ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2016, том 52, № 1, с. 132–140

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ОБЪЕМОВ ПРОИЗВОДСТВА И ЦЕН РЕАЛИЗАЦИИ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МНОГОПРОДУКТОВОЙ МОНОПОЛИИ

© 2016 г. И.А. Лесик, А.Г. Перевозчиков

(Москва)

Предлагается алгоритм определения объемов производства и цен реализации, максимизирующих прибыль фирмы в условиях многопродуктового производства и общих ограничений на ресурсы. Данная статья основывается на работе (Мищенко, Артеменко, 2012). Главным отличием рассмотренной в статье модели является предположение о возможности помимо объемов производства устанавливать цены реализации продукции. Как и в модели Мищенко–Артеменко, исследован случай планирования на один период. Доказано, что решение исходной задачи оптимизации недоминируемых по Парето цен и объемов производства сводится к задаче квадратичного программирования по ценам, которая может быть решена с использованием методов квадратичного программирования. Для динамической модели инвестиций, изученной в работе (Перевозчиков, Лесик, 2014 г.), это позволяет определить альтернативную функцию годового дохода для монополий. Статья обобщает модель монополии из работы (Васин, Морозов, 2005) на случай многопродуктового рынка. Для этого вводится функция предложения и определяется равновесие по Вальрасу. Доказана теорема существования и единственности равновесных и монопольных цен, недоминируемых по Парето. Получен геометрический смысл равновесных и монопольных цен, позволяющий оценить, насколько монопольные цены могут быть больше равновесных.

Ключевые слова: многопродуктовая модель монополии, объемы производства, цены реализации, общие ограничения на ресурсы, оптимальная стратегия.

Классификация JEL: O12, C51.

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается задача определения оптимальных объемов производства и цен реализации в линейной многопродуктовой модели, изученной в работах (Перевозчиков, Лесик, 2014а, 2014б, 2014в). Отличие состоит в том, что в указанных работах цены были экзогенными параметрами. Предполагается, что фирма является производителем разнотипной продукции и обладает монопольной силой. Горизонт планирования составляет один период, в котором спрос задается однозначной линейной функцией от цен реализации. Объем реализации выбирается из условия не превосходства его спросу по каждому виду продукции и общих ограничений на производственные ресурсы. В статье предлагается алгоритм определения объемов производства и цен реализации, максимизирующих прибыль в одном периоде.

Данная статья основывается на работе (Мищенко, Артеменко, 2012) в части исследования устойчивости от возможного изменения цен в смысле (Макаров, Рубинов, 1973). Главным отличием предложенной нами модели от модели Мищенко–Артеменко является предположение о возможности помимо объемов производства устанавливать цены реализации продукции. Данное предположение потребовало доказательств дополнительных свойств модели. В отличие от задачи линейного программирования определения объемов производства задача определения цен реализации является нелинейной, но сводится к задаче квадратического программирования. Решение этой задачи может быть осуществлено с использованием стандартных алгоритмов квадратического программирования.

В общем теоретико-игровом смысле работа развивает модель монополизированного однопродуктового рынка, рассмотренного в работе (Васин, Морозов, 2005) для случая многопродуктового рынка. Как и в указанной однопродуктовой модели, решение задачи осуществляется в два этапа: оптимизация по объемам при фиксированной цене и оптимизация по цене. Аналогично однопродуктовому случаю вводится функция предложения и определяется равновесие по Вальрасу в многопродуктовой модели. Полученные равновесные цены сравниваются с монопольными.

Актуальность моделей ценовой конкуренции для однопродуктовых рынков подтверждает множество исследований, с обзором которых можно ознакомиться в работе (Васин, 2005). В рамках данной статьи учитывается ограниченность производственных мощностей, но предполагается, что изменение объемов производства не влияет на оптимальное использование факторов производства. В связи с этим исследуемая задача об объемах производства и ценах реализации может рассматриваться как нелинейная задача математического программирования. Основной результат работы состоит в том, что она сводится к решению задачи квадратического программирования.

1. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ МНОГОПРОДУКТОВОЙ МОНОПОЛИИ

1.1. Постановка задачи. Имеется фирма, производящая товары n видов и использующая m видов ресурсов. Введем обозначения: $b_j > 0$, $j = 1,..., m$, – запасы ресурсов; $a_{ij} \geq 0$, $i = 1,..., m$; $j = 1,..., n$, – расходы ресурса i на изготовление единицы продукции вида j; $s_j = p_j - c_j$, $j = 1,..., n$, – маржинальный доход при реализации единицы продукции j; $p_j \geq 0$ – цена единицы продукции j; $c_j \geq 0$ – переменные затраты на производство единицы продукции j.

1.1.1. *Оптимизация по объему при фиксированной цене.* Фиксируем вектор цен $p \geq c$. Требуется составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль. Обозначим через x_j, $j = 1,..., n$, – объем выпуска продукции j. С учетом не отрицательности выпуска продукции получим классическую производственную задачу:

$$\begin{gathered} \langle s, x\rangle - C \to \max, \\ Ax \leq b, \ \ x \geq 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь C – постоянные расходы фирмы, $s = p - c = (s_1,..., s_n)'$, $b = (b_1,..., b_m)'$ – векторы-столбцы, $\langle s, x\rangle$ – скалярное произведение векторов s, x в евклидовом пространстве E_n, $A = \| a_{ij} \|$ – матрица $m \times n$.

Предположим, что матрица A имеет хотя бы один ненулевой элемент в каждой строке и столбце. Это означает, что каждый товар использует хотя бы один вид ресурсов и каждый ресурс востребован для производства хотя бы одного товара. Тогда множество X допустимых решений задачи (1) будет непусто и ограниченно. Кроме того, в силу условия $b > 0$ выполняется условие регулярности Слейтера (Карманов, 1980), т.е. существует внутренняя точка X. Неравенства между векторами здесь и далее следует понимать покомпонентно.

1.1.2. *Оптимизация по объему и цене.* Предположим, что фирма обладает монопольной силой. Потребители на этом рынке предполагаются мелкими. Их поведение характеризуется суммарной линейной функцией спроса $D(p) = D - Gp$, показывающей, какой объем каждого товара будет куплен при данном векторе цен. Фирма-монополист устанавливает цены на товары p и объемы производства товаров x. Здесь $p = (p_1,..., p_n)'$ – вектор–столбец цен $p_j \geq 0$, $D = (D_1,..., D_n)'$ – вектор-столбец предельных объемов спроса $D_j > 0$, $G = \mathrm{diag}(d)$ – диагональная $n \times n$-матрица, на диагонали которой стоят коэффициенты $d_j > 0$, $d' = (d_1,..., d_n)$ – вектор–строка коэффициентов $d_j > 0$.

Таким образом, стратегией монополиста является пара (p, x). Добавим ограничения, связывающие предельные объемы спроса $D_j > 0$, $j = 1,..., n$ и цены $c_j \leq p_j \leq P_j = D_j/d_j$, $j = 1,..., n$. Предположим, что $D > Gc$. Это неравенство эквивалентно условию $c < P$, т.е. не вырожденности задачи с точки зрения фирмы-монополиста. Тогда приходим к задаче максимизации его прибыли за счет одновременного выбора объемов производства и цен реализации продукции:

$$\begin{gathered} \sup_{x,\,p}\left\langle p - c, x\right\rangle - C, \\ \begin{cases} Ax \leq b, \\ Ex \leq D(p), \end{cases} \\ x \geq 0, \quad c \leq p \leq P. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь E – единичная $n \times n$-матрица, $P = (P_1,..., P_n)'$, $c = (c_1,..., c_n)'$ – n-мерные вектор-столбцы.

Поскольку увеличение вектора p или x не уменьшает значения критерия монополиста в (2), то среди решений (2) можно выделить множество недоминируемых по Парето решений (p, x) задачи (2).

Недоминируемым по Парето называется такое решение (p, x) задачи (2), что не существует другого допустимого решения $(p', x') \neq (p, x)$ задачи (2), для которого $p' \geq p$, $x' \geq x$.

Наша цель – показать, что существует единственное недоминируемое про Парето решение задачи (2). Тем самым будет доказано, что в классе недоминируемых по Парето решений (2) имеет место не только существование, но и единственность задачи (2).

В работах (Мищенко, Артеменко, 2012; Перевозчиков, Лесик, 2014в) изучалась, в частности, устойчивость маргинального (по объемам производства при фиксированной цене) значения критерия задачи (2) от возможного изменения цен в смысле (Макаров, Рубинов, 1973). Отличие состоит в том, что цены были экзогенными параметрами, а в настоящей работе предполагается помимо объемов производства устанавливать цены реализации продукции. В отличие от (1) задача (2) является задачей нелинейного программирования. Далее будет показано, что она сводится к задаче квадратического программирования. Данное утверждение потребует доказательство дополнительных свойств модели.

1.2. Свойства внутренней функции максимума по объемам производства. Обозначим через $K(p)$ конус $x \leq D(p)$; $X(p)$ – множество допустимых значений x задачи (2) при фиксированном p, $c \leq p \leq P$, тогда $X(p) = X \cap K(p)$. Пусть $[c, P]$ – параллелепипед $c \leq p \leq P$. Тогда при всех $p \in [c, P]$ множество $X(p)$ замкнуто и непусто, поскольку содержит $x = 0$. Более того, $X(p)$ будет непрерывно по Хаусдорфу в силу (Федоров, 1979, лемма 1.4) и, следовательно, функция максимума

$$F(p) = \max_{x \in X(p)} \langle p - c, x \rangle - C \tag{3}$$

существует и непрерывна по p на $[c, P]$ в силу (Федоров, 1979, лемма 1.1) и супремум в (2) можно заменить на максимум:

$$F^* = \max_{p \in [c, P]} F(p). \tag{4}$$

Следуя работе (Васин, Морозов, 2005) для монополизированного рынка можно, как и для конкурентного рынка, ввести функцию предложения $S(p) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} \langle p - c, x \rangle$ и определить равновесный по Вальрасу вектор цен $\tilde{p}$ такой, что $S(\tilde{p}) \cap D(\tilde{p}) \neq \Theta$. Здесь и далее Θ – означает пустое множество. Поскольку $D(p)$ однозначная вектор-функция, то последнее равносильно включению

$$D(\tilde{p}) \in S(\tilde{p}). \tag{5}$$

Функция предложения является замкнутозначной, выпуклозначной и ограниченной. По аналогии с функцией максимума (3) со связанными переменными введем функцию максимума с распадающимися переменными $f(p) = \max_{x \in X} \langle p - c, x \rangle - C$. Она также будет непрерывной. В силу представления $S(p) = \{x \in X \mid \langle p - c, x \rangle - f(p) - C \geq 0\}$ и (Федоров, 1979, лемма 1.3) точечно-множественное отображение $S(p)$ является замкнутым на компакте $[c, P]$. Для полной аналогии с однопродуктовым рынком (Васин, Морозов, 2005) необходимо считать $S(p)$ определенной на всем неотрицательном октанте E_n^+ пространства E_n, доопределив функцию спроса $D(p)$ по формуле $D(p) = \Pi^+(D - Gp)$. Здесь $\Pi^+ = (\Pi_1^+, \ldots, \Pi_n^+)$ – оператор проектирования в E_n на E_n^+, который в координатной записи представляется в виде $\Pi_j^+(D - \operatorname{diag} pd') = \max\{D_j - p_j d_j;\ 0\}$ $j = 1, \ldots, n$. Заметим, что эти функции являются выпуклыми по d_j.

1.3. Тривиальный случай решения задачи (4). Если $D - Gc \in X$, то $G(p) \subset X$ для любых $p, c \leq p \leq P$, $X(p) = X \cap K(p) = [0, D(p)]$ и недоминируемое по Парето решение задачи (3) при таких p тривиально и равно $x(p) = D(p)$. Поэтому задача поиска недоминируемых решений (4) сводится к решению задачи квадратического программирования с распадающимися переменными

$$F^* = \max_{c \leq p \leq P} \langle p - c, D(p) \rangle - C.$$

Соответствующие скалярные задачи имеют вид

$$F_j^* = \max_{c_j \le p_j \le P_j} (p_j - c_j)(D_j - p_j d_j), \quad (6)$$

где $P_j = D_j/d_j > 0$, $j = 1,..., n$. Тогда ее решение вычисляется по формуле $p_j^* = (D_j + c_j d_j)/(2d_j) = 0{,}5P_j + 0{,}5c_j$. Действительно, эта точка безусловного минимума выпуклой функции под знаком максимума в (6), причем принадлежащая отрезку $\lfloor c_j, P_j \rfloor$ Последнее следует из неравенства $c_j < 0{,}5P_j + 0{,}5c_j < P_j$, справедливого в силу условия $P > c$.

1.4. Нетривиальный случай решения задачи (4). Исходя из изложенного выше, нетривиальным является лишь случай $D - Gc \notin X$. Заметим, что в любом случае предполагается выполненным неравенство $D > Gc$, эквивалентное условию $c < P$ невыроженности задачи с точки зрения монополиста.

В этом случае при $c \le p \le P$ можно рассчитывать, что равновесный вектор цен даст точку, лежащую на северо-восточной границе множества X, т.е. недоминируемую по отношению Парето на множестве X допустимых векторов x объемов производства. А именно этот случай интересен нам с содержательной точки зрения.

Лемма 1. *Предположим, что $D(c) = P - Gc > 0$ и $D(c) \notin X$. Пусть $p \in [c, P]$, $x \in X(p) = X \cap K(p)$ – оптимальные цены и объемы, недоминируемые по отношению Парето на множестве оптимальных решений задачи. Тогда $D(p) \in X$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, что $D(p) \notin X$. Тогда найдется такой вектор $p' \in [c, P]$, $p' \ge p$, $p' \ne p$, что $x \in X \cap K(p')$, для которого критерий $\langle p' - c, x\rangle \ge \langle p - c, x\rangle$, что противоречит предположению об оптимальности пары p, x и ее недоминируемости на множестве оптимальных решений задачи. ■

Утверждение $D(p) \in X$ леммы 1 эквивалентно в силу (1) системе

$$A(D - Gp) \le b, \;\; p \le P. \quad (7)$$

Обозначим через $\mathbf{P} = D^{-1}(X)$ множество векторов p, удовлетворяющих условиям (7). Тогда множество $\mathbf{P}$ также будет иметь внутреннюю точку, т.е. удовлетворять условию регулярности Слейтера. Если $D(p) \in X$, то $X(p) = X \cap K(p) = [0, \mathrm{D}(p)]$ и недоминируемое по Парето решение задачи (3) при таких p тривиально и равно $x(p) = D(p)$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что $D(c) = P - Gc > 0$. Тогда задача нахождения недоминируемых решений задачи (4) сводится к решению задачи квадратического программирования со связанными переменными*

$$F^* = \max_{p \in \mathbf{P},\, p \ge c} \langle p - c, D(p)\rangle - C. \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $D(c) \notin X$ утверждение теоремы следует из леммы 1, а при $D(c) \in X$ имеем $\mathbf{P} \cap L(c) = [c, P]$, и мы получаем ранее рассмотренный в п. 1.1.4 тривиальный случай. Здесь $L(c) = c + E_n^+$– конус. ■

Замечание 1. Если точка $p^* = (c + P)/2 \in \mathbf{P}$, то она является решением $\hat{p}$ задачи (8). В противном случае решением задачи (8) будет ближайшая к точке p^* точка множества $\mathbf{P}$ по норме $\| p - p^* \|_d$, порождаемой скалярным произведением

$$\langle p, v\rangle_d = \sum_{j=1}^{n} d_j p_j v_j .$$

2. СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МОНОПОЛИИ

Теперь мы собираемся доказать, что при любом $c \in E_n^+$ единственной точкой равновесия p будет проекция c на $\mathbf{P}$ по норме $\| p - c \|_d$. Если точка $x = \Pi^+(D(p))$ удовлетворяет условию равновесия (5), т.е. является решением задачи (3), то в частности $x \in X = D(P)$. Поэтому далее можно считать, что $x = D(p)$, $p \in \mathbf{P}$. Эта точка должна удовлетворять необходимым и достаточным условиям оптимальности Куна–Таккера в дифференциальной форме (Карманов, 1980, с. 54): существуют такие $\lambda_i \geq 0,\ i \in I(x)$ и $\mu_j \geq 0,\ j \in J(x)$, что:

$$p - c = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i - \sum_{j \in J} \mu_j e_j, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \langle a_i, x \rangle = b_i,\ i \in I,\ \langle a_i, x \rangle < b_i,\ i \notin I, \\ x_j = 0,\ j \in J,\ x_j > 0,\ j \notin J. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $I(x) = \{i \in I \,|\, \langle a_i, x\rangle = b_i\}$, $J(x) = \{j \in J \,|\, x_j = 0\}$ – множества индексов активных ограничений, e_j – координатный вектор j в E_n, $j \in J = \{1,..., n\}$.

Таким образом, для нахождения точек равновесия на северо-восточной границе допустимого множества нужно выбрать какие-то подмножества индексов $I \subset \{1,..., m\} = M$ и $I \subset \{1,..., n\} = N$ и решить систему, которая получается подстановкой (9) в (10):

$$\begin{gathered} \left\langle a_i D(c) - G\left(\sum_{i \in I} \lambda_i a_i + \sum_{j \in J} \mu_j e_j\right)\right\rangle = b_i,\ i \in I, \\ D_j - c_j d_j - \sum_{i \in I} \lambda_i a_{ij} d_j + \mu_j d_j = 0, \quad j \in J, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \left\langle a_i D(c) - G\left(\sum_{i \in I} \lambda_i a_i + \sum_{j \in J} \mu_j e_j\right)\right\rangle < b_i,\ i \notin I, \\ D_j - c_j d_j - \sum_{i \in I} \lambda_i a_{ij} d_j + \mu_j d_j > 0, \quad j \notin J, \end{gathered} \tag{12}$$

после чего необходимо проверить неравенства:

$$\lambda_i \geq 0,\ i \in I, \quad \mu_j \geq 0,\ j \in J. \tag{13}$$

Замечание 2. Казалось бы, нужно проверить еще неравенство $p \geq 0$, однако оно является следствием (9) и второго равенства в (11), равносильных условию $p_j = P_j,\ j \notin J$, при условии $c \geq 0$. В самом деле, в силу (9) и неотрицательности величин $\lambda_i,\ i \in I$, имеем $p_j = c_j + \sum_{i \in I} \lambda_i a_{ij} \geq c_j \geq 0,\ \ j \notin J.$

При остальных j это следует из условий, эквивалентных (11): $p_j = P_j \geq 0,\ j \notin J.$

В случае, когда решение системы (11) единственно, для него следует проверить выполнение неравенств (12), (13). В противном случае решение находится из смешанной системы уравнений и неравенств (11)–(13). Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Равновесные ситуации соответствуют выбору таких подмножеств $I \subset M,\ J \subset N$, для которых множество решений системы* (11)–(13) *непусты.*

Нахождение всех ситуаций равновесия сводится к перебору 2^{m+n} подмножеств $I \subset M,\ J \subset N$ и решению для них смешанной системы уравнений и неравенств (11)–(13).

Далее, рассмотрим невырожденное преобразование $x = D(p) = D - Gp$, где $G = \mathrm{diag}(d)$ – диагональная $n \times n$-матрица с элементами $d_j > 0,\ j = 1,..., n,$ на диагонали. Тогда обратное преобразование имеет вид $p = G^{-1}(D - x) = P - G^{-1}(x)$ и переводит множество X в $\mathbf{P}$. Тогда условия (11)–(13) означают в системе координат p ближайшую к c по норме $\| p - c \|_d$ точку множества $\mathbf{P}$, которое переходит в X при преобразовании $x = D(p)$. В самом деле, рассмотрим задачу минимизации критерия $1/2\| p - c \|_d^2$ по p на множестве $\mathbf{P}$, определенном условиями $A(D - Gp) \leq b,\ \ Gp \leq GP,$ что эквивалентно (7). Тогда она должна удовлетворять необходимым и достаточным условиям оптимальности Куна–Таккера в дифференциальной форме (Карманов, 1980, с. 54): существуют такие $\lambda_i \geq 0,\ i \in I(p)$ и $\mu_j \geq 0,\ j \in J(p)$, что

$$-G(p - c) = \sum_{i \in I} \lambda_i G a_i + \sum_{j \in J} \mu_j d_j e_j, \tag{14}$$

$$\langle a_i, D - Gp \rangle = b_i,\ i \in I,\ \langle a_i, D - Gp \rangle < b_i,\ i \notin I, \tag{15}$$

$$p_j = P_j,\ \ j \in J,\ \ p_j < P_j,\ \ j \notin J.$$

Здесь $I(p) = \{i \in I \mid \langle a_i, D - Gp\rangle = b_i\}$, $J(p) = \{j \in J \mid p_j = P_j\}$ – множества индексов активных ограничений, e_j – координатный вектор j в E_n, $j \in J = \{1,..., n\}$.

Условие (14) в силу невырожденности диагональной матрицы G эквивалентно условию (9). Остается заметить, что система (15) эквивалентна (10) при $x = D(p)$. В силу существования и единственности ближайшей к c по норме $\| p - c \|_d$ точки p множества **P** справедлива следующая теорема о существовании и единственности равновесной точки в нетривиальном случае.

Теорема 2. *Равновесная ситуация p в общем случае $c \geq 0$ существует и единственна и является ближайшей к c точкой множества* **P**, *которое переходит в X при преобразовании $x = D(p)$.*

Замечание 3. В частности, при $c \in$ P (т.е. $D(c) = D - Gc \in X$) равновесным является вектор $\tilde{p} = c$ и можно оценить разницу между монопольными ценами $\hat{p} = (c + P)/2 \in \mathbf{P}$ и равновесными через

$$\hat{p} - \tilde{p} = (P - c)/2. \tag{16}$$

В общем случае равновесные и монопольные цены связаны неравенством $\left\langle \hat{p} - \tilde{p}, P - c \right\rangle \geq 0$. С учетом $P > c$ это означает, что линейная форма $\langle P - c, p\rangle_d$ с положительными коэффициентами принимает большее значение на векторе монопольных цен. Это следует из неравенств $\| \tilde{p} - c \|_d \leq \| \hat{p} - c \|_d$, $\| \hat{p} - (c + P)/2 \|_d \leq \| \tilde{p} - (c + P)/2 \|_d$, вытекающих из того факта, что точка $\tilde{p}$ является ближайшей к c точкой множества **P**, а точка $\hat{p}$ – ближайшей к $(c + P)/2$ точкой множества **P**.

Кроме того, в общем случае можно получить оценку $\| \hat{p} - \tilde{p} \|_d \leq 1/2 \| P - c \|_d$. Равенство (16) показывает, что эта оценка точная. Она основана на том, что проекция $\pi_{\mathrm{P}}(\cdot)$ на выпуклое множество P по норме $\| \bullet \|_d$, порожденной скалярным произведением $\left\langle \bullet, \bullet \right\rangle_d$, будет сжимающим отображением $\| \pi_{\mathrm{P}}(p) - \pi_{\mathrm{P}}(p') \|_d \leq \| p - p' \|_d$, т.е. не увеличивает расстояния между точками.

3. МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим следующий модельный пример решения задачи монополиста и нахождения соответствующих равновесий по Вальрасу.

Пример 1. При производстве двух видов продукции используются три вида ресурсов. Исходные данные приведены в таблице.

Базовая производственная задача (1) имеет вид:

$$\left\langle s, x \right\rangle - C = (p_1 - 20)x_1 + (p_2 - 15)x_2 - C \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 \leq 30, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0.$$

Таблица

Запасы сырья, b_i	Расход сырья на единицу продукции 1, a_{i1}	Расход сырья на единицу продукции 2, a_{i2}
20	2	1
12	1	1
30	1	3
Относительная себестоимость, c_j	20	15
Коэффициенты, d_j	0,15	0,20
Предельный спрос, D_j	13	15
Предельные цены, $P_j = D_j/d_j$	86,67	75

Точка $D(c) = (10,\ 12)' \notin X$, поэтому задача определения монопольных цен невырождена. Единственное непустое решения системы (11)–(13) соответствует выбору подмножества индексов $I = \{2\} \subset \{1, 2, 3\} = M$ и $J = \Theta \subset \{1, 2\} = N$. При этом система (11) принимает вид $\langle a_2, D(c) - \lambda_2 Ga_2\rangle = b_2$. Здесь $D(c) = D - Gc = (10,\ 12)'$, откуда получим $\lambda_2 = [\langle a_2, D(c)\rangle - b_2]/\langle a_2, Ga_2\rangle = 28{,}57$. Отсюда по формуле (9) можно записать $p = c + \lambda_2 a_2 = (48{,}57;\ 43{,}57)'$. При этом система (12) имеет вид

$$\langle a_i, D(c) - \lambda_2 Ga_2\rangle < b_i;\quad i = 1, 3;$$

$$D(c) - \lambda_2 Ga_2 > 0;$$

что верно. Условие (13) эквивалентно $\lambda_2 \geq 0$, что также выполняется. Таким образом, найденное значение $\tilde{p} = (58{,}57;\ 43{,}57)'$ представляет собой единственное равновесное значение на множестве $\mathbf{P}$, заданного системой (7): $A(D - Gp) \leq b,\ p \leq \mathbf{P}$. При этом точка безусловного максимума критерия в задаче (8) равна $p^* = P/2 + c/2 = (53{,}33;\ 45)'$ и принадлежит $\mathbf{P}$. Поэтому она является решением задачи (8) и дает единственный вектор монопольных цен $\hat{p} = p^* = (53{,}33;\ 45)'$. Разница между монопольными и равновесными ценами составляет $\Delta p = \hat{p} - \tilde{p} = (4{,}76;\ 1{,}85)' = (9{,}8;\ 4{,}2)'\%$.

4. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ И ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ

Экономический смысл производных моделей управления ресурсами для производственной задачи состоит помимо оптимизации доходности за один период в их дальнейшем использовании в инвестиционном проектировании. Оценке инвестиционной стоимости бизнеса посвящено много исследований (см. обзор в работе (Виленский, Лифшиц, Смоляк, 2004)). Однако до сих пор фундаментальный вопрос о связи инвестиций с операционной деятельностью компании остается открытым. В работе (Мищенко, Артеменко, 2012) предложены различные модели управления заемным капиталом, связывающие доход компании с тем, какую продукцию и в каком объеме оно будет выпускать и каким образом будут использованы ограниченные инвестиционные ресурсы, привлекаемые для пополнения оборотного капитала и расширения производственной базы предприятия. Эти задачи формально являются производными от классической производственной задачи. В (Мищенко, Артеменко, 2012) они ставятся и решаются как оптимизационные статические задачи, рассчитанные на один период.

Суть нашего подхода состоит в дальнейшем использовании функции дохода, связывающей максимальный доход предприятия в данном периоде с объемом произведенных до этого периода инвестиций. В работах (Перевозчиков, Лесик, 2014а, 2014б, 2014в) было показано, что функция дохода вогнута, и предложен метод ее аппроксимации. Это позволило в работе (Перевозчиков, Лесик, 2014г) поставить задачу оптимизации финансирования инвестиционного проекта как задачу дискретного оптимального управления. В работе показано, что оптимальное решение задачи в практически значимых случаях может быть получено с помощью рекуррентного уравнения для остатков по кредиту. Это уравнение может служить теоретической основой для исследования устойчивости инвестиционной стоимости компании по модели, предложенной в работах (Макаров, Рубинов, 1973). Такая задача обобщает производственную задачу на динамический случай и является микроэкономическим аналогом модели динамического межотраслевого баланса В. Леонтьева. При этом связь производственных задач осуществляется при помощи нежесткой связи вектора производственных ресурсов с объемом финансирования в основные средства, произведенного до текущего момента. Предложенная схема проходит и для случая предприятия, обладающего монопольной силой, рассмотренной в настоящей работе. Эти вопросы предполагается изложить в отдельной работе.

5. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Проведенные исследования линейной модели многопродуктовой монополии позволяют утверждать, что задача определения монопольных цен может быть корректно поставлена на множестве недоминируемых стратегий и сводится к нахождению точки, ближайшей к точке $(c + P)/2$, множества **P** по норме $\| p - p^* \|_d$. Задача определения равновесных цен также может быть корректно поставлена и сводится к задаче нахождения ближайшей к c точки множества **P**. Итеративные методы сопряженных направлений сходятся в ней за конечное число шагов (Карманов, 1980).

Альтернативная возможность решения эквивалентной задачи квадратического программирования за конечное число шагов связана с тем, что минимизация квадратичной формы на линейном многообразии сводится к решению системы линейных уравнений, а число граней многогранника **P** конечно (Поляк, 1983). В рамках этой возможности нахождение равновесных цен сводится к перебору 2^{m+n} подмножеств $I \subset M,\ J \subset N$ и решению для них смешанной системы уравнений и неравенств (11)–(13), что ограничивает применение этого способа сравнительно простыми тестовыми задачами, подобно тому, как это было сделано в модельном примере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Васин А.А. (2005). Некооперативные игры в природе и обществе. М.: МАКС Пресс.

Васин А.А., Морозов В.В. (2005). Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс.

Виленский П.Л., Лифшиц В.Н., Смоляк С.А. (2004). Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика. М.: Дело.

Карманов В.Г. (1980). Математическое программирование. М.: Наука.

Макаров В.Л., Рубинов Ф.М. (1973). Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука.

Мищенко А.В., Артеменко О.А. (2012). Модели управления производственно-финансовой деятельностью предприятия в условиях привлечения заемного капитала // *Финансовая аналитика: проблемы и решения*. № 42 (132). С. 2–13.

Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. (2014а). Простейшая модель инвестиций в основные средства предприятия // *Аудит и финансовый анализ*. № 2. С. 233–440.

Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. (2014б). Модельный пример инвестиций в основные средства компании // *Аудит и финансовый анализ*. № 3. С. 267–276.

Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. (2014 в). Общая модель инвестиций в основные средства предприятия // *Аудит и финансовый анализ*. № 4. С. 206–209.

Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. (2014г). Нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия. В сб.: "*Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова*". Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс. № 46. С. 76–88.

Поляк Б.Т. (1983). Введение в оптимизацию. М.: Наука.

Федоров В.В. (1979). Численные методы максимина. М.: Наука.

Поступила в редакцию
05.03.2015 г.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Fedorov V.V. (1979). Numerical Methods of Maximin. Moscow: Nauka (in Russian).

Karmanov V.G. (1980). Mathematical Programming. Moscow: Nauka (in Russian).

Makarov V.L., Rubinov F.M. (1973). The Mathematical Theory of Economic Dynamics and Balance. Moscow: Nauka (in Russian).

Mishchenko A.V., Artemenko O.A. (2012). Management Models of Industrial and Financial Activity of the Company in Debt Financing. *Financial Analytics: Science and Experience* 42(132), 2–13 (in Russian).

Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2014a). The Easiest Non-Stationary Model of Investments in the Fixed Assets of the Company. *Audit and Financial Analysis* 2, 233–440 (in Russian).

Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2014б). Model Example of Investment in Fixed Assets of the Company. *Audit* *and Financial Analysis* 3, 267–276 (in Russian).

Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2014в). The General Model of Investments in the Fixed and Current Assets of the Company. *Audit and Financial Analysis* 4, 206–209 (in Russian).

Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2014г). Non-stationary model of investment in fixed assets of the company. *Applied Mathematics and Informatics.* Collection of Scientific Papers of the Faculty CMC MSU V.I. Dmitriev (ed.). Moscow: MAKS Press, 46, 76–88 (in Russian).

Polyak B.T. (1983). Introduction to Optimization. Moscow: Nauka (in Russian).

Vasin A.A. (2005). Non-Cooperative Games in Nature and Society. Moscow: MAKS Press (in Russian).

Vasin A.A., Morozov V.V. (2005). Game Theory and Models of the Mathematical Economics. Moscow: MAKS Press (in Russian).

Vilenskiy P.L., Lifshits V.N., Smolyak S.A. (2004). Estimation of Efficiency of Investment Projects. Theory and Practice. Moscow: Delo (in Russian).

Determination of the Optimal Production Volumes and Sales Prices in the Linear Model of Multiproduct Monopoly

I.A. Lesik, A.G. Perevozchikov

An algorithm of determining the volume of production and sales prices, maximizing firm profit in a multiproduct manufacturing and general resource limits is proposed. This article is based on the ideas of (Mishenko and Artyomenko, 2012). The main peculiarity of the model dis-cussed in the article is the assumption that in addition to the production volumes it enables to set the product selling price. As in the Mishchenko-Artyomenko model, the case planning for one period is analyzed. It is proved that the decision of the primary problem of optimizing Pareto non-dominant process and output volumes can be reduced to the problem of quadratic program-ming. It allows to find an alternative function of annual income for monopolies for the dynamic model of investment described in (Perevozchikov, Lesik, 2014). A model of monopoly from (Vasin, Morozov, 2005) for multiproduct market is analyzed in the article. A function of supply and Walras equilibrium is proposed for the purpose. Proved the theorem of existence and uniqueness of balanced and monopolistic prices, Pareto non-dominated. Obtained geometrical balanced and monopolistic prices providing the difference between monopolistic and balanced prices.

Keywords: multiproduct monopoly model, production volume, sales prices, general limitations on resources, the optimal strategy.

JEL Classification: O12, C51.