ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2017, том 53, № 4, с. 105–113

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С ЛОГИЧЕСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ КРИТЕРИЕВ И АЛЬТЕРНАТИВ

© 2017 г. И.Л. Томашевский[i]

Аннотация. В стандартном подходе к решению многокритериальных задач с использованием линейной свертки критериев матрица-столбец φ из оценок альтернатив находится как произведение матрицы F, содержащей критериальные оценки альтернатив, на матрицу-столбец ω из важностей (весов) критериев. Вес каждого критерия предполагается одинаковым для всех альтернатив. Однако реальная важность одного и того же критерия для различных альтернатив может иметь существенно разные значения. В силу этого корректный выбор весов требует детального анализа информации о важности каждого критерия для каждой альтернативы. В данной работе такой анализ сведен к решению бесконечной последовательности многокритериальных задач, описывающих взаимное влияние весов критериев и оценок альтернатив друг на друга. Показано, что процесс взаимодействия приводит веса ω и оценки φ к логически согласованным результирующим значениям, которые являются главными собственными векторами матриц взаимодействия WF и FW, где W – матрица, состоящая из важности каждого из критериев для данной альтернативы. С содержательной точки зрения рассматриваемое взаимодействие представляет собой сложный логический процесс согласования представлений эксперта о ценности альтернатив с его представлениями о важности критериев. Формальная сторона этого процесса отражена в операциях многократного перемножения матриц W и F. В случае когда важности критериев не зависят от альтернатив, предлагаемый алгоритм автоматически переходит в исходный алгоритм $\varphi = F\omega$.

Ключевые слова: многокритериальные задачи, многокритериальные методы, многокритериальная оптимизация, веса критериев.

Классификация JEL: C44, D7, D81.

1. ВВЕДЕНИЕ

Математические методы поддержки принятия управленческих решений представляют собой быстро развивающуюся область исследований, цель которых – наиболее адекватное преобразование экспертных оценок альтернативных вариантов управленческих решений в числовую форму, удобную для окончательного логического или математического анализа.

Стандартная постановка задачи принятия решения предполагает оценку имеющихся альтернатив $x_1, ..., x_n$ и последующий выбор лучшей. В сложных случаях оценка выполняется с использованием вспомогательных критериев $f_1, ..., f_m$. В идеальном случае наилучшая альтернатива должна являться точкой максимума (минимума) всех критериев. В реальности же критерии $f_1, ..., f_m$ достигают своих максимумов (минимумов), как правило, в разных точках множества $\{x_1, ..., x_n\}$, поэтому выбор наилучшей альтернативы затрудняется. В этом случае оказывается полезным принцип Парето-оптимальности, основанный на сравнительном анализе векторных оценок $(f_1(x), ..., f_m(x))$ альтернатив $x \in \{x_1, ..., x_n\}$. Он позволяет исключить из множества $\{x_1, ..., x_n\}$ заведомо непригодные альтернативы и сузить его до так называемого Парето-оптимального множества P (Подиновский, Ногин, 2007; Лотов, Поспелова, 2008; Miettinen, 1999; Ehrgott, 2005). Наилучшая альтернатива автоматически оказывается принадлежащей множеству P. Один из методов дальнейшего выбора наилучшей альтернативы из альтернатив множества P основан на использовании обобщенного скалярного критерия

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i f_i(x), \quad x \in \{x_1, ..., x_n\}, \tag{1}$$

[i] **Игорь Людвигович Томашевский** – к.ф.-м.н., доцент, Северный (Арктический) федеральный университет, Высшая школа информационных технологий и автоматизированных систем; Архангельск, i.tomashevskii@gmail.com.

представляющего линейную свертку критериев $f_1,...,f_m$ с положительными весами $\omega_1,...,\omega_m$ (Лотов, Поспелова, 2008; Miettinen, 1999; Ehrgott, 2005). Значения $\phi_1,...,\phi_n$ критерия (1) в точках $x_1,...,x_n$ представимы в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \begin{pmatrix} f_i(x_1) \\ \dots \\ f_i(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) \dots f_m(x_1) \\ \dots \; \dots \; \dots \\ f_1(x_n) \dots f_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \dots \\ \omega_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

и обладают важным полезным свойством – при любых $\omega_1,...,\omega_m$ максимальное (минимальное) из значений $\phi_1,...,\phi_n$ соответствует альтернативе из Парето-оптимального множества *P*. В силу этого задание весов $\omega_1,...,\omega_m$ критериев $f_1,...,f_m$ эквивалентно выбору одной из Парето-оптимальных альтернатив. При разумном задании весов, отражающем точку зрения эксперта, такая альтернатива может рассматриваться в качестве наилучшей.

Указанный подход к оценке альтернатив не свободен от недостатков (Подиновский, Ногин, 2007; Лотов, Поспелова, 2008; Ehrgott, 2005). В частности, перебор возможных значений весов $\omega_1,...,\omega_m$ не гарантирует перебора всех альтернатив множества *P*. Однако простота алгоритма (2) привлекательна и способствует использованию обобщенного критерия в виде линейной свертки в различных многокритериальных методах (см., например, (Triantaphyllou, 2002; Belton, Stewart, 2002; Hwang, Yoon, 1981; Rosenthal, 1985)), среди которых несколько вариантов метода анализа иерархий, широко известного как Analytic Hierarchy Process (AHP) (Саати, 1980; Saaty, 1980; Belton, Gear, 1983; Schoner, Wedley, 1989; Schoner, Wedley, Choo, 1993; Barzilai, Golany, 1994; Saaty, 1994). С математической точки зрения эти методы отличаются друг от друга только способом нормировки критериев $f_1(x),...,f_m(x)$ и их весов $\omega_1,...,\omega_m$. Например, в стандартном AHP (Саати, 1980; Saaty, 1980) веса критериев и критериальные оценки альтернатив $x_1,...,x_n$ нормируются условиями

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} f_j(x_k) = 1, \quad j = 1,...,m, \quad (3)$$

автоматически гарантирующими аналогичную нормировку

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_k = 1 \quad (4)$$

результирующих оценок $\phi_1,...,\phi_n$ альтернатив.

Общей проблемой, возникающей перед пользователями этих методов при решении конкретных задач, является выбор весов $\omega_1,...,\omega_m$. В обычной интерпретации вес ω_i трактуется как важность (или пригодность) критерия f_i для оценки всей совокупности альтернатив $x_1,..., x_n$. Понятие важности критерия относительно совокупности альтернатив в различных методиках оценки весов (Hesham, Salih, 2008; Choo, Schoner, Wedley, 1999; Lootsma, 1999; Анохин и др., 1997; Barron, 1992; Stillwell, Seaver, Edwards, 1981; Saaty, 1980) воспринимается, в конечном итоге, на интуитивном уровне[1].

Это понятие, однако, не является простым, поскольку для различных альтернатив $x \in \{x_1,...,x_n\}$ один и тот же критерий f_i может иметь различную важность $\omega_i(x)$, в силу чего итоговая важность (вес) ω_i представляет собой некоторую усредненную величину.

Пример. Пусть выбирается способ передвижения из Москвы на Дальний Восток. Альтернативы – воздушный транспорт (самолет), наземный транспорт (поезд). Критерии оценки – время в пути, стоимость и комфортабельность. При выборе воздушного способа передвижения самым важным критерием его оценки является время в пути, а при выборе передвижения наземным транспортом – стоимость билета.

[1] Мы не касаемся здесь подходов к формализации понятия важности критериев, использующих дополнительную внекритериальную информацию для сравнения векторных оценок любых альтернатив, в том числе и принадлежащих Парето-оптимальному множеству (см., например, (Подиновский, 2007)). При наличии такой информации привлечение обобщенного критерия для выбора наилучшей альтернативы становится излишним.

Видим, что важность критериев существенно зависит от альтернатив. В то же время результирующие важности критериев (веса) от альтернатив не зависят. Детально этот пример мы проанализируем в разд. 2, а пока отметим, что в данной ситуации интуитивного восприятия результирующей важности критериев явно недостаточно для корректной оценки весов критериев, а следовательно, и альтернатив. Корректный подход к выбору весов требует анализа информации о важности каждого критерия для каждой альтернативы[2].

В данной работе такой анализ сведен к решению бесконечной последовательности многокритериальных задач, описывающих взаимное влияние весов критериев и оценок альтернатив друг на друга. Показано, что процесс взаимодействия приводит веса $\omega_1,...,\omega_m$ и оценки $\phi_1,...,\phi_n$ к логически согласованным результирующим значениям, которые образуют главные собственные векторы матриц взаимодействия *WF* и *FW*, построенных из матрицы важностей критериев

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1(x_1) & ... & \omega_1(x_n) \\ ... & ... & ... \\ \omega_m(x_1) & ... & \omega_m(x_n) \end{pmatrix} \tag{5}$$

и матрицы критериальных оценок альтернатив

$$F = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & ... & f_m(x_1) \\ ... & ... & ... \\ f_1(x_n) & ... & f_m(x_n) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В разд. 2–3 предлагаемый метод оценки альтернатив формулируется применительно к стандартному AHP, в разд. 4 – для произвольных многокритериальных методов с линейной сверткой критериев. Показывается, что, в случае когда важности критериев не зависят от альтернатив, предлагаемый алгоритм автоматически переходит в исходный алгоритм (2).

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ КРИТЕРИЯМИ И АЛЬТЕРНАТИВАМИ

Пусть *A* – некоторая проблема, $x_1, ..., x_n$ – альтернативные варианты ее решения, $f_1, ..., f_m$ – критерии оценки вариантов. Сформулируем по отношению к проблеме *A* следующие две многокритериальные задачи с линейными обобщенными критериями.

Первая задача – стандартная: оценить альтернативные варианты $x_1, ..., x_n$ решения проблемы *A*, предполагая известными критериальные оценки $f_i(x_k)$ альтернатив $x_k \in \{x_1,...,x_n\}$ каждым из критериев $f_i \in \{f_1,...,f_m\}$ и веса $\omega_1,...,\omega_m$ всех критериев. Ее решение дается формулой (2) и может быть записано в матричном виде

$$\hat{\phi} = F\hat{\omega}, \tag{7}$$

где F – матрица критериальных оценок (6),

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad \hat{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ ... \\ \omega_m \end{pmatrix}. \tag{8}$$

При использовании нормировок (3)—(4), принятых в стандартном AHP, результирующие оценки $\phi_1,...,\phi_n$ будут автоматически нормированными на 1.

[2] Необходимость учета взаимосвязи весов критериев с составом и видом рассматриваемых альтернатив неоднократно обсуждалась в (Подиновский, Потапов, 2013; Edwards, Barron, 1994; Schoner, Wedley, 1989; Wang, Luo, 2009; Belton, Gear, 1985).

Вторая задача – обратная: найти веса $\omega_1,...,\omega_m$ критериев $f_1,..., f_m$, предполагая известными оценки альтернатив $\phi_1,...,\phi_n$ и важности $\omega_i(x_k)$ каждого из критериев $f_i \in \{f_1,..., f_m\}$ для оценки каждой из альтернатив $x_k \in \{x_1,...,x_n\}$.. В этой задаче альтернативы $x_1,...,x_n$ выступают в качестве естественных критериев оценки элементов $f_1,..., f_m$, числа $\phi_1,...,\phi_n$ – в качестве весов этих критериев, а важности $\omega_i(x_k)$ – в качестве критериальных оценок элементов $f_1,..., f_m$. В силу этого для ее решения применим алгоритм (2), а решение представимо в виде

$$\hat{\omega} = W\phi, \tag{9}$$

где W – матрица важностей критериев (5), $\hat{\omega}$ и $\hat{\phi}$ – матрицы-столбцы вида (8). При использовании нормировок

$$\sum_{r=1}^{n} \phi_r = 1, \ \sum_{i=1}^{m} \omega_i(x_k) = 1, \ k = 1,...,n,$$

искомые веса $\omega_1,...,\omega_m$ будут автоматически нормированными на 1.

Полученные уравнения (7) и (9) описывают взаимное влияние критериев и альтернатив друг на друга. Это влияние можно рассматривать как циклический процесс

$$\begin{array}{ccc} \hat{\omega} & \xrightarrow{(7)} & \hat{f} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \hat{\omega} & \xleftarrow[(9)]{} & \hat{f} \end{array}. \tag{10}$$

В разд. 3 мы покажем, что такой процесс приводит числовые оценки альтернатив и критериев в состояние равновесия (логической согласованности). Значения оценок в состоянии равновесия легко найти из условий равновесия – их неизменности в процессе циклического обхода (10). Согласно (7), (9) это условия имеют вид:

$$WF\hat{\omega} = \hat{\omega}, \tag{11}$$

$$FW\hat{\phi} = \hat{\phi}. \tag{12}$$

Из (11), (12) следует:

– результирующие оценки альтернатив $x_1,..., x_n$ образуют собственный вектор $\hat{\phi}$ матрицы FW, соответствующий ее собственному значению, равному 1 (поскольку матрицы W, F и WF являются стохастическими, такое собственное значение у матрицы WF всегда существует (Гантмахер, 1988, с. 360);

– веса критериев $f_1,..., f_m$ образуют собственный вектор $\hat{\omega}$ матрицы FW, соответствующий ее собственному значению, равному 1;

– уравнение (12) содержит в себе полный алгоритм решения задачи многокритериальной оценки альтернатив с использованием линейной свертки критериев (в рамках стандартного AHP);

– уравнение (12) обобщает собой исходный подход к многокритериальной оптимизации (7).

Последнее утверждение становится очевидным, если учесть, что в исходной трактовке уравнений (2) и (7) вес каждого критерия $f_1,..., f_m$ предполагался одинаковым для всех альтернатив $x_1,..., x_n$. Этому случаю соответствует матрица важностей критериев W с матричными элементами $\omega_i(x_1) = ... = \omega_i(x_n) = \omega_i$, $i = 1,...,m$. Для такой матрицы имеют место тождественные равенства

$$W\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \omega_1 & ... & \omega_1 \\ ... & ... & ... \\ \omega_m & ... & \omega_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ ... \\ \phi_m \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \omega_1 \\ ... \\ \omega_m \end{pmatrix} = \hat{\omega}, \ WF\hat{\omega} \equiv \hat{\omega},$$

в силу которых (12) автоматически превращается в исходное равенство (7), а (9) – в тождество $\hat{\omega} \equiv \hat{\omega}$. Отсюда следует, что алгоритм (12) является обобщением алгоритма (2), (7) и открывает возможность для дифференцированного подхода к оценке степени пригодности каждого из критериев для оценки каждой из рассматриваемых альтернатив.

В качестве иллюстрации применим этот метод к решению сформулированной выше задачи о передвижении по маршруту Москва – Дальний Восток, в которой важности критериев (время в пути, стоимость и комфортабельность) существенно зависят от способов передвижения. Пусть матрица критериальных оценок способов передвижения (в соответствии с известными стоимостями билетов и временем в пути) имеет вид

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad \text{Оценка стоимости} \\
\qquad\qquad\qquad \text{Оценка комфортабельности} \\
F = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{– воздушный путь,} \\ \text{– наземный путь.} \end{array} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{Оценка времени в пути}
\end{array}$$

(Здесь учтено, что критериальные оценки тем выше, чем меньше время в пути и стоимость и чем больше комфортабельность.) И пусть с точки зрения лица, принимающего решение, матрица важностей критериев имеет вид:

$$\begin{array}{c}
\text{Важность критериев при выборе воздушного пути} \\
W = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— время в пути;} \\ \text{— стоимость;} \\ \text{— комфортабельность.} \end{array} \\
\text{Важность критериев при выборе наземного пути}
\end{array}$$

(Здесь учтено, что при выборе воздушного способа передвижения самым важным критерием является время в пути, а при выборе наземного способа передвижения – стоимость.) Тогда для результирующих оценок альтернатив и результирующих весов критериев получаем:

$$FW = \begin{pmatrix} 0{,}73 & 0{,}42 \\ 0{,}27 & 0{,}58 \end{pmatrix} \overset{(11)}{\Rightarrow} \hat{\phi} = \begin{pmatrix} 0{,}609 \\ 0{,}391 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— оценка передвижения воздушным путем;} \\ \text{— оценка передвижения наземным путем;} \end{array}$$

$$WF = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}30 & 0{,}50 \\ 0{,}24 & 0{,}52 & 0{,}36 \\ 0{,}11 & 0{,}18 & 0{,}14 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{— вес критерия "время в пути";} \\ \text{— вес критерия "стоимость";} \\ \text{— вес критерия "комфортабельность";} \end{array}$$

3. МЕХАНИЗМ ЛОГИЧЕСКОГО САМОСОГЛАСОВАНИЯ ВЕСОВ КРИТЕРИЕВ И ОЦЕНОК АЛЬТЕРНАТИВ В ПРОЦЕССЕ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Покажем, что циклическое взаимодействие (10) приводит критерии $f_1, ..., f_m$ и альтернативы $x_1, ..., x_n$ в состояние равновесия (логической согласованности) с фиксированными значениями их обобщенных числовых оценок. Для этого предположим, что на некотором шаге этого процесса критерии $f_1, ..., f_m$ имели оценки (веса) $\hat{\omega}_0$. Тогда в соответствии с (7), (9) в результате одного циклического обхода (10) их веса станут равными $\hat{\omega}_1 = WF\hat{\omega}_0$. После второго обхода они примут значение $\hat{\omega}_2 = WF\hat{\omega}_1 = (WF)^2\hat{\omega}_0$, а после обхода k – значение $\hat{\omega}_k = (WF)^k\hat{\omega}_0$. Матрица WF является положительной стохастической. Поэтому для нее справедливо следующее утверждение (Гантмахер, 1988, с. 367): существует $\lim\limits_{k\to\infty}(WF)^k = (WF)^{(\infty)}$, причем предельная матрица состоит из одинаковых столбцов $\hat{\omega}$, таких что $WF\hat{\omega} = \hat{\omega}$, и представима в виде $(WF)^{(\infty)} = \hat{\omega}\hat{e}$, $\quad \hat{e} = (1 \ldots 1)$. Учитывая это, получим $\hat{\omega}_\infty = \lim\limits_{k\to\infty}(WF)^k\hat{\omega}_0 = (WF)^\infty\hat{\omega}_0 = \hat{\omega}e\hat{\omega}_0$.

Поскольку матричные элементы матрицы-столбца $\hat{\omega}_0$ нормированы на 1, то $\hat{e}\hat{\omega}_0 = 1$ и $\hat{\omega}_\infty = \hat{\omega}$. Отсюда следует, что $\hat{\omega}_k \to \hat{\omega}$ при $k \to \infty$ и $WF\hat{\omega} = \hat{\omega}$. Это означает, что в результате циклических обходов (10) оценки критериев $f_1, \ldots, f_m$ приближаются к пределу $\hat{\omega}$, удовлетворяющему условию равновесия (11). Аналогичные рассуждения справедливы и применительно к альтернативам $x_1, \ldots, x_n$.

Заметим, что циклическая процедура (10) представляет собой чрезвычайно сложный логический процесс согласования представлений эксперта о ценности альтернатив с его представлениями о важности критериев. Формальная сторона этого процесса отражена в операциях многократного перемножения матриц W и F.

4. ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотренная выше модель взаимодействия критериев и альтернатив была сформулирована применительно к методу анализа иерархий с нормировкой весов критериев и оценок альтернатив в виде (3)—(4). Общий случай (2) многокритериальной оптимизации с линейной сверткой критериев отличается от рассмотренного выше только условиями нормировки. При отличии нормировок от (3)—(4) для матриц весов критериев и оценок альтернатив в состоянии равновесия (логической согласованности) вместо (7), (9) будут иметь место равенства

$$\hat{\phi}_* = F\hat{\omega}, \;\; \hat{\omega}_* = W\hat{\phi} \tag{13}$$

в которых матрицы $\hat{\phi}, \hat{\phi}_*$ и $\hat{\omega}, \hat{\omega}_*$ связаны друг с другом нормировочными множителями:

$$\hat{\omega}_* = \alpha\hat{\omega}, \;\; \hat{\phi}_* = \beta\hat{\phi}, \;\; \alpha > 0, \beta > 0. \tag{14}$$

В результате условия равновесия критериев и альтернатив (11), (12) принимают вид

$$FW\hat{\phi} = \lambda_{max}\widehat{\phi}, \tag{15}$$

$$WF\hat{\omega} = \lambda_{max}\hat{\omega}, \tag{16}$$

где $\lambda_{max} = \alpha\beta$. Легко убедиться, что число λ_{max} представляет собой наибольшее (главное) собственное значение матриц WF и FW, а матрицы-столбцы $\hat{\omega}, \hat{\phi}$ представляют собой главные собственные векторы этих матриц[3].

Уравнения (15), (16) не являются независимыми:

$$WF\hat{\omega} = \lambda_{max}\hat{\omega} \;\Rightarrow\; FWF\hat{\omega} = \lambda_{max}F\hat{\omega} \;\overset{(13)}{\Rightarrow}\; FW\hat{\phi}_* = \lambda_{max}\hat{\phi}_* \;\overset{(14)}{\Rightarrow}\; FW\hat{\phi} = \lambda_{max}\hat{\phi}.$$

В силу этого возможны две эквивалентные формулировки многокритериальной задачи с линейной сверткой критериев для вычисления оценок альтернатив $\hat{\phi}$. Первая формулировка содержит только уравнение (15). Вторая представляет стандартную формулировку (2), дополненную уравнением (16) для весов критериев

$$\begin{cases} \hat{\phi} = F\hat{\omega}; \\ WF\hat{\omega} = \lambda_{max}\hat{\omega}. \end{cases} \tag{17}$$

[3] Не нарушая общности, можно считать, что матрицы W и F – положительные. Тогда WF и FW также положительные матрицы. Поэтому положительные собственные векторы $\hat{\omega}$ и $\hat{\phi}$ – главные собственные векторы этих матриц (Гантмахер, 1988, с. 342).

В случае когда вес каждого из критериев одинаков для всех альтернатив, второе из уравнений (17) обращается в тождественное равенство $\omega \equiv \omega$ (см. разд. 2) и система (17) принимает исходный стандартный вид (7). Это означает, что алгоритм (15) (или (17)) обобщает собой алгоритм (2), (7). При его использовании трудно формализуемая задача выбора весов критериев относительно всей совокупности альтернатив сводится к простой оценке важности каждого критерия для каждой из рассматриваемых альтернатив.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Анохин А.М., Глотов В.А., Павельев В.В., Черкашин А.М. (1997). Методы определения коэффициентов важности критериев // *Автоматика и телемеханика*. № 8. С. 3–35.

Гантмахер Ф.Р. (1988). Теория матриц. М.: Наука.

Лотов А.В., Поспелова И.И. (2008). Многокритериальные задачи принятия решений. М.: МАКС Пресс.

Подиновский В.В. (2007). Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: Физматлит.

Подиновский В.В., Ногин В.Д. (2007). Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит.

Подиновский В.В., Потапов В.А. (2013). Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: pro et contra // *Бизнес-информатика*. № 3. С. 41–48.

Саати Т. (1993). Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь.

Barron F.H. (1992). Selecting a Best Multiattribute Alternative with Partial Information about Attribute Weights // *Acta Psychologica*. Vol. 80. P. 91–103.

Barzilai J., Golany B. (1994). Ahp Rank Reversal, Normalization and Aggregation Rules // *INFOR*. Vol. 32. P. 57–64.

Belton V., Gear A. (1983). On a Short-Coming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies // *Omega*. Vol. 11. P. 228–230.

Belton V., Gear A. (1985). The Legitimacy of Rank Reversal – A Comment // *Omega*. Vol. 13. P. 143–144.

Belton V., Stewart T.J. (2002). Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Choo E.U., Schoner B., Wedley W.C. (1999). Interpretation of Criteria Weights in Multicriteria Decision Making // *Computers & Industrial Engineering*. Vol. 37. P. 527–541.

Edwards W., Barron F.H. (1994): SMARTS and SMARTER: Improved Simple Methods for Multiattribute Utility Measurement // *Organization behavior and human processes*. Vol. 60. P. 306–325.

Ehrgott M. (2005). Multicriteria Optimization. Heidelberg: Springer Berlin.

Hesham K.A., Salih O.D. (2008). Assigning Cardinal Weights in Multi-Criteria Decision Making Based on Ordinal Ranking // *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*. Vol. 15. P. 125–133.

Hwang C.L., Yoon K. (1981). Multiple Attribute Decision Making-Methods and Applications. A State of the Art Survey. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

Lootsma F.A. (1999). Multi-Criteria Decision Analysis via Ratio and Difference Judgement. Dordecht: Kluwer Academic Publishers.

Miettinen K. (1999). Nonlinear Multiobjective Optimization. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Rosenthal R.E. (1985). Principles of Multiobjective Optimization // *Decision Sciences*. Vol. 16. P. 133–152.

Saaty T. (1980). The Analytic Hierarchy Process. New York: McGraw-Hill.

Saaty T. (1994). How to Make a Decision – the Analytic Hierarchy Process // *Interfaces*. Vol. 24. P. 19–43.

Schoner B., Wedley W. (1989). Ambiguous Criteria Weights in AHP: Consequences and Solutions // *Decision Sciences*. Vol. 20. P. 462–475.

Schoner B., Wedley W., Choo E. (1993) A Unified Approach to AHP with Linking Pins // *European Journal of Operational Research*. Vol. 64. P. 384–392.

Stillwell W.G., Seaver D.A., Edwards W. (1981). A Comparison of Weight Approximation Techniques in Multiattribute utility Decision Making // *Organizational Behavior and Human Performance*. Vol. 28. P. 62–77.

Triantaphyllou E. (2002). Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Wang Y., Luo Y. (2009). On Rank Reversal in Decision Analysis // *Mathematical and Computer Modelling*. Vol. 49. P. 1221–1229.

Поступила в редакцию
26.09.2014 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Anokhin A.M., Glotov V.A., Pavel'ev V.V., Cherkashin A.M. (1997). Methods for Determination of Criteria Importance Coefficients. *Automatika i Telemekhanika*, 8, 3–35 (in Russian).

Barron F.H. (1992). Selecting a Best Multiattribute Alternative with Partial Information about Attribute Weights. *Acta Psychologica*, 80, 91–103.

Barzilai J., Golany B. (1994). Ahp Rank Reversal, Normalization and Aggregation Rules. *INFOR*, 32, 57–64.

Belton V., Gear A. (1983). On a Short-Coming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies. *Omega*, 11, 228–230.

Belton V., Gear A. (1985). The Legitimacy of Rank Reversal – A Comment. *Omega*, 13, 143–144.

Belton V., Stewart T.J. (2002). Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Choo E.U., Schoner B., Wedley W.C. (1999). Interpretation of Criteria Weights in Multicriteria Decision Making. *Computers & Industrial Engineering*, 37, 527–541.

Edwards W., Barron F.H. (1994): SMARTS and SMARTER: Improved Simple Methods for Multiattribute Utility Measurement. *Organization behavior and human processes*, 60, 306–325.

Ehrgott M. (2005). Multicriteria Optimization. Heidelberg: Springer Berlin.

Gantmakher F.R. (1988). Theory of Matrices. Moscow: Nauka (in Russian).

Hesham K.A., Salih O.D. (2008). Assigning Cardinal Weights in Multi-Criteria Decision Making Based on Ordinal Ranking. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 15, 125–133.

Hwang C.L., Yoon K. (1981). Multiple Attribute Decision Making-Methods and Applications. A State of the Art Survey. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

Lootsma F.A. (1999). Multi-Criteria Decision Analysis via Ratio and Difference Judgement. Dordecht: Kluwer Academic Publishers.

Lotov A.V., Pospelova I.I. (2008). Multi-Criteria Decision-Making Problems. Moscow: MAKS Press (in Russian).

Miettinen K. (1999). Nonlinear Multiobjective Optimization. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Podinovskiy V., Potapov M. (2013). Weighted Sum Method to Analyze Multi-Criteria Decision-Making Problems: pro et contra. *Business Informatics*, 3, 41–48 (in Russian).

Podinovskiy V.V. (2007). Introduction to the Importance Factors Theory in Multicriteria Decision Problem. Moscow: Fizmatlit (in Russian).

Podinovskiy V.V., Nogin V.D. (2007). Pareto Optimal Solutions of Multicriteria Problems. Moscow: Fizmatlit (in Russian).

Rosenthal R.E. (1985). Principles of Multiobjective Optimization. *Decision Sciences*, 16, 133–152.

Saaty T. (1980). The Analytic Hierarchy Process. New York: McGraw-Hill.

Saaty T. (1994). How to Make a Decision – the Analytic Hierarchy Process. *Interfaces*, 24, 19–43.

Schoner B., Wedley W. (1989). Ambiguous Criteria Weights in AHP: Consequences and Solutions. *Decision Sciences*, 20, 462–475.

Schoner B., Wedley W., Choo E. (1993) A Unified Approach to AHP with Linking Pins. *European Journal of Operational Research*, 64, 384–392.

Stillwell W.G., Seaver D.A., Edwards W. (1981). A Comparison of Weight Approximation Techniques in Multiattribute utility Decision Making. *Organizational Behavior and Human Performance*, 28, 62–77.

Triantaphyllou E. (2002). Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Wang Y., Luo Y. (2009). On Rank Reversal in Decision Analysis. *Mathematical and Computer Modelling*, 49, 1221–1229.

Received 26.09.2014

MULTICRITERIA DECISION MAKING WITH CRITERIA-ALTERNATIVE INTERACTIONS

I.L. Tomashevskii[i]

Abstract. Multicriteria decision making models need to evaluate a finite set of alternatives concerning multiple criteria and to evaluate each criteria and all the alternatives. If criteria of importance depend essentially on the alternatives then the second problem is very difficult. In this article, we propose some algorithm to obtain criteria weights from a set of local criteria weights for each alternative. This algorithm is based on criteria-alternatives interactions and derived weights as the solution of the eigenvector problem for some interaction matrix. The obtained criteria-alternatives interaction algorithm may be used to modify any original MCDM method based on an additive scalar criterion. If criteria are independent from alternatives, the criteria-alternatives interaction algorithm automatically takes the original form.

Keywords: decision analysis, MCDM, AHP, criteria weights, preference.

JEL Classification: C44, D7, D81.

[i] **Igor' L. Tomashevskii** – Cand. Sc. (Physics & Maths), Associate Professor at School of Information Technologies and Automation Systems, Northern (Arctic) Federal University; Russia, Arkhangelsk, i.tomashevskii@gmail.com.