков, 2017), мы доказали, что участники коллектива, совокупный доход которого определяется выражением

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i,$$

не заинтересованы в осуществлении частных инвестиций в общественно-оптимальных размерах. Если не прибегать к каким бы то ни было предположениям относительно тех или иных способов координации коллективных действий, то единственным достижением независимых агентов является равновесие по Нэшу, в котором и инвестиции агентов, и совокупный доход, и совокупная полезность оказываются ниже значений, отвечающих любому из Парето-эффективных состояний. Координация действий агентов оказывается абсолютно необходимой для получения совокупного выигрыша в объеме, превышающем его значение в равновесном по Нэшу исходе.

В настоящей статье мы продемонстрируем возможности для координации коллективных действий, осуществляемой малой группой (коалицией), выделенной внутри исходной группы агентов. Мы будем опираться на предположение о том, что в коллективе существуют агенты, пользующиеся определенным доверием среди остальных, и что члены этой группы обладают некоторыми способностями к объединению и самоорганизации.

[i] **Елена Матвеевна Скаржинская** – д.э.н., профессор Костромского государственного университета имени Н.А. Некрасова, Кострома; yelena.skarzhinsky@gmail.com.

[ii] **Владимир Иванович Цуриков** – к.ф.-м.н., д.э.н., доцент, профессор Костромской государственной сельскохозяйственной академии, Кострома; tsurikov@inbox.ru.

Цель работы состоит не только в обосновании в рамках модели возможности существования коалиционного решения, но и выявления различных институциональных механизмов, которые может использовать коалиция для повышения собственной полезности, а также условий, при которых эти механизмы не будут отторгаться членами коллектива. Важно подчеркнуть, что все члены коллектива преследуют только личные экономические интересы, причем их поведение отвечает согласно классификации О. Уильямсона полусильной форме эгоизма[1] (Уильямсон, 1996, с. 97–107).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Во второй части статьи мы будем использовать более простую функцию совокупного дохода, чем в первой части, а именно

$$D = \lambda \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^{a_i}\ , \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, $a_i > 0$, причем $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$; σ_i – размер специфических инвестиций (денежный эквивалент усилий) агента i. Считается, что функция дохода (1) известна всем членам коллектива. Данная функция отличается от той, которая использовалась в первой части (Скаржинская, Цуриков, 2017) только отсутствием линейных слагаемых (т.е. $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$) и представляет собой частный случай. Поэтому все результаты, полученные в первой части, оказываются справедливыми и для функции (1). Отказ от линейных членов позволяет, сохранив все основные свойства функций дохода и полезности, заметно упростить многие формулы и сделать значительно более прозрачными получаемые результаты.

Адаптируем к виду функции (1) наиболее важные формулы из первой части. Для величины совокупного выигрыша коллектива, состоящего из нейтральных к риску агентов, можно записать

$$U = D - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \to \max_{\sigma_i > 0}. \tag{2}$$

Функция (2) согласно теореме, доказанной в первой части статьи, строго выпукла вверх и имеет стационарную точку, в которой и достигается глобальный максимум. Решение соответствующих уравнений

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 1\ ,\ i = 1,\ \ldots,\ n \tag{3}$$

отвечает Парето-оптимальному состоянию и имеет вид

$$\sigma_i^* = \lambda^{1/(1-a)} a_i \prod_{j=1}^{n} (a_j)^{a_j/(1-\Sigma a_k)}. \tag{4}$$

Из уравнений (3) с учетом (1) получаем соотношение

$$a_i D^* / \sigma_i^* = 1, \tag{5}$$

где D^* – величина совокупного дохода в точке оптимума (4).

Каждый агент стремится максимизировать свой индивидуальный выигрыш:

$$U_i = \alpha_i D - \sigma_i\ , \tag{6}$$

где α_i – доля агента i в совокупном доходе. Функция (6) имеет единственный максимум при любом наборе $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Соответствующая система уравнений

[1] Имеется в виду, что поведение индивидов обусловлено простым следованием личным интересам без использования крайних форм оппортунизма в виде коварства: присваивания чужой собственности, подачи заведомо ложных сигналов с целью получить преимущество и т.п.

$$\alpha_i \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 1 \tag{7}$$

отвечает равновесному по Нэшу состоянию и имеет решение:

$$\sigma_{iN} = \lambda^{1/(1-a)} a_i \alpha_i \prod_{j=1}^{n} \left(a_j \alpha_j\right)^{a_j/(1-\Sigma a_k)} . \tag{8}$$

Из (7) с учетом (1) получаем

$$\alpha_i a_i D(N) / \sigma_{iN} = 1 , \tag{9}$$

где $D(N)$ – величина совокупного дохода в точке равновесия (8). Из сравнения (4) и (8) понятно, что в равновесном по Нэшу исходе размеры инвестиций ниже оптимальных, и, соответственно, $D(N) < D^*$.

Из (4) и (5) находим выражение для величины оптимального дохода:

$$D^* = \frac{\sigma_i^*}{a_i} = \lambda^{1/(1-a)} \prod_{j=1}^{n} (a_j)^{a_j/(1-a)} , \tag{10}$$

где

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k . \tag{11}$$

Размер оптимального дохода (10) определяется только индивидуальными характеристиками агентов a_j и не зависит от того как в коллективе распределены права на доход. Из (8) и (9) следует

$$D(N) = \frac{\sigma_{iN}}{\alpha_i a_i} = \lambda^{1/(1-a)} \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j a_j)^{a_j/(1-a)} . \tag{12}$$

Из выражения (12) видно, что размер дохода в состоянии равновесия $D(N)$, в отличие от оптимального дохода D^*, не является строго фиксированной для данной группы величиной, а зависит от распределения прав агентов на доход. Нетрудно установить, что величина $D(N)$ достигает условного максимума в пространстве $\alpha_i \in [0;\ 1]$ при условии $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ в точке с координатами

$$\alpha_i = a_i \ / \ a , \quad i = 1,...,n . \tag{13}$$

Отметим, что отношение a_i/a обладает еще одним примечательным свойством. Учитывая (5) и (11), получим

$$\frac{a_i}{a} = \frac{a_i D^*}{D^* \sum_{j=1}^{n} a_j} = \frac{\sigma_i^*}{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^*} . \tag{14}$$

Из (14) следует, что отношение a_i/a представляет долю размера инвестиций агента i в общем объеме оптимального уровня инвестирования. Если бы все инвестиции осуществлялись в оптимальном объеме, то выражением (13) определялось бы справедливое, согласно (14), распределение прав агентов на совокупный доход, при котором доля в доходе равна доле в затратах. По-видимому, именно эта справедливость и позволяет независимым агентам осуществлять инвестирование в объемах, максимизирующих доход $D(N)$, т.е. производить доход, размер которого минимально отличается от оптимального D^*.

В (Скаржинская, Цуриков, 2017) рассматривалась координация инвестиционной деятельности агентов, основанная на доверии агентов друг к другу. Главным недостатком этого подхода является то, что он способен терять свою достоверность по мере роста величины группы. При достаточно большом числе членов коллектива невозможно рассчитывать на безоговорочное доверие каждого агента ко всем остальным, которое необходимо для осуществления инвестиций в оптимальных объемах.

Однако доверие между всеми агентами, которое маловероятно в большой группе, вполне может существовать в малой (Olson, 1965). Поэтому мы вправе предположить, что в коллективе может выделиться малая группа – коалиция С, члены которой, во-первых, доверяют друг другу и, во-вторых, способны убедить остальных агентов в том, что члены коалиции обязательно осуществят инвестиции в заранее объявленном объеме. Добиться этого убеждения коалиция может либо благодаря своему авторитету среди остальных агентов (если, конечно, таковой имеется), либо путем предварительного демонстративного осуществления инвестиций в заявленном объеме, либо же осуществлением таких наблюдаемых действий, которые способны убедить всех агентов в том, что обещанное инвестирование неизбежно.

Главная цель членов коалиции, как и остальных агентов, *максимизация собственной полезности*. Никаких неэкономических рычагов влияния члены коалиции не имеют. Опишем более подробно последовательность действий такой коалиции.

Коалиция начинает свою деятельность с того что определяет стратегию своего поведения. Будем считать, что коалиция C образована первыми m членами коллектива, $1 \le m \le n$. Члены коалиции договариваются между собой об осуществлении своих инвестиций в пропорциональных объемах согласно выражению

$$\sigma_k = t\sigma_k^*, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{15}$$

где $t > 0$. С определением коалиционной стратегии формулой (15) коалиция вычисляет уровень инвестиций со стороны своих членов. Эту задачу коалиция решает в предположении о том что каждый агент, не входящий в коалицию, опираясь на информацию о величине своей доли в совокупном доходе и размере инвестиционного вклада со стороны коалиции *как достоверную*, автономным образом осуществит инвестирование в таком объеме, при котором его индивидуальная полезность достигает максимума.

Затем коалиция, рассматривая совокупный выигрыш своих членов как функцию долей, в соответствии с которыми распределяется совокупный доход всего коллектива, выбирает правило распределения этого дохода (т.е. устанавливает соответствующие доли), при котором выигрыш коалиции достигает максимума. В результате теоретического решения задачи максимизации собственной полезности коалиция C, являясь лидером по Стакельбергу, информирует всех остальных членов коллектива относительно объема собственного (уже состоявшегося или только предстоящего) инвестирования, а также о правиле распределения совокупного дохода, и тем самым запускает процесс осуществления инвестиций со стороны этих агентов.

Если члены коллектива воспринимают эту информацию как достоверную и размер ожидаемого выигрыша каждого из них превосходит величину выигрыша при равновесном по Нэшу исходе, то они отдадут предпочтение условиям, предложенным коалицией (т.е. предпочтут равновесие по Стакельбергу анархии), и осуществят инвестирование в тех размерах, на которые рассчитывает коалиция. В нашей модели предполагается, что члены коллектива обещания коалиции сомнению не подвергают.

Цель построения модели, базирующейся на сформулированных предположениях, состоит, во-первых, в выявлении возможностей коллектива для увеличения размеров совокупной и индивидуальных полезностей по сравнению с достигаемыми в равновесии по Нэшу, во-вторых, в выявлении возможностей коалиции для максимизации собственной полезности, в-третьих, в определении тех условий, при которых данный способ координации проявляет свою эффективность.

ВЛИЯНИЕ КООРДИНАЦИИ НА РАЗМЕРЫ ИНВЕСТИЦИЙ, ДОХОДА И ПОЛЕЗНОСТЕЙ

Первый шаг, который должна сделать коалиция при решении стоящей перед ней задачи максимизации собственной полезности, состоит в определении размеров инвестиций, осуществляемых не состоящими в коалиции агентами. Предполагается, что эти агенты будут осуществлять инвестиции в размерах, при которых их индивидуальные доходы принимают максимальные значения при любых объемах инвестирования со стороны членов коалиции. Так как размеры инвестирования последних определяются, согласно (15), величиной параметра t, то необходимо через него выразить размеры инвестиций и величину совокупного дохода.

Представим совокупный доход (1) в виде произведения

$$D = \lambda \prod_{i=1}^{m} \sigma_i^{a_i} \prod_{i=m+1}^{n} \sigma_i^{a_i}. \tag{16}$$

Введем обозначение: $D_C = \prod_{i=1}^{m} \sigma_i^{a_i}$, где D_C – вклад в доход членов коалиции, величина которого известна всем членам коллектива[2]. Отметим, что в предельном случае при $m = n$ (т.е. если в коалицию входят все члены коллектива) каждый множитель типа $\prod_{i=m+1}^{n} \sigma_i^{a_i}$ следует считать равным единице.

Агенты, не входящие в коалицию, учитывают вклад D_C, рассматривая его как данную фиксированную величину. Соответственно, задача, решаемая каждым агентом, не входящим в коалицию, имеет вид

$$U_i = \alpha_i \lambda D_C \prod_{j=m+1}^{n} \sigma_j^{a_j} - \sigma_i \to \max_{\sigma_i}, \quad i = m+1, ..., n. \tag{17}$$

Согласно теореме из первой части статьи задача имеет единственное решение, соответствующее равновесию по Нэшу в игре $n - m$ независимых агентов, максимизирующих свои функции полезности. Воспользуемся решением системы (17) в виде (9):

$$\sigma_j = \alpha_j a_j D, \ j = m+1, \ ..., \ n. \tag{18}$$

Так как $D = \lambda D_C \prod_{j=m+1}^{n} \sigma_j^{a_j}$, то, подставив сюда выражения для σ_j из (18), получим уравнение относительно D с решением

$$D = \left(\lambda D_C\right)^{1/(1-b)} \prod_{j=m+1}^{n} (\alpha_j a_j)^{a_j/(1-b)}, \tag{19}$$

где $b = \sum_{i=m+1}^{n} a_i$. Теперь с помощью условий (15) выразим D_C через t:

$$D_C = \prod_{i=1}^{m} \left(t\sigma_i^*\right)^{a_i} = \prod_{i=1}^{m} \left(t a_i D^*\right)^{a_i} = t^c \left(D^*\right)^c \prod_{i=1}^{m} (a_i)^{a_i}, \tag{20}$$

где $c = \sum_{i=1}^{m} a_i$. Используя выражения (20) и (10) для преобразования (19), получим величину совокупного дохода как функцию параметра t:

$$D = D^* t^{c/(1-b)} \prod_{j=m+1}^{n} (\alpha_j)^{a_j/(1-b)}. \tag{21}$$

Совокупный выигрыш членов коалиции:

$$U_C = \sum_{i=1}^{m} U_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i D - t\sigma_i^*) = D \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - t \sum_{i=1}^{m} a_i D^* = \alpha D - tcD^*, \tag{22}$$

где $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$ – доля всех членов коалиции в совокупном доходе. Для отыскания выигрыша членов коалиции как функции одной переменной t подставим в (22) выражение для D из (21), тогда

[2] Отметим, что коалиции вполне достаточно информировать всех остальных агентов о величине D_C, а не о значениях инвестиций каждого члена коалиции.

$$U_C = D^* \left(\alpha t^{c/(1-b)} \prod_{j=m+1}^{n} (a_j)^{a_j/(1-b)} - tc \right) \to \max_t . \tag{23}$$

Коалиция осуществляет выбор оптимального уровня инвестиций своих агентов, т.е. решает задачу (23). Совокупный выигрыш коалиции зависит от суммарной доли ее членов и не зависит от доли каждого члена коалиции, т.е. ситуация такова, как будто все члены коалиции выступают в роли единого агента. Из условия максимума первого порядка находим оптимальное для коалиции значение параметра t:

$$t_{max} = \left(\frac{\alpha}{1-b}\right)^{(1-b)/(1-a)} \prod_{j=m+1}^{n} (a_j)^{a_j/(1-a)} . \tag{24}$$

Подставим t_{max} в (15) и, используя (5) и (21), найдем размеры инвестиций членов коалиции и величину совокупного дохода:

$$\sigma_{iS} = t_{max}\sigma_i^* = a_i D^* \left(\frac{\alpha}{1-b}\right)^{(1-b)/(1-a)} \prod_{j=m+1}^{n} (\alpha_j)^{a_j/(1-a)} , \quad i = 1, \ldots, m, \tag{25}$$

$$D(S) = D^* \left(\frac{\alpha}{1-b}\right)^{(a-b)/(1-a)} \prod_{j=m+1}^{n} (\alpha_j)^{a_j/(1-a)} . \tag{26}$$

Для определения выигрыша коалиции $U_C(S)$, достигаемого в равновесном по Стакельбергу исходе, воспользуемся выражениями (22), (24) и (26), тогда

$$U_C(S) = D^*(1-a) \left(\frac{\alpha}{1-b}\right)^{(1-b)/(1-a)} \prod_{j=m+1}^{n} (\alpha_j)^{a_j/(1-a)} . \tag{27}$$

Для иллюстрации полученных результатов применим их для предельных случаев размера коалиции. Для $m = n$ формулы (25)—(27) сильно упрощаются. В этом случае $\alpha = 1$, $b = 0$, заменяем $\prod_{j=m+1}^{n} (\alpha_j)^{a_j/(1-a)}$ на единицу, и соответствующие выражения принимают вид:

$$\sigma_{iS} = a_i D^* = \sigma_i^* , \quad D(S) = D^* , \quad U_C(S) = D^*(1-a) ,$$

т.е. при $m = n$ коллектив достигает оптимума.

Рассмотрим второй предельный случай, в котором коалиция состоит из одного агента ($m = 1$). Присвоим ему номер 1 и будем называть лидером. Проведем сравнение размеров тех инвестиций, которые первый агент осуществляет в роли лидера и в роли независимого агента в равновесном по Нэшу исходе. Предположим для определенности, что доли всех агентов в совокупном доходе определяются соотношениями (13), так как именно при таком распределении совокупного дохода его величина в равновесном по Нэшу исходе максимальна.

Используем выражения (8), (25) и (13) для построения и последующего преобразования отношения σ_{1S}/σ_{1N}:

$$\frac{\sigma_{1S}}{\sigma_{1N}} = a_1 D^* \left(\frac{\alpha_1}{1-a+a_1}\right)^{(1-a+a_1)/(1-a)} \prod_{i=2}^{n} (\alpha_i)^{a_i/(1-a)} \Big/ \left\{ \lambda^{1/(1-a)} a_1 \alpha_1 \prod_{k=1}^{n} (a_k \alpha_k)^{a_k/(1-a)} \right\}.$$

С учетом (10) в результате преобразований получим $\sigma_{1N} / \sigma_{1S} = (1-a+a_1)^{(1-a+a_1)/(1-a)}$. Так как основание степени в полученном выражении $1 - a + a_1 < 1$, а показатель степени положителен, то $\sigma_{1N}/\sigma_{1S} < 1$, откуда следует, что $\sigma_{1S} > \sigma_{1N}$. То есть лидер осуществляет инвестиции в объеме, превышающем равновесный. Как на это отреагируют остальные агенты при условии, что они либо наблюдают такой уровень инвестирования со стороны лидера, либо уверены, что лидер осуществит свои инвестиции именно в таком размере?

Заметим, что в подобном случае каждому агенту невыгодно осуществлять собственные инвестиции в размере σ_{iN} ($i = 2, ..., n$). Дело в том, что инвестиции лидера в результате превышения уровня σ_{1N} повышают величину совокупного дохода и, соответственно, при $\sigma_i = \sigma_{iN}$ для $i = 2, ..., n$ увеличивают размеры индивидуальных предельных доходов остальных агентов относительно их значений в точке равновесия. Это легко увидеть из выражения для величины предельного дохода

$$\alpha_k \frac{\partial D}{\partial \sigma_k} = \alpha_k a_k \frac{D}{\sigma_k},$$

вытекающего из (1).

Поэтому, если в точке равновесия по Нэшу величина совокупного дохода равна $D(N)$, то в условиях коалиции (в данном случае в сольном варианте) величина дохода (при условии, что $\sigma_i = \sigma_{iN}$ для $i = 2,...,n$) становится выше:

$$D = \lambda \sigma_{1S}^{a_1} \prod_{i=2}^{n} \sigma_{iN}^{a_i} > \lambda \sigma_{1N}^{a_1} \prod_{i=2}^{n} \sigma_{iN}^{a_i} = D(N).$$

Соответственно, величина индивидуального предельного дохода каждого агента i, $i \geq 2$, как видно из формул (7) и (9), в условиях $D > D(N)$, а $\sigma_i = \sigma_{iN}$ для $i \geq 2$, превышает единицу (т.е. величину предельных издержек). А так как предельный доход падает с ростом инвестиций, то максимум индивидуальной полезности каждого агента смещается вправо (перемещается в направлении возрастания уровней инвестиций), вплоть до выполнения условий (18). При этом индивидуальный выигрыш каждого агента увеличивается.

Очевидно, что с ростом размера коалиции ее эффективность проявляется сильнее. Появление, например, второго агента в коалиции приведет к тому, что описанный процесс повторится, что еще сильнее увеличит и сместит вправо максимумы и совокупного, и индивидуальных выигрышей агентов, не состоящих в коалиции. Как видим, следование исключительно своекорыстным интересам агентов позволяет им увеличивать свои инвестиции в интересах всего коллектива.

ВЫБОР ПРАВИЛА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДА

Совокупная полезность коалиции (27) зависит от долей, в которых распределяется совокупный доход коалиции в целом, и тех агентов, которые не входят в коалицию. В предыдущем разделе мы предполагали, что коалиция может устанавливать доли не входящих в коалицию агентов по своему усмотрению с целью максимизации своей совокупной полезности, определяемой выражением (27). Поэтому имеет смысл максимизировать функцию $U_C(S)$ по величинам α_j с $j = m+1, ..., n$, т.е. по долям агентов, не входящих в коалицию, при условии, что полная доля членов коалиции равна фиксированному значению α и, соответственно, доля, приходящаяся на всех остальных агентов $1-\alpha$, сохраняется. Эта задача имеет смысл только в случае $m < n$.

Решение задачи на условный максимум функции $\prod_{j=m+1}^{n} (\alpha_j)^{a_j/(1-a)}$ по α_j с $j = m+1, ..., n$ при условии неизменности суммы долей $\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j = 1-\alpha$ дает следующие координаты точки условного максимума совокупной полезности коалиции (27):

$$\alpha_j = a_j (1-\alpha)/b, \quad j = m+1, ..., n, \quad m < n. \tag{28}$$

После подстановки (28) в уравнение (27) получим совокупную полезность коалиции как функцию $\alpha \in [0;1]$:

$$U_C(S) = D^*(1-a)\left(\frac{1-\alpha}{b}\right)^{b/(1-a)} \left(\frac{\alpha}{1-b}\right)^{(1-b)/(1-a)} \prod_{j=m+1}^{n} (a_j)^{a_j/(1-a)}. \tag{29}$$

В дальнейшем для краткости используем обозначения:

$$P_C = \prod_{j=1}^{m} (a_j)^{a_j/(1-a)}, \quad P = \prod_{j=m+1}^{n} (a_j)^{a_j/(1-a)}. \tag{30}$$

В силу того что все $a_j < 1$, а показатели степени $a_j/(1-a) > 0$, каждый сомножитель, входящий в (30), меньше единицы и, соответственно, величина P_C уменьшается, а величина P увеличивается с ростом числа членов коалиции.

Как следует из (29), коалиция имеет еще одну возможность для увеличения своего выигрыша. Эта возможность состоит в выборе своей доли α в совокупном доходе. Конечно, если коалиция вздумает назначить свою долю совершенно произвольно, не считаясь с интересами остальных агентов, она рискует столкнуться с несогласием этих агентов. Поэтому ниже мы определим условия, при которых выбор коалицией своей доли $\alpha \in [0;\ 1]$ в целях максимизации функции своего выигрыша (29) по α не приводит к снижению выигрышей остальных агентов относительно тех выигрышей, которые они получают при равновесном по Нэшу исходе.

Коалиция выбирает α из условия максимума (см. (29)) функции $\phi(\alpha) = \left(\alpha^{1-b}(1-\alpha)^b\right)^{1/(1-a)}$, который, как легко убедиться, достигается при значении

$$\alpha = 1 - b. \tag{31}$$

С учетом (31) из уравнений (28) получаем значения долей всех членов коллектива, не входящих в коалицию:

$$\alpha_j = a_j \text{ при } j = m+1, \ldots, n. \tag{32}$$

Отметим, что эти доли ниже справедливых (13). И причина не в том, что эффективность в данном случае не согласуется со справедливостью. Причина состоит в том, что при таком правиле распределения дохода максимального значения достигает не величина совокупного выигрыша всего коллектива, а величина *совокупного выигрыша коалиции.*

После подстановки этих значений и значения $\alpha = 1 - b$ в уравнения (25), (27) и (29) находим такие размеры инвестиций членов коалиции, при которых совокупная полезность коалиции достигает максимума по t, α и α_j:

$$\sigma_{iS}^* = a_i D^* P, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{33}$$

С использованием (31) находим из (26) максимальное значение совокупного дохода $D^*(S)$, а из (29) – максимальную величину коалиционного выигрыша $U_C^*(S)$:

$$D^*(S) = D^* P, \tag{34}$$

$$U_C^*(S) = (1-a) D^* P. \tag{35}$$

Расчет размера инвестиций агентов, не входящих в коалицию, производится по формуле

$$\sigma_{jS}^* = \alpha_j a_j D = a_j^2 D = a_j^2 D^* P, \quad j = m+1, \ldots, n, \tag{36}$$

а совокупный выигрыш всего коллектива –

$$U^*(S) = D^*(S) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_{iS}^* - \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_{jS}^* = D^* P \left(1 - \sum_{i=1}^{m} a_j - \sum_{j=m+1}^{n} a_j^2\right). \tag{37}$$

Как следует из (33)—(37), наличие в них множителя P приводит к тому, что *с ростом числа членов коалиции возрастают размеры инвестиций каждого агента, а также величина и совокупного дохода, и совокупного выигрыша.*

РЕЗУЛЬТАТЫ КОАЛИЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ

Эффективность координации, которую осуществляют в коллективе члены коалиции, можно оценить сравнением значений совокупной полезности, инвестиций агентов и совокупного дохода, определяемых выражениями (37), (33), (36) и (34) с соответствующими значениями в точке общественного оптимума и в точке равновесия по Нэшу. Сначала проведем сравнение со значениями, отвечающими общественному оптимуму. Для расчета размеров инвестиций получим:

$$\sigma^*_{iS} / \sigma^*_i = P , \quad i = 1, \ldots, m , \tag{38}$$

$$\sigma^*_{jS} / \sigma^*_j = a_j P , \quad j = m+1, \ldots, n, \tag{39}$$

т.е. в этой ситуации члены коалиции инвестируют меньше, чем в точке общественного оптимума, а инвестиции членов коллектива, не входящих в коалицию, еще больше отличаются от их общественно-оптимальных значений.

Для отношения значений совокупного дохода в равновесном исходе по Стакельбергу и в точке общественного оптимума имеем

$$\frac{D^*(S)}{D^*} = P \le 1 , \tag{40}$$

причем равенство справедливо только для случая $m = n$, т.е. когда в коалицию входят все члены коллектива.

Итак, мы еще раз убеждаемся в том, что образование внутри коллектива коалиции, выбирающей стратегию (15), приводит к росту размеров инвестиций его членов, совокупного дохода и совокупной полезности до общественно-оптимальных значений только в том случае, когда в коалицию включены все члены коллектива. Наличие коалиции меньших размеров также способно, хотя и не в такой степени, благотворно отразиться на размерах этих величин. Оценку экономического эффекта, к которому приводит образование коалиции с числом участников $m < n$, мы получим в результате сравнения значений ряда величин, отвечающих равновесным по Стакельбергу и Нэшу исходам. В силу того что в равновесии Нэша такие величины, как инвестиции, доход, полезность, зависят от способа раздела совокупного дохода, в качестве status quo выберем равновесие Нэша со справедливым распределением (13), при котором значение совокупного дохода достигает максимума.

Величина совокупного дохода в равновесии Нэша, принимающая, согласно (10) и (12), вид $D(N) = D^* \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i)^{a_i/(1-a)}$, при справедливом распределении (13) достигает своего наибольшего значения

$$D^*(N) = (a)^{-a/(1-a)}\, P P_C D^* . \tag{41}$$

Тогда отношение доходов примет вид

$$\frac{D^*(S)}{D^*(N)} = \frac{a^{a/(1-a)}}{P_C} .$$

Величина совокупной полезности коллектива в равновесии Нэша при справедливом распределении дохода (13) с учетом (18) равна

$$U(N) = D^*(N) - \sum_{i=1}^{n} \sigma_{iN} = D^*(N)\left(1 - \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right). \tag{42}$$

Из уравнений (42) и (37) получаем отношение значений совокупной полезности в исходах, равновесных по Стакельбергу и по Нэшу:

$$\frac{U^*(S)}{U(N)} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_j^2}{a - \sum_{i=1}^{n} a_i^2} \times \frac{a^{1/(1-a)}}{P_C}. \tag{43}$$

Значения инвестиций агентов в равновесии Нэша при справедливом распределении дохода находятся из формул

$$\sigma_{iN} = \alpha_i a_i D^*(N) = a_i^2 D^*(N)/a, \quad i = 1,...,n. \tag{44}$$

Размеры инвестиций в условиях коалиции определяются выражениями (33) для членов коалиции и выражениями (36) для агентов, не вошедших в коалицию. Отсюда имеем отношения размеров инвестиций агентов в равновесии по Стакельбергу и в равновесии по Нэшу:

$$\sigma_{iS}^* / \sigma_{iN} = a^{1/(1-a)} / a_i P_C, \quad i = 1, ..., m, \tag{45}$$

$$\sigma_{jS}^* / \sigma_{jN} = a^{1/(1-a)} / P_C, \quad j = m+1, ..., n. \tag{46}$$

Так как $a^{1/(1-a)}/P_C = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \Big/ \prod_{j=1}^{m} (a_j)^{a_j} \right)^{1/(1-a)}$, то, согласно (46), неравенство $\sigma_{jS}^* > \sigma_{jN}$ справедливо не всегда, а только при выполнении условия $\sum_{i=1}^{n} a_i > \prod_{j=1}^{m} (a_j)^{a_j}$, к которому мы еще вернемся в следующем разделе.

УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОАЛИЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ

Согласно уравнениям, так или иначе характеризующим коллективные действия, коалиция проявляется в них как единый агент с долей в совокупном доходе α, который равен сумме всех долей членов коалиции. Теперь нам потребуется знание долей каждого члена коалиции. Выберем справедливое распределение, т.е. доля в доходе будет пропорциональна доле в совокупном объеме инвестирования.

Так как, согласно выбранной стратегии (15), реальные размеры инвестиций членов коалиции пропорциональны их оптимальным размерам, а те, в свою очередь, пропорциональны, согласно (10), показателям a_i, то справедливая доля в доходе пропорциональна a_i. Соответственно, справедливые доли членов коалиции определяются выражениями

$$\alpha_i = a_i(1-b)/(a-b), \quad i = 1, ..., m. \tag{47}$$

Нетрудно убедиться в том, что при $m < n$ доли членов коалиции (47) выше долей a_i/a, которые они имели бы при справедливом распределении совокупного дохода *среди всех членов коллектива*[3]. Соответственно, из сравнения выражений (45) и (46) следует, что члены коалиции склонны инвестировать больше.

Из выражений (38)—(40) видно, что расширение коалиции за счет дополнительного вовлечения в нее членов коллектива оборачивается ростом коэффициента $P = \prod_{j=m+1}^{n} (a_j)^{a_j/(1-a)}$. Это влечет за собой рост размеров инвестиций, причем как у членов коалиции, так и у не состоящих в ней агентов, а также величины совокупного дохода и совокупного выигрыша (37) вплоть до их оптимальных размеров, достигаемых при $m = n$. Однако, как будет показано ниже, при увеличении размера коалиции среди ее членов могут возникнуть стимулы для выхода из нее.

---

[3] В общем случае внутри коалиции может выделиться другая коалиция, члены которой могут претендовать на доли, превышающие те, которые определяются справедливым для первой коалиции правилом (46).

Члены кооператива могут создавать коалиции по различным мотивам и преследовать цели разнообразной природы, однако в рамках данной модели мы принимаем в расчет только экономические цели и не предполагаем иной мотивации, нежели эгоистическая. Поэтому стимулом сохранения участия в коалиции для каждого ее члена является повышение (или хотя бы не понижение) его индивидуальной полезности по сравнению с ее альтернативными значениями. Альтернативными полезностями, во-первых, является полезность агента, которую он получил бы вне коалиции (при условии, что она существует), во-вторых, полезность, которую он получил бы в условиях отсутствия коалиции, когда инвестиции агентов не согласованы, т.е. в условиях равновесия Нэша. Таким образом, необходимыми условиями для сохранения коалиции является условие совместимости со стимулами для ее членов:

$$U_{i\in C} \geq U_{i\notin C}\,, \tag{48}$$

$$U_{i\in C} \geq U_i(N)\,, \tag{49}$$

где $U_{i\in C}$ – полезность агента i при его членстве в коалиции C; $U_{i\notin C}$ – его полезность при условии, что он не входит в коалицию C.

Если условия совместимости со стимулами выполняются для членов коалиции, но при этом полезности агентов, не входящих в коалицию, ниже полезностей, достигаемых в равновесии Нэша, то совокупная полезность в равновесии по Стакельбергу может быть ниже, чем в равновесии по Нэшу. Причем, даже если совокупная полезность окажется большей или равной значению в равновесии Нэша, агенты, не входящие в коалицию, могут не согласиться с распределением дохода по формулам (15), в котором их доли уменьшаются в пользу членов коалиции по сравнению со справедливым распределением по формулам (23).

Другими словами, выбор коалицией правила распределения дохода может встретить противодействие со стороны агентов, не входящих в коалицию, если результатом решения будет ожидаемое снижение их индивидуальных полезностей относительно тех, которые ожидаются в равновесии по Нэшу. Наша модель не включает предположения о наличии у коалиции переговорных возможностей, принуждающих других агентов действовать в ущерб своим индивидуальным интересам, поэтому необходимым условием реализации коалиционной стратегии является условие совместимости со стимулами для агентов, не вошедших в коалицию:

$$U_{i\notin C} \geq U_i(N)\,. \tag{50}$$

Очевидно, что выполнение неравенств (48) и (50) служит достаточным условием осуществления коалиционной стратегии, которая увеличивает или не снижает полезности каждого члена коллектива, и, следовательно, соответствующее решение игры доминирует по Парето над решением Нэша. Неравенство (49) вытекает из неравенств (48) и (50), поэтому условия совместимости со стимулами для всех членов кооперации, необходимые для осуществления коалиционной стратегии и достаточные для ее доминирования по Парето над решением Нэша, представляют систему неравенств (48) и (50).

Для отыскания условий, при которых выполняются неравенства (48) и (50), найдем величины индивидуальных полезностей всех членов коллектива; для отыскания полезностей членов коалиции воспользуемся выражениями (33), (34), (47); полезностей агентов, не являющихся членами коалиции,– выражениями (32), (34), (36); полезностей всех агентов в равновесном по Нэшу исходе – выражением (44). Получим:

$$U_{i\in C} = \alpha_i D^*(S) - \sigma^*_{iS} = a_i \frac{1-b}{a-b} D^*(S) - a_i D^*(S) = a_i \frac{1-a}{c} D^*(S)\,, \tag{51}$$

$$U_{i\notin C} = \alpha_i D^*(S) - \sigma^*_{iS} = a_i D^*(S) - a_i^2 D^*(S) = a_i(1-a_i) D^*(S)\,, \tag{52}$$

$$U_i(N) = \alpha_i D^*(N) - \sigma_{iN} = \alpha_i (1-a_i) D^*(N) = \frac{a_i}{a}(1-a_i) D^*(N)\,. \tag{53}$$

Неравенство (48) в результате подстановки в него выражений из (51)—(52) и небольших преобразований примет вид

$$a_j \geq 1 - \frac{1-a}{c} \quad \forall j \in C\,, \tag{54}$$

неравенство (50) с использованием (52) и (53) преобразуется к виду $D^*(S) \geq D^*(N)/a$, а с учетом (34) и (41), к виду

$$\prod_{j=1}^{m} (a_j)^{a_j} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i\,. \tag{55}$$

Итак, условия совместимости со стимулами, обеспечивающими заинтересованность (или нейтральность) агентов к действиям коалиции и отсутствие стимула к выходу из коалиции, представлены системой неравенств (54)—(55). Эти условия предъявляют определенные требования к индивидуальным характеристикам членов коалиции, которым может удовлетворять не каждый член коллектива.

Для того чтобы придать критериям (54) и (55) больше наглядности, применим их к случаю, в котором все агенты, входящие в коалицию, характеризуются одинаковыми показателями: $a_j = a_1$ при $j = 1, \ldots, m.$ Тогда неравенство (54) преобразуется в $a_1 \geq 1 - (1-a)/ma_1$, из которого получаем

$$m \leq (1-a) \,/\, [a_1(1-a_1)]\,. \tag{56}$$

Это ограничение сверху обусловлено тем, что с ростом m размеры инвестиций, осуществляемых членами коалиции, растут, а значения предельного дохода падают вместе с падением доли $\alpha_i = a_1 + (1-a)/m$ в доходе каждого члена коалиции. Поэтому с ростом m при выполнении неравенства (56) величина выигрыша члена коалиции растет все медленнее, приближаясь к размеру выигрыша агента, не входящего в коалицию, а затем с нарушением условия (56) начинает ему уступать.

Неравенство (55) при условии $a_j = a_1$ с $j = 1, \ldots, m$ равносильно неравенству $a_1^{ma_1} \leq a$, которому можно придать вид

$$m \geq \frac{\ln a}{a_1 \ln a_1}\,. \tag{57}$$

Ограничение снизу обусловлено тем, что со снижением m доля в доходе $\alpha_i = a_1 + (1-a)/m$ каждого члена коалиции растет, а размеры осуществляемых ими инвестиций и величина совокупного дохода падают при сохранении долей агентов, не входящих в коалицию, на уровне ниже справедливых. Поэтому при достаточно малых значениях m, определяемых неравенством (57), выигрыш агента, не входящего в коалицию, может стать ниже того, который данный агент получил бы при равновесном по Нэшу исходе и справедливом разделе дохода.

Условия (48) и (50) при равных у членов коалиции показателях эквивалентны двойному неравенству, представляющему собой ограничения, накладываемые на численность коалиции, согласно (56) и (57), сверху и снизу:

$$\frac{\ln a}{a_1 \ln a_1} \leq m \leq \frac{1-a}{a_1(1-a_1)} \text{ при } a_j = a_1, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{58}$$

Рассмотрим другой частный случай. Зададимся вопросом, каким требованиям должен удовлетворять тот агент, который мог бы единолично составить коалицию. Для того чтобы коалиция состояла из одного агента, необходимо, чтобы среди членов коллектива нашелся хотя бы один, показатель которого a_1 удовлетворяет неравенствам (54) и (55), принимающим при $m = 1$ вид

$$(a_1)^{a_1} \leq a \leq 1 - a_1 + a_1^2\,, \tag{59}$$

т.е. не каждый член данной группы может быть ее успешным лидером.

В силу того что наименьшее значение функции x^x равно $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$, в случае коалиции из одного агента для выполнения неравенства (59) необходимо, чтобы сумма показателей всех членов коллектива была достаточно большой относительно a_1 и удовлетворяла условию $a \geq e^{-1/e}$. Это ограничение обусловлено тем, что с уменьшением $a - a_1$ растет, согласно (47), доля лидера $\alpha_1 = 1 - a + a_1$. А так как $a - a_1$ представляет собой совокупную долю всех остальных агентов, то при достаточно малых значениях величины a (и, соответственно, малых значениях a_1, а значит, и их разности) на любого агента, кроме лидера, может приходиться очень незначительный выигрыш, величина которого ниже того, который такой агент мог бы получить в условиях независимости при справедливом разделе дохода.

Ограничение сверху обусловлено тем, что при больших значения a доля кандидата в лидеры может оказаться недостаточной, чтобы скомпенсировать повышенный уровень его инвестирования. В этом случае для него оказывается выгодней не состоять в коалиции и предоставить роль лидера другому члену коллектива.

Согласно модели *возможность перехода от неэффективного равновесия Нэша к доминирующему его по Парето равновесию Стакельберга существует не для всех коллективов и не для любой по составу и размеру коалиции.* Несмотря на то что решение, предлагаемое в данной модели, не является универсальным, на его основе можно имитировать самоорганизацию внутри коллектива с функцией дохода (1) в ряде случаев, которые могут представлять практический интерес.

ПРИМЕР

Пусть в многоквартирном доме проживают 90 владельцев автомашин. Они оборудовали на общедомовой территории автостоянку, доступ на которую открыт только для них и состояние которой зависит от их частных инвестиций. Инвестиции автовладельцев не являются полностью финансовыми. Они могут заключаться в деятельности по благоустройству стоянки, по разрешению конфликтов, заключению соглашений и т.п. Если мест на автостоянке мало, то совокупная полезность автовладельцев будет убывать при увеличении числа пользователей даже при высоких значениях их частных инвестиций. Однако никого из автовладельцев нельзя исключить из числа пользователей автостоянкой. Тогда для задания функции их совокупной полезности (в денежном выражении совокупного выигрыша) вполне применима функция (1) с $n = 90$. Будем считать предельные отдачи от инвестиций одинаковыми для всех автовладельцев и равными $a_i = 0{,}01$, где $i = 1, \ldots, 90.$ Тогда сумма показателей $a = 0{,}9$, а функция совокупного дохода – $D = \lambda \prod_{i=1}^{90} \sigma_i^{0{,}01}$. Для удобства вычислений положим $\lambda = 9 \times 10^3$.

Величину оптимального дохода найдем из формулы (10):

$$D^* = \left(9 \times 10^3\right)^{1/(1-0{,}9)} \times \left(10^{-2}\right)^{[0{,}01/(1-0{,}9)]\times 90} = 9^{10} \times 10^{12}.$$

В данном случае все агенты осуществляют инвестирование в одинаковом объеме, определяемом формулой (5):

$$\sigma_i^* = a_i D^* = 9^{10} \times 10^{10}, \quad i = 1, \ldots, 90.$$

Предположим, что при независимом выборе размеров инвестиций агенты ориентируются на справедливое правило распределения совокупного дохода, т.е. будем считать, что все доли в доходе $\alpha_i = 1/90$, $i = 1, \ldots, 90.$ Совокупный доход, совокупный выигрыш и инвестиции рассчитываются по формулам (41), (42) и (44):

$$D^*(N) = 9^{10} \times 10^{12} (1/0{,}9)^{0{,}9/0{,}1} \left(10^{-2}\right)^{0{,}01/0{,}1\times 90} = 9 \times 10^3, \ U(N) = 8910, \quad \sigma_{iN} = 1{,}0, \ i = 1, \ldots, 90.$$

Индивидуальный выигрыш каждого агента $U_i(N) = 99$.

Теперь обратимся к вопросу о возможности для каждого из автовладельцев получения более высокого выигрыша от совместной деятельности по благоустройству автостоянки. Предположим, что среди жителей нашлись несколько человек, обладающих организационными способностями, достаточными для создания коалиции, выступающей лидером по Стакельбергу. Тогда

Таблица. Результаты различных исходов

Вид исхода	Размер индивидуальных инвестиций	Доля в совокупном доходе	Величина совокупного дохода	Величина совокупного выигрыша	Величина индивидуального выигрыша
Равновесие по Нэшу	1,0	0,0111	9000	8910	99
Равновесие по Стакельбергу, $m = 5$	348; ($\in C$) 3,48; ($\notin C$)	0,03; ($\in C$) 0,01; ($\notin C$)	34867,8	32828	697; ($\in C$) 345; ($\notin C$)
Равновесие по Стакельбергу, $m = 10$	3486; ($\in C$) 34,8; ($\notin C$)	0,02; ($\in C$) 0,01; ($\notin C$)	348678	311021	3487; ($\in C$) 3452; ($\notin C$)

Примечание. Символы $\in C$ и $\notin C$ означают, что показатель является или не является членом коалиции.

необходимо оценить возможную численность коалиции. Используя (58), которое в наших условиях принимает вид $2{,}29 \le m \le 10{,}1$, получаем, что число членов коалиции должно быть не меньше 3 и не больше 10.

Для сравнения результатов различных исходов воспользуемся найденными значениями D^* , σ_i^* , $D^*(N)$ и формулами (32) и (47) для определения долей[4] агентов в совокупном доходе, формулами (34), (35) и (37) – для совокупного дохода и совокупного выигрыша, формулами (51) и (52) – для индивидуальных выигрышей, формулами (38) и (39) – для размеров инвестирования. Результаты вычислений в относительных единицах приведены в таблице.

Как видно из данных, представленных во втором столбце, каждый член коалиции инвестирует в 100 раз больше агента, не входящего в состав коалиции. Данное соотношение вытекает из формул (33) и (36), согласно которым размер инвестиций со стороны агента j вследствие его вступления в коалицию увеличивается в $1/a_j$ раз, т.е. в нашем примере в 100 раз для любого члена коллектива.

Обратим внимание, что при переходе от коалиции из 5 членов к коалиции из 10 членов величина совокупного дохода возрастает ровно в 10 раз. Из анализа показателей второго столбца может сложиться впечатление, что *каждый* член коллектива увеличил объем своих инвестиций в 10 раз. Тем самым создается ощущение линейной зависимости. Это не совсем так. В 10 раз увеличивают размер своих инвестиций только 85 членов коллектива, а именно те, чей статус не меняется. А те пять агентов, которые пополнили собой новый состав расширенной коалиции, увеличивают размер своих инвестиций в 1000 раз. В результате совокупный доход возрастает в $10^{0,85} \times 1000^{0,05} = 10$ раз.

Из данных, представленных в таблице, следует, что при $m = 10$ индивидуальные выигрыши членов коалиции *ненамного* превышают выигрыши агентов, не входящих в коалицию. Объясняется это тем, что в нашем примере численность коалиции ограничена сверху числом 10 – наибольшим числом членов коалиции, при котором выполняется условие совместимости со стимулами (48), иначе говоря, когда быть членом коалиции выгодно.

Главный вывод, который следует из приведенных в таблице результатов расчета, состоит в следующем. Выделение в коллективе коалиции, обеспечивающей, согласно описанной в модели стратегии, достижение равновесного по Стакельбергу состояния, позволяет коллективу весьма существенно увеличить объемы и совокупного выигрыша, и индивидуальных выигрышей *всех членов коллектива* относительно их объемов, достигаемых в равновесном по Нэшу исходе. Причем с ростом (до определенного предела) размера коалиции порождаемый ею благотворный эффект заметно увеличивается.

[4] Повышенная доля автовладельца в данном примере может выражаться в предоставлении удобного места на стоянке, первоочередного права использования и т.п.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренная группа экономических агентов может служить иллюстрацией гибридной формы экономической организации, занимающей на воображаемой оси “рынок – иерархия” некоторое промежуточное положение, которое выражается в одновременном наличии особенностей как иерархической, так и рыночной организационных форм (Ménard, 2004). От рынка такая группа позаимствовала важную особенность – право каждого члена коллектива на остаточный доход и, соответственно, сильные стимулы для каждого и отсутствие центрального агента; от фирмы – фиксированный состав участников и набор локальных правил.

Сильный крен в сторону рыночной экономической формы, выражающийся в независимом выборе каждым участником размера своих инвестиций, оборачивается плохим (неэффективным) равновесием[5], избежать которого можно только благодаря координации действий. Рассмотренная модель показывает, что коллектив, проявляющий некоторые способности к самоорганизации и самоуправлению, может избежать подобного равновесия, не прибегая ни к каким формам неэкономического принуждения.

Согласно модели необходимым условием эффективности выступает наличие определенного уровня доверия со стороны всех участников к нескольким инициативным членам коллектива, добровольно объединившимся в коалицию[6] с целью максимизации собственного выигрыша путем *координации собственных действий.* При этом доверие между не состоящими в коалиции агентами не предполагается. Модель показывает, что именно доверие со стороны участников коллектива к обещаниям коалиции осуществить собственное инвестирование в масштабе, превышающем равновесный уровень, оказывает необходимое стимулирующее влияние на выбор размера инвестирования со стороны не состоящих в коалиции членов коллектива.

Как показывают найденные относительно размера и состава коалиции условия, индивидуальные характеристики членов коалиции должны соответствовать интегральной характеристике всех членов коллектива. Важно подчеркнуть, что и масштабы инвестиций со стороны всех участников, и размеры совокупного и индивидуальных выигрышей оказываются тесно связанными с количественным и качественным составом коалиции.

Согласно модели коалиция не скрывает от остальных членов информацию ни о своем стремлении к максимизации собственного выигрыша, ни о нарушении справедливого правила раздела совокупного дохода в свою пользу. На практике в подобных случаях следует ожидать возникновения конкуренции среди членов коллектива за возможность войти в коалицию[7]. Такой сценарий в нашей модели не рассматривается. Модель не учитывает возможности образования коалиции внутри коалиции и, соответственно, возможности иерархического построения из лидирующих коалиций, вложенных друг в друга в виде матрешки, каждая из которых информирует ближайшую, находящуюся вне, о своих намерениях.

---

[5] Равновесие такого типа *плохим* назвал Р.И. Капелюшников (Капелюшников, 2010, с. 9).

[6] В нашем случае, в отличие, например, от модели «moral hazard in team» (Holmstrom, 1982), рассматривается возможность самоорганизации с целью настройки системы стимулов, основанная на доверии членов коллектива к небольшой выделившейся группе единомышленников, которые достигли между собой договоренности о координации своих действий. Поэтому коллектив обязательно предстает в виде дифференцированной структуры. Об этом см. в (Скаржинская, Цуриков, 2014).

[7] Конкуренты могут прибегать к крайним формам оппортунизма, от которых модель абстрагирована (оговаривать соперников, с тем чтобы снизить к ним уровень доверия, подавать другие ложные сигналы, шантажировать, угрожать и пр.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Капелюшников Р.И. (2010). Множественность институциональных миров: Нобелевская премия по экономике-2009. Препринт WP3/2010/02 (Часть 1). М.: ГУ ВШЭ.

Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. (2014). К вопросу об эффективности коллективных действий // *Российский журнал менеджмента*. Т. 12. № 3. С. 87–106.

Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. (2017). Модель коллективных действий. Часть 1: равновесие, справедливость, эффективность // *Экономика и математические методы*. Т. 53. № 2. С. 118–133.

Уильямсон О. И. (1996). Экономические институты капитализма: фирмы, рынки, “отношенческая” контрактация. СПб.: Лениздат.

Holmstrom B. (1982). Moral Hazard in Teams // *The Bell Journal of Economics*. Vol. 13. No. 2. P. 324–340.

Ménard C. (2004). The Economics of Hybrid Organizations // *Journal of Institutional and Theoretical Economics*. Vol. 160. No. 3. P. 345–376.

Olson M. (1965). The Logic of Collective Action. Public Goods and the Theory of Groups. Cambridge: Harvard University Press.

Поступила в редакцию
12.04.2016 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Holmstrom B. (1982). Moral Hazard in Teams. *The Bell Journal of Economics*, 13, 2, 324–340.

Kapeljushnikov R. I. (2010). The Multiplicity of Institutional Worlds: The Nobel Prize in Economic Sciences-2009. Preprint WP3/2010/02 (Part 1). Moscow: NRU HSE (in Russian).

Ménard C. (2004). The Economics of Hybrid Organizations. J*ournal of Institutional and Theoretical Economics*, 160, 3, 345–376.

Olson M. 1965. The Logic of Collective Action. Public Goods and the Theory of Groups. Cambridge: Harvard University Press.

Skarzhinskaja E. M., Tsurikov V. I. (2014). On the Efficacy of Collective Action. *Russian Management Journal,* 12, 3, 87–106 (in Russian).

Skarzhinskaja E. M., Tsurikov V. I. (2017). Collective Action Model. Part 1: Equilibrium, Justice, Efficiency. *Economics and Mathematical Methods,* 53, 2, 118–133 (in Russian).

Williamson O. I. (1996). The Economic Institutions of Capitalism: Firms, Markets, Relational Contracting. Saint Petersburg: Lenizdat (in Russian).

Received 12.04.2016

MODEL OF COLLECTIVE ACTIONS. PART 2: LEADING COALITION

E.M. Skarzhinskaya[i], V.I. Tzurikov[ii]

Abstract. A group of agents able to generate consolidated income by specific private investments (efforts) is considered. A strictly convex function that increases as the value of the investment of each agent increases is used as the value of the expected consolidated income. The agents are familiar with the relation of the expected income to the size of investments. At the same time, each team member pursues only the individual interests and aims to maximize his/her own gain. It is assumed that there may be a small group of agents (coalition) within a team who enjoy a fairly high level of confidence in the other team members and have no other means of influencing their behavior. In order to maximize its own gain and based on its members' chosen investment strategy, the coalition determines the distribution rule for the consolidated income for all the team members and gives them all the necessary information about this rule and the amounts of their own investments. Agents who are not members of the coalition and who consider this information reliable will accept the coalition's proposal if the amount of the expected individual gain for each agent exceeds its expected value in an alternative option in the form of the Nash equilibrium. Conditions determining the size and structure of the coalition are found within the model, and when these conditions are met, the Stackelberg equilibrium is Pareto superior to the Nash equilibrium. Connections are made between the individual characteristics of the coalition members and the integral characteristics of every team member both with the coalition size and structure, as well as with the corresponding investment amounts and the values of consolidated and individual gains.

Keywords: collective actions, specific investments, leading coalition, Stackelberg equilibrium, coordination, income distribution.

JEL Classification: C02, D23.

[i] **Elena M. Skarzhinskaya** — Doct. Sc. (Economics), Professor, Professor at Nekrasov Kostroma State University, Kostroma, Russia; yelena.skarzhinsky@gmail.com.

[ii] **Vladimir I. Tzurikov** — Cand. Sc. (Physics & Maths), Doct. Sc. (Economics), Associate professor, Professor, Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma; tsurikov@inbox.ru.