ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2019, том 55, № 3, с. 62–73

ОТРАСЛЕВЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Динамические модели организации грузопотока на железнодорожном транспорте

© 2019 г. Л.А. Бекларян[i,*], Н.К. Хачатрян[ii,i,**]

[i] ЦЭМИ РАН, Москва
[ii] НИУ ВШЭ, Москва
[*]E-mail: beklar@cemi.rssi.ru [**]E-mail: nerses-khachatryan@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.03.2019 г.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00147, 19-010-00958).

Статья посвящена математическому моделированию процесса организации железнодорожных грузоперевозок на транспортной сети с большим числом промежуточных станций и расположенных между ними перегонов для временного хранения части грузов. Исследуется модель, прогнозирующая динамику загруженности станций и потоков, возникающих в транспортной сети, при заданной процедуре движения грузопотока, использующей две технологии, единые для всех станций. Первая технология основана на нормативных правилах взаимодействия соседних станций. Согласно ей интенсивность приема и отправки грузов на произвольной станции должна зависеть от загруженности соседних станций. Вторая технология зависит от технических возможностей станций и основана на взаимодействии станции с соседними перегонами. Неотъемлемой частью процесса организации грузоперевозок является система контроля. В данной модели применяется простая система контроля, при которой объемы грузов на соседних станциях должны совпадать с лагом времени, единым для всех станций. Такая модель описывается системой дифференциальных уравнений, удовлетворяющей нелокальным линейным ограничениям. Для этой модели исследуются режимы грузоперевозок, удовлетворяющие заданной системе контроля. Режимы описываются решениями типа бегущей волны и двумя типами их расширений. Один тип расширения зависит от корректировки технологий грузоперевозок и допускает разрывные решения, второй тип — от ослабления системы контроля и допускает выполнимость нелокальных линейных ограничений с заданной погрешностью. Стационарные режимы грузоперевозок исследуются на устойчивость.

Ключевые слова: математическая модель, организация грузоперевозок, система контроля, решения, квазирешения, стационарные решения, устойчивость, численная реализация.

Классификация JEL: C63.

DOI: 10.31857/S042473880005780-7

ВВЕДЕНИЕ

Одной из главных отраслей любого государства является транспорт, который выполняет связующую, коммуникационную и обеспечивающую функции. Эффективное функционирование транспортной системы невозможно без решения таких проблем, как оптимальное планирование сетей и улучшение организации движения. Для их решения применяется математическое моделирование транспортных сетей. Главная задача математических моделей — определение и прогноз всех параметров функционирования транспортной сети, таких как интенсивность движения на всех элементах сети, объемы перевозок в сети, средние скорости движения, задержки и потери времени и т.д.

Математические модели, применяемые для анализа транспортных сетей, разнообразны по решаемым задачам, математическому аппарату, используемым данным и степени детализации описания движения. Основываясь на функциональной роли моделей, т.е. на тех задачах, для решения которых они применяются, можно условно выделить три основных класса: прогнозные, имитационные и оптимизационные модели (Швецов, 2003, с. 3—46).

Прогнозные модели позволяют определить, какими будут транспортные потоки в сети при известных геометрии и характеристике транспортной сети. Прогноз загрузки транспортной сети включает в себя расчет усредненных характеристик движения, таких как объемы межрайонных передвижений, интенсивность потока, распределение транспортных средств по путям движения и др. При помощи прогнозных моделей можно прогнозировать последствия изменений в транспортной сети или в размещении объектов. Имитационное моделирование ставит своей целью воспроизведение всех деталей движения, при этом усредненные значение потоков и распределение по путям считаются известными и служат исходными данными для этих моделей. Таким образом, прогноз потоков и имитационное моделирование являются дополняющими друг друга направлениями (Гасников и др., 2013).

По функциональной роли к классу имитационных моделей можно отнести широкий спектр моделей динамики транспортного потока. В них может применяться разная техника — от имитации отдельного транспортного средства до описания динамики функции плотности транспортных средств на транспортной сети. Модели прогноза потоков и имитационные модели предназначены для адекватного воспроизведения транспортных потоков (Cremer, Ludwig, 1986; Nagel, Schreckenberg, 1992).

Существует множество моделей для оптимизации функционирования транспортных сетей. С их помощью решаются задачи оптимизации маршрутов перевозок, выработки оптимальной конфигурации сети и др. (Лившиц, 1987; Стенбринк, 1981; Галабурда, 1985; Авен, Ловецкий, Моисеенко, 1985; Васильева, Игудин, Лившиц, 1987; Leventhal, Nemhauser, Trotter, 1973).

По способу описания транспортных потоков все модели транспортных сетей можно разбить на классы: 1) аналоги, 2) следования за лидером, 3) вероятностные.

В моделях-аналогах движение транспортного средства уподобляется какому-либо физическому потоку (гидро- и газодинамические модели). Данный класс принято называть макроскопическими моделями (Гасников и др., 2013; Рождественский, Яненко, 1978; Сухинова и др., 2009; Иносэ, Хамада, 1983; Уизем, 1977; Lighthill, Whitham, 1955; Richards, 1956; Helbing, 2001; Kerner, 2009; Холодов и др., 2010).

В моделях следования за лидером существенно предположение о наличии связи между перемещением ведомого и головного транспортного средства (Pipes, 1953; Bando et al., 1994; Гасников и др., 2013; Bando et al., 1995; Helbing, Tilch, 1998).

В вероятностных моделях транспортный поток рассматривается как результат взаимодействия транспортных средств на элементах транспортной сети. В связи с жестким характером ограничений сети и массовым характером движения в транспортном потоке складываются отчетливые закономерности формирования очередей, интервалов, загрузок по полосам дороги и т.п. (Хейт, 1966; Renyi, 1964; Solomon, Wang, 1972). Эти закономерности носят существенно стохастический характер.

Данная статья посвящена математическому моделированию процесса организации железнодорожных грузоперевозок (Beklaryan, Khachatryan, 2006; Бекларян, Хачатрян, 2013; Khachatryan, Akopov, 2017). В данном исследовании транспортная сеть представляет собой протяженный участок пути с большим числом промежуточных станций и расположенными между ними перегонами для временного хранения части грузов. Движение грузопотока осуществляется в одном направлении (рис. 1). На произвольную промежуточную станцию груз может поступить с предыдущей станции или с перегона и отправляться с нее либо на следующую станцию, либо на перегон.

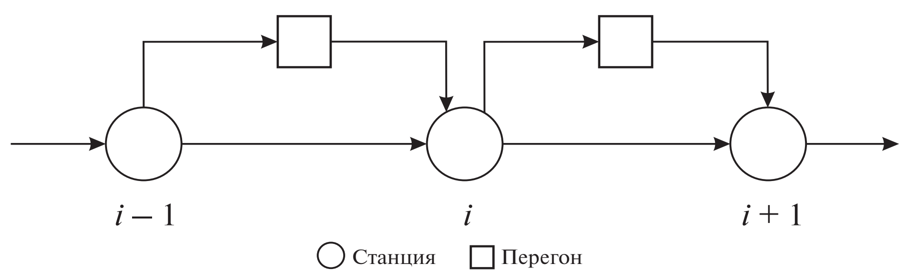

Рис. 1. Схема движения грузопотока

По своей функциональной роли представленная модель является прогнозной. Она позволяет прогнозировать динамику загруженности станций и потоков, возникающих в транспортной сети, при заданной процедуре движения грузопотока.

Процедура движения грузопотока использует две технологии, единые для всех станций. Первая технология основана на взаимодействии соседних станций и формируется по определенному правилу. Согласно этому правилу каждая станция должна принимать груз с предыдущей станции, если число задействованных путей на ней меньше, чем на предыдущей станции, и отправлять на следующую станцию, если число задействованных путей больше, чем на следующей станции. При этом интенсивность приема и интенсивность отправки грузов пропорциональны разности чисел задействованных путей на соседних станциях. Вторая технология использует технические возможности самой станции и основана на взаимодействии станции с соседними перегонными путями.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим три варианта модели в зависимости от конфигурации транспортной сети. Первая конфигурация транспортной сети характеризуется бесконечным числом станций как в одну, так и в другую сторону, определяет движение грузопотока на большие расстояния и предполагает отсутствие узловых станций. Такая конфигурация транспортной сети подходит для описания транснациональных перевозок (например, перевозки по транссибирской железнодорожной магистрали протяженностью более 9000 км). Вторая конфигурация задает движение грузопотока по замкнутой цепочке станций. Третья — характеризуется конечным числом станций и определяет движение грузопотока между двумя узловыми станциями.

На каждой станции существует определенное число путей (так называемые станционные пути). В данной модели мы не будем разделять станционные пути по их видам (главные, приемо-отправочные, погрузочно-выгрузочные, сортировочные и т.д.). Каждая станция i в произвольный момент времени t характеризуется числом задействованных путей $z_i(t)$. Это число отождествляется с объемом грузов на станции.

Согласно первой технологии каждая станция i должна:

1) принять груз с предыдущей станции с интенсивностью $\alpha(z_{i-1} - z_i)$, если $z_{i-1} > z_i$, и
2) отправить его на следующую станцию с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i+1})$, если $z_i > z_{i+1}$.

При нарушении первого условия станция с номером i отправляет груз на перегонный путь с интенсивностью $\alpha(z_i - z_{i-1})$, а при нарушении второго — принимает груз с перегонного пути с интенсивностью $\alpha(z_{i+1} - z_i)$. Параметр $\alpha > 0$ является нормативом правила взаимодействия соседних станций. Для всех станций существует единый критический уровень Δ числа задействованных станционных путей, при превышении которого необходимо экстренное освобождение путей (отправка части грузов для временного хранения на перегонный путь, расположенный после станции). Экс-

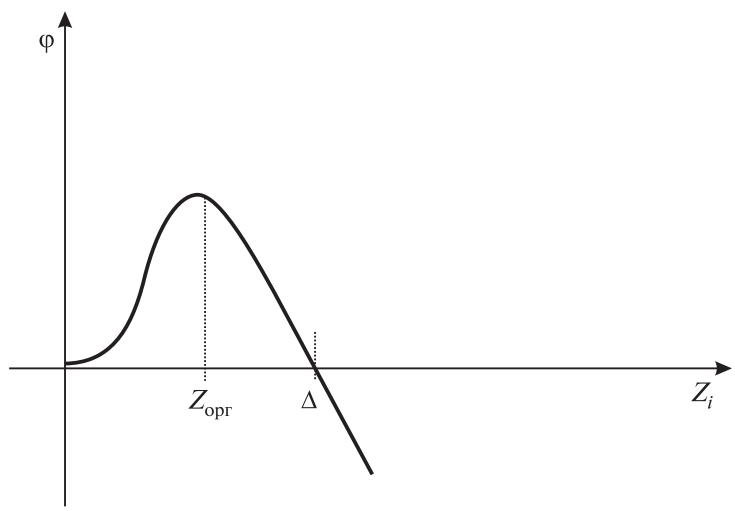

Рис. 2. Скорость изменения числа задействованных станционных путей в рамках второй технологии

тренное освобождение путей проводится с помощью второй технологии. Ее можно использовать и для приема грузов с перегонного пути, расположенного до станции (если число задействованных узлов на станции меньше Δ). График функции $\phi(\cdot)$, задающей скорость изменения числа задействованных путей в рамках данной технологии, представлен на рис. 2.

Организация грузоперевозок должна включать в себя систему контроля. В данной модели используется простая система контроля. Она заключается в том, что объемы грузов на соседних станциях должны совпадать с единым лагом времени $\tau > 0$. В нашей интерпретации она формулируется следующим образом: число задействованных путей на соседних станциях должны совпадать с единым лагом времени $\tau > 0$.

Рассмотрим каждый из вариантов модели.

2. ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ МОДЕЛИ

Первый вариант модели описывает грузоперевозки на участке пути с бесконечным числом станций как в одну, так и в другую сторону. Несложно заметить, что в такой транспортной сети динамика числа задействованных путей, определяемая описанными выше двумя технологиями, задается бесконечномерной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \phi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

а система контроля — нелокальными линейными ограничениями

$$z_i(t) = z_{i+1}(t+\tau), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \tag{2}$$

Возникает вопрос, существуют ли режимы грузоперевозок, осуществляемых с помощью указанных выше технологий и удовлетворяющих заданной системе контроля. Если такие режимы существуют, то каков диапазон изменений характеристики системы контроля? Дело в том, что диапазон изменения характеристики системы контроля τ должен быть актуальным. Слишком малые значения τ неактуальны, так как они значительно меньше времени перегона грузов со станции i на станцию $i + 1$. Слишком большие значения τ также неактуальны, так как они не соизмеримы с временными лагами реальных процессов.

Итак, нам надо получить ответы на следующие вопросы. Имеет ли система дифференциальных уравнений (1) решения, удовлетворяющие нелокальным линейным ограничениям (2)? Для какого диапазона изменения характеристики τ системы контроля такие решения существуют?

Прежде чем ответить на них, дадим точное определение решения системы дифференциальных уравнений (1).

Определение 1. Семейство абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_{i\in Z}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется *решением системы дифференциальных уравнений* (1), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют этой системе.

Решения системы (1)–(2) называются *решениями типа бегущей волны,* или солитонными решениями.

Доказано существование $\bar{\tau} > 0$ такого, что для всякого $\tau \in (0, \bar{\tau})$, $\bar{i} \in Z$, $\bar{z} \in R$, $\bar{t} \in [0, +\infty)$ система (1)–(2) с фиксированным начальным значением $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = \bar{z}$ имеет решение. Такое решение является единственным (Beklaryan, Khachatryan, 2006, с. 125—155).

В (Beklaryan, Khachatryan, 2006, p. 125—155) доказана теорема, согласно которой существует $\bar{\tau} > 0$ такое, что для любых $\tau \in \left(0, \bar{\tau}\right)$, $\bar{i} \in Z$, $\bar{z} \in R$, $\bar{t} \in [0, +\infty)$, система (1)–(2) с фиксированным начальным значением $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = \bar{z}$ имеет решение, причем единственное. То есть существует такой диапазон изменения характеристик системы контроля, что для каждого значения характеристики системы контроля из этого диапазона имеется единственный режим грузоперевозок, осуществляемый с помощью указанных выше технологий и удовлетворяющий заданной системе контроля. Значение $\bar{\tau} > 0$ зависит от параметра α и константы Липшица $\phi(\cdot)$, т.е. функции, отражающей возможности второй технологии по приему грузов с перегонного пути. С увеличением как параметра α, так и константы увеличение константы Липшица значение $\overline{\tau}$ уменьшается.

Возникает вопрос, можно ли в исследуемой транспортной сети в рамках описанных технологий организовать стационарный поток и насколько он окажется интенсивным. В нашей интерпретации интенсивность стационарного потока прямо пропорциональна загруженности станций, обеспечивающих такой поток (числу задействованных станционных путей). В наших обозначениях вопрос выглядит так, имеет ли система (1)–(2) стационарное решение и является ли оно устойчивым.

Система (1)–(2) имеет два стационарных решения: $\overline{z}_1 \equiv \{\ldots, 0, 0, 0, \ldots\}$, $\overline{z}_2 \equiv \{\ldots, \Delta, \Delta, \Delta, \ldots\}$. В (Beklaryan, Khachatryan, 2006, p. 125—155) доказано, что стационарное решение $\overline{z}_2 \equiv \{\ldots, \Delta, \Delta, \Delta, \ldots\}$ является устойчивым, а стационарное решение $\overline{z}_1 \equiv \{\ldots, 0, 0, 0, \ldots\}$ — неустойчивым. Таким образом, в рамках описанной модели можно организовать стационарный поток, в котором потенциал всех станций будет максимально использован.

3. ВТОРОЙ ВАРИАНТ МОДЕЛИ

Второй вариант является частным случаем первого, а именно движение по замкнутой цепочке станций. Он задается системой:

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \phi(z_i), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{3}$$

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{4}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t+\tau), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \tag{5}$$

В рассматриваемой модели цепочка состоит из n станций (рис. 3).

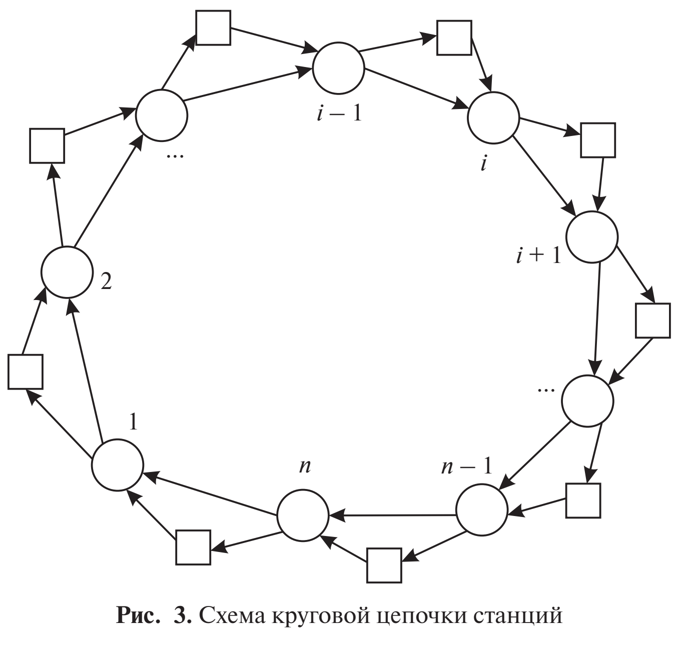

Рис. 3. Схема круговой цепочки станций

В (Бекларян, Хачатрян, 2013, с. 1649—1667) показано, что если система (3)–(5) имеет решение, оно будет периодическим с периодом τn. Одним из таких решений является стационарное решение $\{\ldots, \Delta, \Delta, \Delta, \ldots\}$. Возникает вопрос, имеет ли система (3)–(5) другие решения, кроме стационарного.

Было исследовано множество всех решений системы (3)–(4). Оказалось, что стационарное решение $\{\ldots, \Delta, \Delta, \Delta, \ldots\}$ является глобально асимптотически устойчивым в классе решений системы (3)–(4). Это означает, что система (3)–(5) не имеет других решений, кроме стационарного. Однако любое решение системы (3)–(4) со временем становится сколь угодно близким к стационарному решению (рис. 4). Отметим, что время выхода системы грузоперевозок на стационарный режим обратно пропорционально параметру α и константе Липшица $\phi(\cdot)$.

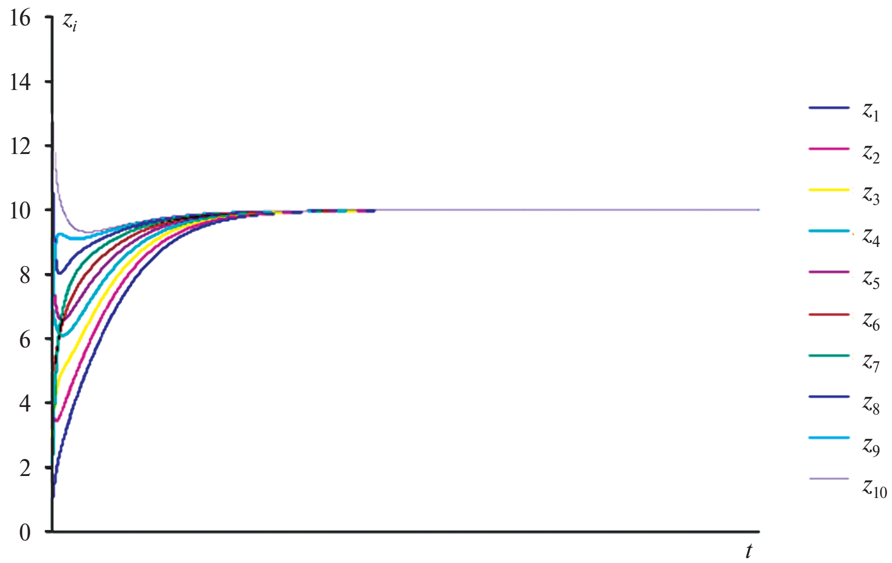

Рис. 4. Сходимость к стационарному решению (z_i, i=1, ..., 10)

4. ТРЕТИЙ ВАРИАНТ МОДЕЛИ

Третий вариант модели описывает движение грузопотока между двумя узловыми станциями. Пусть число промежуточных станций равно m, т.е. имеем множество номеров станций $\{0, \ldots, m, m + 1\}$. Интенсивность потока грузов, поступающих на начальную узловую станцию с железнодорожных направлений, будем описывать с помощью функции $\psi_1(\cdot)$, интенсивность потока грузов, распределяющихся с конечной узловой станции, — с помощью функции $\psi_2(\cdot)$. Модель задается системой:

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \phi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \tag{6}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \phi(z_i), \quad i = 1, \ldots, m, \quad t \in [0, +\infty), \tag{7}$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \phi(z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), \tag{8}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, \ldots, m, \quad t \in [0, +\infty). \tag{9}$$

Функция $\phi_0(\cdot)$ описывает вторую технологию на начальной узловой станции. На начальной узловой станции вторая технология используется только для разгрузки, и поэтому она обладает следующими свойствами: на полупрямой $(-\infty, \Delta]$ тождественно равна 0, а на полупрямой $(\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей. Вспомним, что в вариантах модели 1 и 2 правило приема и правило отправки грузов на произвольной станции зависели от числа задействованных путей на соседних станциях. В варианте 3 для начальной и конечной узловых станций данное свойство потока не выполняется. Это приводит к тому, что за исключением случая, когда функции $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ тождественно равны нулю (не имеющему экономического смысла), система (6)–(9) не имеет решения, т.е. невозможна организация грузопотока в рамках указанных технологий с описанной системой контроля. Это приводит к необходимости корректировки либо технологий грузоперевозок, либо системы контроля.

В первом случае такая корректировка достаточна только на узловых станциях. Она заключается в том, чтобы, управляя интенсивностью приема грузов на начальной узловой станции и интенсивностью отправки грузов с конечной узловой станции, добиться организации грузопотока с указанной системой контроля. Такая организация грузопотока связана с импульсными изменениями числа задействованных путей на станциях. Корректировка системы контроля заключается в ее ослаблении. Как в первом, так и во втором случае формально речь идет о правильном расширении класса решений системы (6)–(9), которые назовем *квазирешениями*.

Рассматривается два типа квазирешений. Первый тип предполагает эндогенные задания функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ начиная с момента времени, равного характеристике системы контроля, и допускает разрывные решения, второй тип — допускает малые нарушения в системе контроля (условие (9)).

Определение 2. Семейство кусочно абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_0^{m+1}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется *квазирешением системы* (6)–(9) первого типа с характеристикой τ, если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$удовлетворяют системе (6)–(9) с возможными разрывами в точках $k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$.

В (Beklaryan, Khachatryan, 2006, p. 125—155) доказано, что существует такое $\bar{\tau} > 0$, что для всякого $\tau \in (0, \bar{\tau})$, $\bar{i} \in Z$, $\bar{z} \in R$, $\bar{t} \in [0, +\infty)$ система (6)–(9) с фиксированным начальным значением $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = \bar{z}$ имеет квазирешение первого типа, и оно единственное.

Опишем способ получения таких квазирешений. Способ состоит из двух этапов. На первом этапе рассматривается ограничение системы (6)–(9) на отрезок $[0, \tau]$, которое представляет собой систему дифференциальных уравнений с краевыми условиями. Для нее в (Beklaryan, Khachatryan, 2006, p. 125—155) доказана теорема существования и единственности решения. На втором этапе полученное решение продолжается на полупрямую $(\tau, +\infty)$ (рекурсивно на каждом из интервалов $(k\tau, (k + 1)\tau)$, $k = 1, 2, \ldots$) таким образом, чтобы получить множество функций $\{\tilde{z}_i(\cdot)\}_0^{m+1}$, удовлетворяющих системе (6)–(9). Отметим, что при этом рекурсивное продолжение решения сопровождается рекурсивным продолжением функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$. Полученные, таким образом, функции $\tilde{z}_i(\cdot)$ имеют разрывы в точках, кратных τ. На рис. 5 приведен фрагмент графика квазирешения первого типа с периодическими на отрезке $[0, \tau]$ функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$.

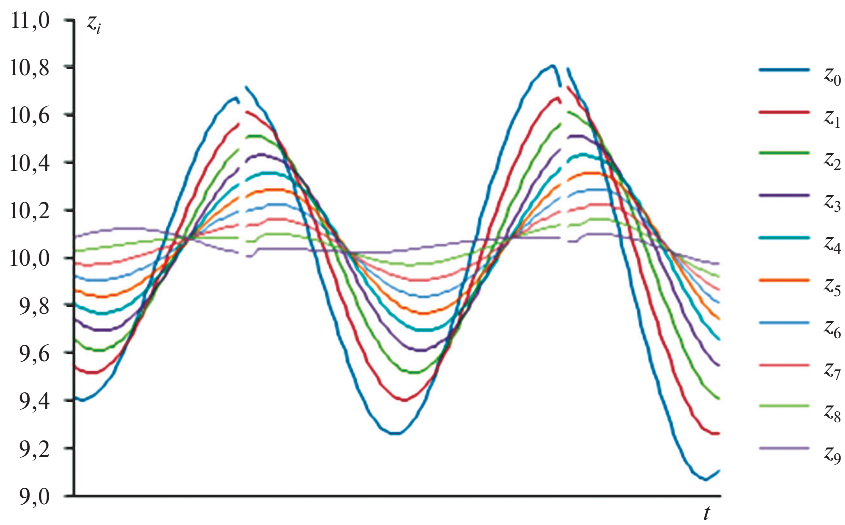

Рис. 5. Фрагмент графика квазирешений системы (6)–(9) первого типа (z_i, $i = 0, \ldots, 9$)

Следовательно, режим грузоперевозок, описываемый квазирешениями первого типа, предполагает импульсное изменение числа задействованных путей на станциях в моменты времени, кратные характеристике системы контроля. В связи с этим возникает вопрос, можно ли уменьшать разрывы в квазирешениях первого типа и как это сделать. Для этого нам потребуется следующее определение.

Определение 3. Квазирешение первого типа с характеристикой τ называется ε-*квазирешением первого типа* с характеристикой τ, если выполняются неравенства

$$|z_0(k\tau - 0) - z_0(k\tau + 0)| < \varepsilon \quad \forall k = 1, 2, \ldots.$$

Доказано (Beklaryan, Khachatryan, 2006, p. 125—155), что существует такое $\overline{\tau} > 0$, что для всякого $\tau \in (0, \overline{\tau})$ существует ε-квазирешение первого типа с характеристикой τ со сколь угодно малым ε > 0, т.е. разрывы в квазирешениях первого типа можно сделать сколь угодно малыми. Для этого необходимо импульсно изменить функцию $\psi_1(\cdot)$ в начальный период времени (рис. 6).

Приведем определение квазирешения второго типа.

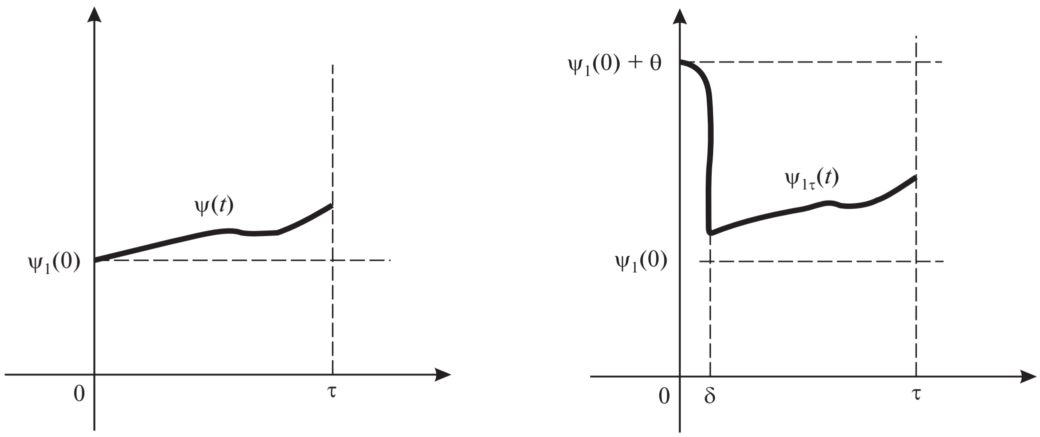

Рис. 6. Импульсное изменение функции $\psi_1(\cdot)$ в начальный период времени

Определение 4. Семейство абсолютно непрерывных функций $\{z_i(\cdot)\}_0^{m+1}$, определенных на [0, +∞), называется *ε-квазирешением системы* (6)–(9) *второго типа* с характеристикой τ, если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(\cdot)$ удовлетворяют системе (6)–(8) и выполняется условие

$$|z_i(t) - z_{i+1}(t+\tau)| < \varepsilon, \quad i = 0, \ldots, m, \quad t \in [0, +\infty). \tag{10}$$

Было исследовано множество всех решений системы (6)–(8). Доказано (Khachatryan, Akopov, Belousov, 2018, c. 61—70), что решения системы дифференциальных уравнений (6)–(8) являются ограниченными при ограниченности функций $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$.

Для периодических функций $\psi_1(t) = \psi_2(t) = d + \gamma\cos(\omega t),\ d \geq \gamma > 0$ и функций

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0; \\ ax(\Delta - x),\ a > 0 \text{ при } x \in [0, \Delta]; \\ -c(x - \Delta),\ c > 0 \text{ при } x \in (\Delta, +\infty), \end{cases}$$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq \Delta; \\ -c_0(x - \Delta),\ c_0 > 0 \text{ при } x \in (\Delta, +\infty) \end{cases}$$

были получены численные решения системы (6)–(8).

Согласно результатам исследований численных решений, начиная с некоторого момента времени $\overline{t} > 0$ решения системы (6)–(8) начинают колебаться в некоторой окрестности значения Δ и не зависят от начальных условий, причем компоненты решения удовлетворяют условию $z_0(t) > z_1(t) > \ldots > z_m(t) > z_{m+1}(t)$ для любого $t \in [\overline{t}, +\infty)$ (рис. 7). Это, в частности, означает, что мы не можем ставить вопрос о минимизации ε из неравенства (10) как функции от начальных значений.

Исследована зависимость решений системы дифференциальных уравнений (6)–(8) от параметров модели, в частности от параметра α. Оказалось, что с увеличением α окрестность числа Δ, в которой находятся решения системы (6)–(8), уменьшается (рис. 8). Это означает, что, увеличивая α, можно достичь выполнения неравенства (10) для любого τ > 0 со сколь угодно малым ε > 0, т.е. получить ε-квазирешение системы (6)–(9) второго типа с произвольной характеристикой τ > 0 со сколь угодно малым ε > 0.

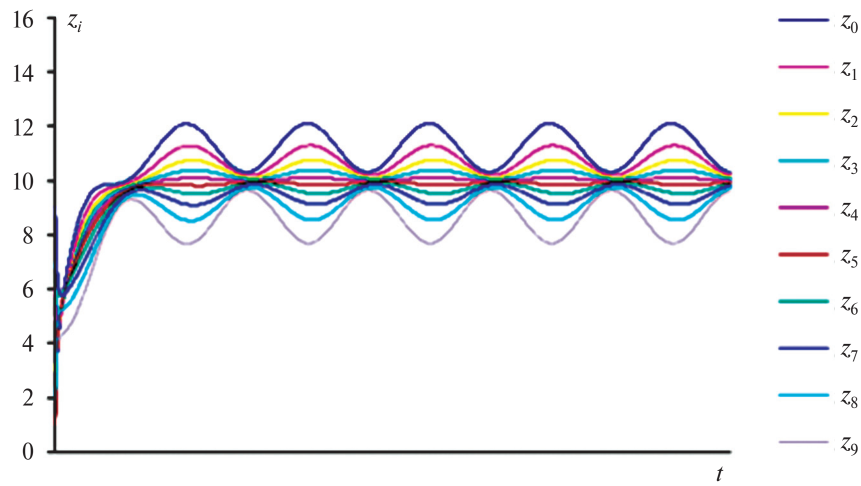

Рис. 7. Решение системы (6)–(8) с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ (z_i, $i = 0, \ldots, 9$)

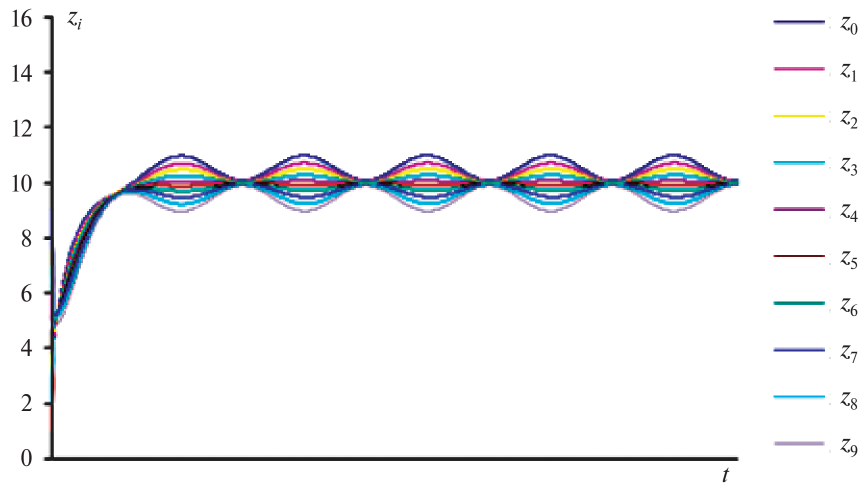

Рис. 8. Решение системы (6)–(8) с периодическими функциями $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ при увеличенном значении параметра α (z_i, $i = 0, \ldots, 9$)

Отметим, что на практике значение параметра α является ограниченным (в силу ограниченности инфраструктурных возможностей станций). В связи с этим в действительности мы не можем организовать грузопоток с помощью указанных технологий, который будет удовлетворять системе контроля со сколь угодно малой погрешностью, речь может идти только об организации грузоперевозок, удовлетворяющей системе контроля с минимально возможной погрешностью. Таким образом, с практической точки зрения квазирешения первого типа являются более предпочтительными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследовались динамические модели организации железнодорожных грузоперевозок, осуществляемые с помощью двух технологий и удовлетворяющие заданной системе контроля. Первая модель описывает транснациональные перевозки и характеризуется бесконечным числом станций как в одну, так и в другую сторону. Доказано, что существует диапазон $(0, \bar{\tau})$ изменения характеристики системы контроля τ такой, что для каждого значения характеристики системы контроля из указанного диапазона можно организовать контролируемый грузопоток с помощью заданных технологий. Доказано, что стационарный режим грузоперевозок, при котором осуществляется оптимальная загрузка станций, является устойчивым.

Вторая модель задает движение грузопотока по замкнутой цепочке станций. Доказано, что указанный выше стационарный режим в рамках данной модели асимптотически глобально устойчив.

Третья модель определяет движение грузопотока между двумя узловыми станциями. Организация грузопотока в рамках указанных технологий с описанной системой контроля оказывается невозможной. Поэтому осуществляются два способа модификации процесса организации грузоперевозок. Первый связан с корректировкой технологий грузоперевозок на узловых станциях и предполагает импульсное изменение интенсивности подачи грузов на начальную узловую станцию в начальный период времени с последующим управлением как указанной интенсивности, так и интенсивности распределения грузов с конечной узловой станции. Второй способ связан с ослаблением системы контроля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Авен О.И., Ловецкий С.Е., Моисеенко Г.Е. (1985). Оптимизация транспортных потоков. М.: Наука.

Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К. (2013). Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. Т. 53. № 10. С. 1649—1667.

Васильева Е.М., Игудин Р.В., Лившиц В.Н. (1987). Оптимизация планирования и управления транспортными системами. М.: Транспорт.

Галабурда В.Г. (1985). Оптимальное планирование грузопотоков. М.: Транспорт.

Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. (2013). Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Под ред. Гасникова А.В. М.: МЦНМО.

Иносэ Х., Хамада Т. (1983). Управление дорожным движением. М.: Транспорт.

Лившиц В.Н. (1987). Автоматизация планирования и управления транспортными системами. М.: Транспорт.

Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. (1978). Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука.

Стенбринк П.А. (1981). Оптимизация транспортных сетей. М.: Транспорт.

Сухинова А.Б., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чубарова Н.Г. (2009). Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков // *Математическое моделирование*. Т. 21. № 2. С. 118—126.

Уизем Дж. (1977). Линейные и нелинейные волны. М.: Мир.

Хейт Ф. (1966). Математическая теория транспортных потоков. М.: Мир.

Холодов Я.А., Холодов А.С., Гасников А.В., Морозов И.И., Тарасов В.Н. (2010). Моделирование транспортных потоков — актуальные проблемы и пути их решения. В сб.: “*Труды МФТИ (специальный выпуск, посвященный математическому моделированию транспортных потоков)*”. Под ред. акад. В.В. Козлова. Т. 2. № 4 (8). С. 152—162.

Швецов В.И. (2003). Математическое моделирование транспортных потоков *// Автоматика и телемеханика*. № 11. С. 3—46.

Bando M., Hasebe K., Nakayama A., Shibata A., Sugiyama Y. (1994). Structure Stabily of Congestion in Traffic Dynamics // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*. Vol. 11. P. 203—223.

Bando M., Hasebe K., Nakayama A., Shibata A., Sugiyama Y. (1995). Dynamical Model Congestion and Numerical Simulation // *Physical Review E*. Vol. 51. P. 1035—1042.

Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. (2006). Traveling Wave Type Solutions in Dynamic Transport Models // *Functional Differential Equations*. Vol. 13. No. 12. P. 125—155.

Cremer M., Ludwig J. (1986). A Fast Simulation Model for Traffic Flow on the Basis of Boolean Operations // *Mathematics and Computers in Simulation*. Vol. 28. P. 297—303.

Helbing D. (2001). Traffic and Related Self-Driven Many Particle Systems // *Reviews of Modern Physics*. Vol. 73. No. 4. P. 1067—1141.

Helbing D., Tilch B. (1998). Generalized Force Model of Traffic Dynamics // *Physical Review E*. Vol. 58. P. 133—138.

Kerner B.S. (2009). Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control. The Long Road to Three-Phase Traffic Theory. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Khachatryan N.K., Akopov A.S. (2017). Model for Organizing Cargo Transportation with an Initial Station of Departure and a Final Station of Cargo Distribution // *Business Informatics*. No. 1. P. 25—35.

Khachatryan N.K., Akopov A.S., Belousov F.A. (2018). About Quasi-Solutions of Traveling Wave Type in Models for Organizing Cargo Transportation // *Business Informatics*. No. 1 (43). P. 61—70.

Leventhal T., Nemhauser G.L., Trotter L. Jr. (1973). A Column Generation Algorithm for Optimal Traffic Assignment // *Transportation Science*. No. 7. P. 168—176.

Lighthill M.J., Whitham G.B. (1955). On Kinematic Waves: II. A Theory of Traffic on Long Crowded Roads // *Proceedings of the Royal Society*. *Ser. A*. Vol. 229. P. 317—345.

Nagel K., Schreckenberg M. (1992). A Cellular Automaton Model for Freeway Traffic // *Journal de Physique I*. Vol. 2. P. 2221—2229.

Pipes L.A. (1953). An Operational Analysis of Traffic Dynamics // *Journal of Applied Physics*. Vol. 24. P. 274—281.

Renyi A. (1964). On Two Mathematical Models of the Traffic on a Divided Highway // *Journal of Applied Probability*. Vol. 1. P. 311—320.

Richards P.I. (1956). Shock Waves on the Highway // *Operations Research*. Vol. 4. P. 42—51.

Solomon H., Wang P. (1972). Nonhomogeneous Poisson fields of Random Lines with Applications to Traffic Flow // *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Vol. 3. P. 383—400.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Aven O.I., Lovetskii S.E., Moiseenko G.E. (1985). Optimization of Traffic Flows. Moscow: Nauka (in Russian).

Bando M., Hasebe K., Nakayama A., Shibata A., Sugiyama Y. (1994). Structure Stabily of Congestion in Traffic Dynamics. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 11, 203—223.

Bando M., Hasebe K., Nakayama A., Shibata A., Sugiyama Y. (1995). Dynamical Model Congestion and Numerical Simulation. *Physical Review E*, 51, 1035—1042.

Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. (2006). Traveling Wave Type Solutions in Dynamic Transport Models. *Functional Differential Equations*, 13, 12, 125—155.

Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. (2013). On One Class of Dynamic Transportation Models. [Ob odnom klasse dinamicheskikh modeley gruzoperevozok.] *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 53, 10, 1649—1667 (in Russian).

Cremer M., Ludwig J. (1986). A Fast Simulation Model for Traffic Flow on the Basis of Boolean Operations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 28, 297—303.

Galaburda V.G. (1985). Optimal Planning of Cargo Traffic. [Optimal'noe planirovanie gruzopotokov.] Moscow: Transport (in Russian).

Gasnikov A.V., Klenov S.L., Nurminskii E.A., Kholodov Ya.A., Shamrai N.B. (2013). Introduction to Mathematical Model Operation of Traffic Flows. Gasnikov A.V. (ed.). Moscow: MCCME (in Russian).

Haight F. (1966). The Mathematical Theory of Traffic Flows. Moscow: Mir (in Russian).

Helbing D. (2001). Traffic and Related Self-Driven Many Particle Systems. *Reviews of Modern Physics*, 73, 4, 1067—1141.

Helbing D., Tilch B. (1998). Generalized Force Model of Traffic Dynamics. *Physical Review E*, 58, 133—138.

Inose H., Hamada T. (1983). Road Traffic Control. Moscow: Transport (in Russian).

Kerner B.S. (2009). Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control. The Long Road to Three-Phase Traffic Theory. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Khachatryan N.K., Akopov A.S. (2017). Model for Organizing Cargo Transportation with an Initial Station of Departure and a Final Station of Cargo Distribution. Business Informatics, 1, 25—35.

Khachatryan N.K., Akopov A.S., Belousov F.A. (2018). About Quasi-Solutions of Traveling Wave Type in Models for Organizing Cargo Transportation. *Business Informatics,* 1 (43), 61—70.

Kholodov Ya.A., Kholodov A.S., Gasnikov A.V., Morozov I.I., Tarasov V.N. (2010). Mathematical Modelling of the Traffic Flows — Current Problems and Prospects of their Decision. In: "*Proceedings of MIPT",* 2, 4 (8), 64—74 (in Russian).

Leventhal T., Nemhauser G.L., Trotter L.Jr. (1973). A Column Generation Algorithm for Optimal Traffic Assignment. *Transportation Science*, 7, 168—176.

Lighthill M.J., Whitham G.B. (1955). On Kinematic Waves: II. A Theory of Traffic on Long Crowded Roads. *Proceedings of the Royal Society*. *Ser. A,* 229, 317—345.

Livshits V.N. (1987). Automation of Planning and Control of Transport Systems. Moscow: Transport (in Russian).

Nagel K., Schreckenberg M. (1992). A Cellular Automaton Model for Freeway Traffic. *Journal de Physique I*, 2, 2221—2229.

Pipes L.A. (1953). An Operational Analysis of Traffic Dynamics. *Journal of Applied Physics,* 24, 274—281.

Renyi A. (1964). On Two Mathematical Models of the Traffic on a Divided Highway. *Journal of Applied Probability*, 1, 311—320.

Richards P.I. (1956). Shock Waves on the Highway. *Operations Research,* 4, 42—51.

Rozhdestvenskii B.L., Yanenko N.N. (1978). Systems of Quasilinear Equations and their Applications to Gas Dynamics. Moscow: Nauka (in Russian).

Shvetsov V.I. (2003). Automation and Remote Control. *Avtomatika i Telemekhanika*, 11, 3—46 (in Russian).

Solomon H., Wang P. (1972). Nonhomogeneous Poisson Fields of Random Lines with Applications to Traffic Flow. *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 3, 383—400.

Steenbrink P.A. (1981). Optimization of Transport Networks. Moscow: Transport (in Russian). [Translated from Steenbrink P.A. (1974). Optimization of Transport Networks. New York: Wiley.]

Sukhinova A.B., Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G. (2009). Two-Dimensional Macroscopic Model of Traffic Flows. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 1, 6, 669—676 (in Russian).

Vasil'eva E.M., Igudin R.V., Livshits V.N. (1987). Optimization of Planning and Control of Transport Systems. Moscow: Transport (in Russian).

Whitham G. (1977). Linear and Nonlinear Waves. [Lineynye i nelineynye volny.] Moscow: Mir (in Russian).

Dynamic Models of Cargo Flow Organization on Railway Transport

© 2019 L.A. Beklaryan[i,*], N.K. Khachatryan[ii,i,]**

[i] *Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[ii] *National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia*
[*] *E-mail: beklar@cemi.rssi.ru* [**] *E-mail: nerses-khachatryan@yandex.ru*

Received 11.03.2019

The work was carried with partial financial support by the Russian Foundation for Basic Research (project 19-01-00147 and 19-010-00958).

This article is devoted to mathematical modeling of the process of organization of railway transportation on the transport network, which is a long section of the road with a large number of intermediate stations and located between them railway tracks for temporary storage of cargo. We investigate a model that predicts dynamics of congestion of stations and streams arising in the transportation network, under a given procedure traffic that uses the two technologies, the same for all stations. The first technology is based on the normative rules of interaction of neighboring stations. According to it, the intensity of the reception and dispatch of goods at an arbitrary station should depend on the workload of neighboring stations. The second technology uses the technical capabilities of the stations, and is based on the interaction of the station with neighboring railway tracks. An integral part of the organization of cargo transportation is a control system. This model uses a simple control system, which is that the volume of goods at neighboring stations must coincide with the time lag common to all stations. This model is described by a system of differential equations satisfying nonlocal linear restrictions. For this model the modes of cargo transportation satisfying the given control system are investigated. Such modes are described by solutions of the traveling wave type and two types of their expansions. One type of expansion is associated with the adjustment of transportation technologies and allows discontinuous solutions, the second type of expansion is associated with the weakening of the control system and allows the feasibility of nonlocal linear constraints with a given error. Stationary modes of transportation are investigated for stability.

Keywords: mathematical model, organization of cargo transportation, control system, solutions, quasi-solutions, stationary solutions, stability, numerical realization.

JEL Classification: C63.

DOI: 10.31857/S042473880005780-7