

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕМИАЛЬНОГО ФОНДА

© 2017 г. Л.С. Маергойз<sup>i</sup>, Р.Г. Хлебопрос<sup>ii</sup>

**Аннотация.** Представлена оптимизационная математическая модель распределения премиального фонда среди участников трудового коллектива при наличии рейтинга категорий продуктов труда в направлении возрастания их качества, трудоемкости их изготовления (шкала качества) и числовой шкалы, характеризующей объем выполненной работы участниками коллектива по созданию продуктов труда каждой категории (шкала количества). Описание модели опирается на следующие принципы оптимального распределения ресурса: принцип пропорциональности внутри каждой категории; принцип минимизации квадратичного функционала, зависящего от разностей плотностей ресурсов для смежных по рейтингу категорий; принцип управления. Ее конструкция проиллюстрирована на примере распределения премиального фонда в научном коллективе. С математической точки зрения данная модель не отличается от (разработанной ранее) модели распределения ограниченного социально значимого ресурса между потребителями (группами людей, находящихся в дифференцируемых условиях) при наличии их строгого рейтинга и числовой шкалы, отражающей объем потребностей групп в том или ином ресурсе.

**Ключевые слова:** математическая модель, алгоритм оптимального распределения, экстремальная задача.

**Классификация JEL:** A13.

### 1. ПРОБЛЕМА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕМИАЛЬНОГО ФОНДА В ТРУДОВОМ КОЛЛЕКТИВЕ

В данной работе под *оптимальным распределением ресурса* мы будем понимать выбор с помощью экстремального подхода математического алгоритма распределения этого ресурса, которое в каждой конкретной ситуации имеет своеобразный оттенок нравственности и справедливости (сведение к минимуму социальной неудовлетворенности потребителей ресурса, компромисс и пр.).

Принципы оплаты труда в соответствии с его количеством и качеством — одно из популярных направлений исследования производственных отношений людей в экономике и социологии. Оптимальное распределение оплаты труда — важное условие отсутствия социальной напряженности в трудовом коллективе. Не претендуя на обзор обширной литературы в этом направлении, отметим наиболее близкие к данной работе исследования Ю.Н. Гаврильца (Гаврилец, 1992; Староверов, Котельникова, 2001, гл. 1), где исследованы способы достижения компромисса интересов и справедливости в оплате труда и рассмотрен вариант подхода к справедливости «когда нет обид»: когда удовлетворение каждого не меньше, по крайней мере, чем удовлетворенность любого другого. В частности, там предложены конструкции математических моделей распределения оплаты в трудовом коллективе, использующих функции полезности его участников и учитывающих их квалификацию, трудолюбие, результаты труда.

Данная заметка непосредственно примыкает к статье (Галькова, Маергойз, 2015), где была разработана оптимизационная математическая модель распределения ограниченного социально значимого ресурса между потребителями (группами людей) *при наличии их строгого рейтинга*. При этом дележ ресурсов происходил при наличии числовой шкалы, отражающей объем потребностей групп в том или ином ресурсе. Например, при распределении гуманитарного груза

<sup>i</sup> Лев Сергеевич Маергойз — д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры «Бизнес-информатика», Институт управления бизнес-процессами и экономики, Сибирский федеральный университет; Красноярск, bear.lion@mail.ru.

<sup>ii</sup> Рем Григорьевич Хлебопрос — д.ф.-м.н., профессор; Институт экономики и природопользования, Сибирский федеральный университет; Международный научный центр исследований экстремальных состояний организма; Президиум КНЦ СО РАН; Красноярск.

в условиях чрезвычайной ситуации рейтинг пострадавших районов определялся возрастанием степени нуждаемости населения этих районов в распределяемом ресурсе, а числовая шкала содержала сведения о численности населения каждого района (Галькова, Маергойз, Хлебопрос, 2012). Цель нашей работы – показать, что упомянутую модель можно использовать в принципиально другой ситуации распределения денежного ресурса.

Для стимулирования достижений высоких показателей участников трудового коллектива за определенный период нередко создается премиальный фонд. Для решения проблемы распределения премиального фонда в трудовом коллективе введем две шкалы: *рейтинг категорий продуктов труда* в направлении возрастания их качества, трудоемкости их изготовления (*шкала качества*) и числовую шкалу, характеризующую объем выполненной работы участниками коллектива для создания продуктов труда каждой категории (*шкала количества*). Например, на кондитерской фабрике, где производят разные сорта печенья, конфет, тортов и пр., можно ввести рейтинг этих продуктов в направлении возрастания сложности технологий их изготовления. В отличие от рассмотренных ранее случаев распределения ресурса при наличии *рейтинга потребителей* тот или иной участник коллектива может участвовать в создании продуктов труда, принадлежащих к *разным* категориям.

Основные результаты заметки были изложены в (Маергойз, 2014; Маергойз, Хлебопрос, 2014).

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕМИАЛЬНОГО ФОНДА В НАУЧНОМ КОЛЛЕКТИВЕ

Для иллюстрации алгоритма рассмотрим задачу оптимального распределения премиального фонда в научном коллективе. Предлагаемый алгоритм направлен на объективизацию принимаемых решений при выдаче денежных вознаграждений членам коллектива за проделанную работу в определенный период времени. Существующие в литературе и практике подходы и алгоритмы нередко подвергаются конструктивной критике. Отметим, что проблема социальной справедливости практически мало учитывается при оценке и сопоставлении достижений того или иного научного коллектива.

Перейдем к изложению *оптимизационной математической модели* распределения премиального фонда среди сотрудников научного коллектива. С математической точки зрения она не отличается от модели, рассмотренной в работе (Галькова, Маергойз, 2015), но интерпретация параметров модели в этом случае существенно меняется.

Условимся качество каждой научной статьи определять категорией печатного издания, где она опубликована. Первая категория – сборники (как правило, не рецензируемых) научных работ; вторая – журналы из списка ВАК и рецензируемые иностранные журналы без импакт-фактора; далее идут журналы с определенным диапазоном изменения импакт-фактора в направлении его возрастания. В ряде научных коллективов, к которым, в частности, относятся университеты, трудятся специалисты, ведущие исследования в различных областях знаний (математики, физики, биологи, химики и др.). Диапазон изменения импакт-фактора научной продукции зависит от профиля тех или иных исследований. Например, импакт-фактор математических журналов не превышает 4, физических – достигает ~20. Поэтому в таких коллективах целесообразно вводить рейтинг категорий научной продукции, измеряя импакт-фактор научной работы в относительной шкале, а именно определяя отношение импакт-фактора журнала, где опубликована эта работа, к максимальному импакт-фактору научной продукции той области знаний, к которой она относится.

Введем обозначения:  $N > 2$  – число категорий печатных изданий;  $C$  – размер премиального фонда (в денежном выражении);  $S_i$  – число печатных листов (п.л.) всех научных работ коллектива, опубликованных в изданиях с номером  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $S = \sum_{i=1}^N S_i$  – вся научная продукция коллектива (в п.л.);  $c = C / S$  – средняя плотность премиального денежного ресурса на 1 п.л. продукции. С математической точки зрения распределение премиального фонда означает разбиение на сумму величины

$$C = \sum_{i=1}^N C_i, \quad (1)$$

где  $C_i$  — размер части фонда, предназначенный для поощрения научных работ, опубликованных в изданиях с номером  $i$ . Обозначим через  $c_i = C_i / S_i$  среднюю плотность денежного ресурса на 1 п.л. продукции в этих изданиях.

Для дальнейшего изложения удобно использовать безразмерные величины  $\lambda_i = c_i / c$ ,  $i = 1, \dots, N$  (безразмерные плотности ресурса для всех категорий печатных изданий). Множество их допустимых значений определяется следующим соотношением (Галькова, Маергойз, 2015, предложение 1):

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i s_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N s_i = 1 \quad (s_i > 0), \quad (2)$$

где  $s_i = S_i / S$  — доля печатной продукции для категории с номером  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . При выбранных фиксированных значениях коэффициентов  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  размеры вознаграждения за продукцию каждой категории изданий задаются формулой

$$C_i = c \lambda_i S_i = \lambda_i s_i C, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Дальнейшее изложение опирается на разработанные ранее принципы оптимального распределения ресурса (Галькова, Маергойз, 2015). Напомним их содержание.

Естественным является **принцип пропорциональности** распределения денежного ресурса: *внутри любой категории каждый член коллектива получает вознаграждение в размере, пропорциональном соответствующему числу п.л. его вклада в создание научного продукта, опубликованного в изданиях этой категории* (принцип пропорциональности внутри категории).

Введенный рейтинг означает нумерацию категорий изданий научной продукции в направлении возрастания их плотностей ресурса  $0 < c_1 < \dots < c_N$ , тогда

$$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N, \quad (4)$$

причем, как следует из (2),  $\lambda_1 < 1$ ,  $\lambda_N \in (1, 1/s_N)$ .

Осуществим выбор этих параметров исходя из следующего принципа: *вектор  $(c_2 - c_1, c_3 - c_2, \dots, c_N - c_{N-1})$ , координаты которого характеризуют разности плотностей ресурса для категорий со смежными номерами, имеет наименьшую длину* (принцип оптимальности).

Ассоциируем с принципом оптимальности целевой функционал

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2 = c^{-2} \sum_{i=1}^{N-1} (c_{i+1} - c_i)^2, \quad (5)$$

который можно назвать *функционалом справедливости, функционалом компромисса*. Он является аналогом среднего квадратичного тех же отклонений — популярного функционала в исследованиях прикладной математики, поскольку минимум каждого из этих функционалов при рассматриваемых ниже ограничениях на величины  $\lambda_i = c_i / c$ ,  $i = 1, \dots, N$  достигается при одних и тех же их значениях. За предлагаемым критерием распределения премиального фонда стоит принцип минимизации упомянутых функционалов, зависящих от разностей плотностей ресурсов для смежных по рейтингу категорий. Такой подход к выбору критерия сводит к минимуму возможную неудовлетворенность членов научного коллектива результатами распределения премиального фонда.

Минимум функционала  $\Phi$  (см. (5)) при условии (2) равен 0 и достигается при  $\lambda_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Это означает, что распределение фонда среди участников коллектива происходит пропорционально количеству п.л. их научной продукции любого качества. Это неприемлемо при наличии рейтинга между категориями. Чтобы этого избежать, для оптимизации параметров

математической модели распределения фонда при условии (5) (при наличии рейтинга «престижности» научной продукции) введем **принцип управления**, например, в виде равенства

$$\lambda_1 / \lambda_N = c_1 / c_N = \gamma, \quad (6)$$

где  $\gamma$  — фиксированное число из интервала  $(0, 1)$ , имеющее явно выраженный экономический смысл. В конкретном научном коллективе может быть выбрано наиболее востребованное значение величины  $\gamma$ .

Оптимальный выбор значений безразмерных плотностей ресурса для всех категорий печатных изданий определяется с помощью решения следующей экстремальной задачи: *найти значения параметров  $\lambda_i = \lambda_i^*$ ,  $i = 1, \dots, N$ , при которых достигается минимум функционала  $i = 1, \dots, N$  функционала  $\Phi$  (см. (5)) при выполнении соотношений (2), (4) и дополнительного условия (6).*

В наших обозначениях (см. (1), (2)) оптимальное количество  $C_i$  ресурса, предназначенное для вознаграждения за научную продукцию категории с номером  $i$ , определяется равенством

$$C_i = c\lambda_i S_i = \lambda_i s_i C, \quad i=1, \dots, N. \quad (7)$$

где  $\lambda_i = \lambda_i^*$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Значения этих параметров находятся с помощью стандартных методов оптимизации (Галькова, Маергойз, 2015, следствие 2).

Аналогичным образом можно поступить при распределении вознаграждений за написание монографий в научном коллективе, образуя рейтинг издательств. Например, первая категория — региональные издательства, вторая — федеральные, иностранные издательства среднего уровня; далее могут быть крупнейшие иностранные издательства (Springer, Birkhäuser, American Mathematical Society и т.п.).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гаврилец Ю.Н. (1992). Компромисс интересов и справедливость в оплате труда (модельный анализ) // *Экономика и математические методы*. Т. 28. № 4. С. 16–28.
- Галькова Е.А., Маергойз Л.С., Хлебопрос Р.Г. (2012). Математический алгоритм «справедливого» распределения гуманитарного ресурса и смежные вопросы // *Сиб. журн. индустр. матем.* Т. XV. № 4(52). С. 71–77.
- Галькова Е.А., Маергойз Л.С. (2015). Оптимизационная математическая модель двухуровневого распределения ограниченного ресурса между группами людей // *Экономика и математические методы*. Т. 51. № 3. С. 109–116.
- Маергойз Л.С. (2014). Математический алгоритм «справедливой» оплаты труда научного коллектива. В сб. «*Математические методы и модели в исследовании современных проблем экономики и общества*». Всероссийская молодежная научно-практическая конференция, 14–15 ноября 2014 г. Уфа: РИУ Башкирский гос. ун-т. Ч. 1. С. 31–34.
- Маергойз Л.С., Хлебопрос Р.Г. (2014). Математический алгоритм «справедливой» оплаты труда научного коллектива. Препринт. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т.
- Староверов О.В., Котельникова С.Н. (2001). Моделирование социально-экономических процессов. М.: Московский гос. ин-т электроники и математики.

#### REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Gavrielets Yu.N. (1992). Compromise of Interests and Justice in Remuneration of Labour (Simulation Study). *Econ. and Math. Methods*, 28, 4, 16–28 (in Russian).
- Gal'kova E.A., Maergoiz L.S., Khlebopros R.G. (2012). A Mathematical Algorithm of “Fair” Distribution of a Humanitarian Resource and Related Topics. *Siberian Journal of Industr. Mathem.*, 15, 4(52), 71–77 (in Russian).
- Gal'kova Ye.A., Maergoiz L.S. (2015). An Optimizational Mathematical Model of Two-Level Distribution of Limited Resources between Groups of People. *Econ. and Math. Methods*, 51, 3, 109–116 (in Russian).

- Maergoiz L.S.** (2014). Mathematical Algorithm of a “Just” Remuneration of Labour of a Research Team. In Proceedings “*Mathematical Methods and Models in Investigation of Modern Economic and Social Problems*”. All-Russian Youth Research-to-Practice Conference, 14–15 November, 2014. Ufa: Bushkir State University. Part 1, 31–34 (in Russian).
- Maergoiz L.S., Khlebopros R.G.** (2014). Mathematical Algorithm of a “Just” Remuneration of Labour of a Research Team. Preprint. Krasnoyarsk: Siberian Federal University (in Russian).
- Staroverov O.V., Kotel'nikova S.N.** (2001). Modelling of Social and Economic Processes (Teaching Aid). Moscow: Moscow State Institute of Electronics and Mathematics (in Russian).

## MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMAL DISTRIBUTION OF BONUS FUNDS

L.S. Maergoiz<sup>i</sup>, R.G. **Khlebopros**<sup>ii</sup>

**Abstract.** An optimization mathematical model of the distribution of bonus funds between participants of a working collective is proposed, if there is a rating of categories of work fruits in the direction of growth of their quality, their labor-consuming nature (quality scale) and a numerical scale that characterizes the amount of work done to manufacture the products of each category (quantity scale). A description of the models based on the following principles of an optimal distribution of limited resource: the principle of proportionality inside any category; the minimization principle of the quadratic functional depending on differences of the resource densities for the neighboring categories according to the rating; the direction principle. Its construction is illustrated on the example of the distribution of bonus funds in a research team. On the mathematical point of view this model does not differ from (worked out earlier) the distribution model of limited resource of social economic contents between consumers (people groups, which are under different conditions) in the presence of their rating and a numerical scale reflecting size of their needs.

**Keywords:** mathematical model, optimal distribution algorithm, extremal problem.

**JEL Classification:** A13.

---

<sup>i</sup> **Lev S. Maergoiz** – Doct. Sc. (Physics & Maths), Professor; Institute of Business Management and Economics, Siberian Federal University; Russia, Krasnoyarsk, bear.lion@mail.ru

<sup>ii</sup> **Rem G. Khlebopros** – Doct. Sc. (Physics & Maths), Professor; Institute of Economics, Management and Environmental Studies, Siberian Federal University; International Scientific Centre of Investigations of Organism Extremal States, Presidium of Krasnoyarsk Science Centre, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences; Russia, Krasnoyarsk.