ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2016, том 52, № 2, с. 75–90

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАМКНУТОГО ОДНОТОВАРНОГО РЫНКА С КОНЕЧНЫМИ АВТОМАТАМИ В КАЧЕСТВЕ УЧАСТНИКОВ*

 М.М. Вороновицкий

(Москва)

В работе исследуется динамическая модель замкнутого однотоварного рынка, рассматриваемого как объединение автономных взаимодействующих участников. Замкнутость рынка означает, что количество товара и количество денег на рынке одни и те же во все моменты времени. В любой момент времени каждый участник может иметь один из статусов: продавец, покупатель или не участвовать в торговле. Взаимодействие между участниками осуществляется посредством торговли. Используя информацию о результатах своей торговли в предыдущий момент времени и стремясь обеспечить себе максимальную прибыль, участники переходят в новые статусы и назначают новые цены. Главным результатом этой работы представляется включение в модель конечных автоматов в качестве алгоритмов выбора степени риска при назначении цены участниками торговли. Компьютерное исследование модели показало сходимость средней цены рынка к окрестности некоторого ее усредненного значения. Также в статье изучается влияние емкости памяти автоматов, представляющих участников рынка, на поведение всей системы.

Ключевые слова: математическая модель, замкнутый рынок, однотоварный рынок, динамика цен, траектория, стационарное множество, стационарное состояние, конечные автоматы.

Классификация JEL: C51, D01.

1. ВВЕДЕНИЕ

Процесс торговли на рынках регламентируется некоторыми правилами и нормами, включающими в качестве одного из основных элементов ограниченность информации, которую используют участники рынка при принятии решения, и их автономность в принятии решения. Решения агентов определяют несколько логически связанных обменов, направленных на извлечение прибыли за счет разницы в ценах на товар в последовательные моменты времени. Результатом деятельности таких рынков оказывается формирование экономических параметров, влияющих на функционирование экономики. Большой интерес со стороны экономической науки к описанию и изучению таких систем порожден именно этим влиянием.

Модели подобных рынков должны включать в себя простые, но существенные и логически оправданные черты взаимодействия агентов и алгоритмы принятия решений, отражающие характер механизмов торговли и принятия решений участниками реальных рынков. Усложнение таких моделей позволяет последовательно включить в них механизмы взаимодействия и принятия решения, являющиеся более сложными и при этом точнее отражающими реальную ситуацию. Такой подход изучает процесс на уровне микроописания, и его можно рассматривать как частное приложение общей теории агент-ориентированных моделей, представленной, например, в работе (Макаров, 2012).

В работе (Цетлин, 1969) рассматривались модели поведения конечного автомата в случайной среде, коллектива конечных автоматов, а также игры автоматов. Эти исследования являются источником нашего подхода к модели рынка. Данная работа послужила ориентиром для описания

* Работа выполнена в Институте проблем рынка РАН и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-06-00110).

взаимодействия и поведения участников при разработке нами моделей однотоварного незамкнутого рынка, где рынок представлен как система взаимодействующих простейших автоматов (Вороновицкий, 1974). При исследовании этих моделей было доказано, что при любом начальном состоянии рынка траектория средней цены на рынке за некоторое время всегда приходит в окрестность состояния системы, в котором спрос и предложение на этом рынке почти равны. Рынок, исследованный с помощью этой модели, не был замкнутым – в каждую единицу времени на него поступало и уходило некоторое количество товара и денег.

Модель однотоварного рынка Ричарда Тополя (Topol, 1991) использует некоторые элементы, совпадающие с элементами описанной выше модели незамкнутого однотоварного рынка. Модель финансового рынка, на котором предлагается лишь один актив, рассматривается как система взаимодействующих посредством торговли участников. При этом каждый участник, в зависимости от своего положения на рынке, может быть продавцом или покупателем. В каждый момент времени каждый продавец запрашивает свою цену продажи, а каждый покупатель предлагает свою цену покупки, которые они основывают на информации о предыдущей торговле и на оценке ими фундаментальной ценности (fundamental value) – агент-эффективной цене.

Торговля на рынке моделируется посредством парных сделок и осуществляется, если цена, предлагаемая покупателем, не меньше цены, запрашиваемой продавцом. Алгоритм перехода от состояния в данный момент времени к состоянию в следующий момент времени включает правила корректировки участником своих цен, в которых, также как и в определении торгующих пар продавец–покупатель, присутствует элемент случайности. Поэтому поведение участников биржевых торгов моделируется непростым случайным процессом. Главный результат этой работы – демонстрация возможности стадного поведения участников биржи, т.е. поведения, когда выбор участников определяется не собственной информацией, а известными каждому участнику данными о поведении большинства других участников.

Агент-ориентированная модель биржи, известная под названием “модель искусственной биржи Санта Фе” (Santa Fe Artificial Stock Market), имитирует динамику рынка, связанную с индивидуальной оценкой агентами текущего состояния рынка и обучением участников (LeBaron, Brian, Palmer, 1999). Стремление авторов учесть большое число факторов, влияющих на выбор решения участниками рынка и взаимодействие между ними, делает эту модель трудно поддающейся аналитическому исследованию.

Попытки создать модель рынка, которая напоминала бы биржу, отражала некоторые ее основные черты и позволяла бы аналитически исследовать хотя бы часть ее характерных черт, привели к разработке модели замкнутого однотоварного рынка (Вороновицкий, 2014).

Под замкнутым однотоварным рынком понимается рынок одного товара, на котором во все моменты времени имеется одно и то же количество денег и одно и то же количество товара. В модели – время дискретно. Состояние каждого участника в любой момент времени характеризуется имеющимся у него количеством товара и денег, назначаемой им ценой товара и статусом. Участники торговли в каждый момент времени могут быть продавцами, покупателями или ожидающими (т.е. временно не участвовать в торговле). В каждый момент времени участники рынка изменяют свой статус и меняют свои цены (запрашиваемые для продавцов, предлагаемые для покупателей и ориентировочные для ожидающих), используя только свою информацию о торговле в предыдущий момент времени. Механизм взаимодействия между продавцами и покупателями посредством торговли в этой модели такой же, как и в модели незамкнутого однотоварного рынка (Вороновицкий, 1974), при том, что разделение участников рынка по статусам и механизмы индивидуального поведения продавцов, покупателей и ожидающих появляются только в модели (Вороновицкий, 2014). В этой модели принятие решения участников состоит из двух последовательных этапов: 1) выбор своего статуса в следующий момент времени, 2) выбор своей цены (запрашиваемой, предлагаемой или ориентировочной) также в следующий момент времени.

Если из условия логичности выбора выбор статуса представляется одним и тем же для различных модификаций этой модели, то выбор цены может характеризоваться как рациональностью и осторожностью или ограниченным риском, так и иррациональностью.

Стоит отметить, что принятие участником решения о выборе статуса и цены в следующий момент не удается представить как действие по максимизации или увеличению какой-либо функции цели. В процессе торговли продавец продает по цене не меньшей запрашиваемой им, а покупатель покупает по цене, которая не больше той цены, что он просит. Поэтому каждый участник получает определенную прибыль и действует в следующий момент времени так, чтобы получить наибольшую прибыль. При этом продавец остерегается назначить слишком высокую цену, а покупатель остерегается назначить слишком низкую цену, так как при таких ценах каждый их них может выбыть из числа торгующих. Ожидающие стремятся включиться в процесс торговли в качестве продавцов или покупателей с наилучшими перспективами торговли. Таким образом, при выборе статуса и цены участники стремятся увеличить прибыль в следующий момент и при этом гарантировать свое участие в последующей торговле.

В работе (Вороновицкий, 2015) рассматривается осторожный выбор цены в модели замкнутого однотоварного рынка. Оказывается, что при предположениях о рациональности выбора цены, можно аналитически исследовать динамику множества цен всех участников рынка. В работе показано, что, начиная с некоторого момента времени, все цены на рынке мало отличаются от средней цены рыночной торговли в предыдущий момент времени. Компьютерная реализация модели позволила установить, что при различных начальных (в момент $t = 0$) количествах денег, количествах товара и ценах участников через определенное время средняя цена торговли мало отличается от некоторой константы.

Немало работ посвящено изучению рационального, рискованного и иррационального выбора экономических агентов. В то же время на пути исследования влияния риска и иррационального выбора участников на поведение коллектива сделаны только первые шаги.

Изучению поведения коллектива участников замкнутого однотоварного рынка при возможности назначения цены участникам двумя способами посвящена предлагаемая работа. Оба способа назначения цены характеризуются логической оправданностью решения, но при этом имеют различную степень риска не участвовать в торговле в последующий момент (из-за слишком высокой цены, запрашиваемой продавцом, или слишком низкой цены, предлагаемой покупателем).

По мнению автора, самое важное в данной работе то, что выбор действия (одной из двух степеней риска) в модели осуществляется предложенными М.Л. Цетлиным простейшими конечными автоматами с линейной тактикой и целесообразным поведением (Цетлин, 1969,), а также отличной от единицы памятью – одной и той же для всех участников рынка. Выбор действия участником моделируется посредством простого конечного автомата с линейной тактикой, для которого входной переменной служит величина, равная 1 или 0 (поощрение или штраф за предшествующее действие). Стационарная случайная среда характеризуется неизменными вероятностями поощрения за каждое действие автомата. В работе (Цетлин, 1969) было показано, что такой автомат при взаимодействии со стационарной случайной средой демонстрирует целесообразное поведение, т.е. его конструкция индуцирует стремление получить максимально частые поощрения.

Предлагаемая в этой работе модель исследовалась посредством ее компьютерной реализации. Было установлено, что при различных начальных условиях, при ценах, выбираемых рационально, хотя и с определенной долей риска для некоторых участников, средняя цена торговли, начиная с некоторого момента времени, близка к некоторой константе (не зависящей от начальных условий). При достаточно большой памяти автоматов в течение процесса они используют только часть своей памяти. В этой модели автоматы не знают заранее последствий выбора, сделанного ими и участниками рынка. Результат предыдущего взаимодействия автоматов является исходной ситуацией для последующего взаимодействия участников, что отличает эту ситуацию и от ситуации теории игр, и от ситуации, характерной для игр автоматов.

Конечный автомат с линейной тактикой (Цетлин, 1969) выбран нами потому, что он не только целесообразно (в смысле максимизации выигрыша) взаимодействует со стационарной случайной средой, но успешно проявляет себя в играх автоматов (Цетлин, 1969). При выборе характера назначения цены в следующий момент времени прибыль от торговли играет существенную роль, так как вероятность того или иного сигнала на входе автомата в момент t полагается зависящей от того, какой была его прибыль от торговли в предшествующий момент по сравнению с максимально возможной. В этой модели выбрана одна из простейших форм зависимости этой вероятности от прибыльности торговли в предшествующий момент.

В каждый момент времени участник характеризуется пятью переменными: количеством товара и количеством денег, которыми он обладает, его статусом, ценой (запрашиваемой, предлагаемой или ориентировочной) и характеристикой выбора цены в следующий момент времени (осторожной или рискованной). Каждый момент времени состоит из двух тактов. Механизм обмена товара на деньги действует в течение первого такта.

В разд. 2 сформулирована модель взаимодействия участников замкнутого однотоварного рынка, которая в основном совпадает с соответствующей частью работы (Вороновицкий, 2015). Соотношение цен всех покупателей и всех продавцов определяет последовательность торговых сделок. В результате торговли у каждого участника рынка оказываются новые количества денег и товара, средняя цена, по которой он торговал, и также возникает средняя цена торговли на рынке в течение первого такта этого момента времени. Это рассматривается как личная информация участника, на основе которой на втором такте этого момента он принимает решении о величинах своих остальных переменных. Алгоритм выбора решения участником на втором такте данного момента времени, которое он принимает на основе личной информации и средней цены на рынке, собственно и представляет собой его поведение.

В разд. 3 описывается модель определения участником замкнутого однотоварного рынка своего статуса (продавец, покупатель, ожидающий) в следующий момент времени. В работе (Вороновицкий, 2015) использовалась подобная этой модель поведения участников, но при одном способе выбора цены, называемом в данной работе осторожным. При назначении своего нового статуса участник руководствуется тем, что при выборе статуса продавца его новая цена должна быть больше средней цены рынка, определенной в результате торговли на предшествовавшем такте, а в случае выбора статуса покупателя его новая цена должна быть меньше этой средней цены. Если выполнение этих условий невозможно, агент принимает статус ожидающего.

В разд. 4 приведен механизм выбора участником рынка одного из двух возможных вариантов действия, состоящего в назначения своей цены в следующий момент времени при уже определенном статусе. При осторожном действии участник назначает цену в следующий момент, равную средней цене его сделок в предыдущий момент. При рискованном поведении продавец пытается назначить цену, превышающую его среднюю цену сделки, а покупатель – назначить цену меньшую его средней цены сделки в предшествующий момент. Вводится параметр модели, означающий шаг повышения или понижения цены. Сказанное относится к случаю, когда продавец продал весь товар или покупатель истратил все деньги. В остальных случаях роль ориентира, которым в предыдущем рассмотрении была средняя цена сделок участника, играет его цена в момент t. После определения статуса агент выбирает некоторое действие из имеющегося набора возможных, а затем в соответствии с этим действием назначает свою цену в следующий момент времени. Этот процесс моделируется посредством простого конечного автомата с линейной тактикой $L_{2m,2}$, с емкостью памяти $2m$, способного выполнять два действия, причем за каждым действием закреплены m состояний. Переход в какое-либо состояние автомат осуществляет в зависимости от поощрения или штрафа за предшествующее действие.

Вероятность штрафа пропорциональна прибыли от торговли для участвовавшего в торговле или улучшению его положения на рынке вследствие изменения средней цены рынка для участников, не принимавших участия в торговле, в предшествовавший момент времени. После выбора поведения (осторожного или рискованного) назначается цена для следующего момента времени. Исходя из результатов торговли в этот момент времени, такой же процесс повторяется и в следующий момент времени.

В разд. 5 приводятся результаты компьютерных исследований динамики модели. В работе (Вороновицкий, 2015) была описана динамика модели для случая, когда для следующего момента времени все участники назначают цену посредством осторожного действия. При этом в компьютерных экспериментах наблюдалось, что с некоторого момента средняя цена по рынку находится в некотором фиксированном интервале своих значений. Такой же результат, только с намного более широким диапазоном изменения цены, обнаружен и для модели однотоварного рынка, когда все участники во все моменты времени назначают цену в следующий момент времени посредством рискованного действия. В случае когда выбор действия участником осуществляется автоматом, меняющим свои состояния в зависимости от поощрения или штрафа, средняя цена рынка, начиная с некоторого момента, находится в некотором интервале своих значений, причем этот интервал шире, чем в случае только осторожных действий, и у́же, чем в случае только рискованных действий. Также в этом разделе дано сравнение динамики средней цены при различной емкости памяти конечных автоматов.

В разд. 6 обсуждаются перспективы дальнейшего развития аналитического и компьютерного исследований однотоварного рынка с помощью агент-ориентированных моделей.

2. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТНИКОВ РЫНКА

Будем считать время t дискретным ($t = 0, 1, \ldots$). Предположим, что каждый момент времени состоит из двух тактов. На первом такте момента t участники обменивают товар на деньги посредством последовательных актов торговли – осуществляется процесс взаимодействия участников. На втором такте каждый участник принимает решения о своем статусе, характере выбора цены и цене для следующего момента времени.

Пусть имеется N участников рынка, и они пронумерованы индексами i ($i = 1,\ldots, N$). В момент t участник с номером i обладает товаром в количестве $x_i(t)$ и деньгами $y_i(t)$. Для определенности предположим, что на рынке присутствуют одна единица товара и одна единица денег, т.е. $\sum_{i=1}^{N} x_i(t) = 1; \sum_{i=1}^{N} y_i(t) = 1$. Статус участника i в момент t обозначим через $\alpha_i(t)$. Если $\alpha_i(t) = -1$, то в момент t участник i – покупатель; если $\alpha_i(t) =1$, – продавец, а при $\alpha_i(t) = 0$ – он не участвует в торговле, ожидая более выгодной ситуации.

Каждый участник характеризуется ценой $\nu_i(t)$ и характером выбора цены $k_i(t)$. Для продавца ($\alpha(t) =1$) $\nu_i(t)$ означает цену, ниже которой он не согласится продать товар, а для покупателя ($\alpha_i(t) =-1$) – цену, больше которой он не согласится заплатить за товар. Если ($\alpha_i(t) = 0$, то цена этого участника имеет смысл ориентира при выборе решения о переходе в другой статус.

Опишем процесс, происходящий на первом такте момента t и состоящий из сделок между продавцами и покупателями. Каждый продавец предлагает покупателям весь имеющийся у него товар и стремится продать его по наибольшей из возможных цен. Каждый продавец предназначает все имеющиеся у него деньги для покупки товара и стремится купить товар по наименьшей из возможных цен. Порядок сделок между продавцами и покупателями определяется соотношением цен на рынке в данный момент.

Предположим, что в момент t участники $i = i_1, \ldots, i_k$ – продавцы и $\nu_{i_1}(t) \leq \ldots \leq \nu_{i_k}(t)$, а участники $j = j_1,\ldots, j_l$ – покупатели и $\nu_{i_1}(t) \geq \ldots \geq \nu_{j_l}(t)$. В этой ситуации первая сделка происходит между продавцом i_1 и покупателем j_1, причем они торгуют по цене $(\nu_{i_1}(t)+\nu_{j_1}(t))/2$. Предположим, что покупатель j_1 истратил все деньги на покупку товара у продавца i_1. Если у продавца i_1 остался еще товар, он предлагает его покупателю j_2. Сделка между ними осуществляется по цене $(\nu_{i_1}(t)+\nu_{j_2}(t))/2$. Если же у продавца i_1 не осталось товара, а у покупателя j_1 еще остались деньги, то покупатель обращается за товаром к продавцу с номером i_2 и сделка между ними будет происходить по цене $(\nu_{i_2}(t)+\nu_{j_1}(t))/2$. Процесс последовательного заключения сделок будет продолжаться до тех пор, пока не возникнет ситуации, когда или у продавцов не осталось товара, или у покупателей не осталось денег, или цена продавца, у которого еще есть товар, больше цены покупателя, у которого еще остаются деньги.

В описании процесса торговли мы до сих пор предполагали, что цены всех продавцов, так же как и цены всех покупателей, различны. Если же имеется несколько продавцов, или несколько покупателей с одинаковой ценой, или оба случая присутствуют одновременно, предполагается, что обмен происходит между одним обобщенным покупателем с данной ценой покупки и одним обобщенным продавцом с данной ценой продажи. Положим $(\nu_{i_1}(t) = \ldots = \nu_{j_k}(t) = \nu(t), x_{i_1}(t) \geq \ldots \geq x_{i_k}(t), x_{i_1}(t) + \ldots + x_{i_k}(t) = X_k(t)$, и продавцы $i_1,\ldots, i_k$ торгуют с покупателем (или с несколькими покупателями с одинаковой ценой), предлагающим за товар цену $V(t)$ и обладающим деньгами $Y_k(t)$. Предположим, что $X_k(t)(\nu(t) + V(t))/2 > Y_k(t)$, тогда не все продавцы могут полностью продать весь свой товар, и в этом случае существуют такие $l < k$ и $H(t)$:

$$(x_{i_k}(t) + x_{i_{k-1}}(t) + \ldots + x_{i_{l+1}}(t) + (k-l)H(t))(\nu(t) + V(t))/2 = Y_k(t),$$

$$x_{i_1}(y) > H(t), x_{i_2}(t) > H(t), \ldots, x_{i_l}(t) > H(t), \quad x_{i_{l+1}}(t) \le H.$$

При этом l продавцов реализуют весь свой товар, а $k–l$ продавцов – только часть товара (причем одинаковое количество).

По такому же алгоритму происходит распределение затрат между покупателями с одинаковой ценой.

Таким образом, полностью описан алгоритм торговли между продавцами и покупателями товара в течение перового такта момента t.

После завершения первого такта мы имеем для агентов, принявших участие в торговле: $x_i(t+1) < x_i(t)$, $y_i(t+1) > y_i(t)$, если $\alpha_i(t) = 1$; $x_i(t+1) > x_i(t)$, $y_i(t+1) < y_i(t)$, если $\alpha_i(t) = –1$. Для агентов, не принявших участия в торговле, включая ожидающих: $x_i(t+1) = x_i(t)$, $y_i(t+1) = y_i(t)$.

Для участников обмена в момент t можно определить среднюю цену $w_i(t)$ состоявшегося обмена:

$$w_i(t) = (y_i(t+1) - y_i(t))/(x_i(t) - x_i(t+1)), \quad \text{если } \alpha_i(t) = 1;$$

$$w_i(t) = (y_i(t) - y_i(t+1))/(x_i(t+1) - x_i(t)), \quad \text{если } \alpha_i(t) = -1.$$

Можно также выделить общие характеристики обмена на этом такте

$$\Delta Y(t) = \sum_{j=j_1}^{j=j_l} (y_j(t) - y_j(t+1)); \ \Delta X(t) = \sum_{i=i_1}^{i=i_k} (x_i(t) - x_i(t+1))$$

и среднюю по рынку цену обмена для случая, когда такой обмен произошел

$$\Delta X(t) > 0, \quad u(t) = \Delta Y(t)/\Delta X(t).$$

Мы предполагаем, что средняя цена торговли на первом такте момента t становится известной каждому участнику, и он может использовать эту величину наряду со своей личной информацией (с индексом i) для принятия решения в течение второго такта момента t.

3. МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ О СТАТУСЕ И ЦЕНЕ

Обозначим $\sigma(t) = \min_{\alpha_i(t)=-1} \nu_i(t) - \max_{\alpha_i(t)=1} \nu_i(t)$. Эта величина в предыдущих наших работах называется расхождением спектра цен (множества всех цен). Если $\sigma(t) \ge 0$, то в момент t все цены продавцов меньше любой цены покупателей. Наша модель выбора статуса и цен в следующий момент состоит в таком назначении статуса и цен, чтобы в момент t+1 имело место $\sigma(t+1) \ge 0$. Это, вероятно, одна из простейших, но не единственная возможная модель поведения.

Агент i выбирает значения своих переменных ($\alpha_i(t+1)$, $\nu_i(t+1)$) в зависимости от имеющихся у него после первого такта момента t количеств товара и денег $x_i(t+1)$, $y_i(t+1)$ и своего статуса $\alpha_i(t)$ в момент t. Он осуществляет этот выбор, сравнивая среднюю цену на рынке $u(t)$ со средней ценой своих последних сделок $w_i(t)$ или со своей ценой $\nu_i(t)$.

Рассмотрим механизм выбора статуса в момент $t+1$. Если в результате торговли на первом такте момента t продавец реализовал весь свой товар ($x_i(t+1) = 0$), то в случае $w_i(t) > u(t)$ в момент t+1 он становится покупателем, а в случае $w_i(t) \le u(t)$ – ожидающим.

Если в результате торговли на первом такте момента t продавец реализовал только часть своего товара или совсем не участвовал в торговле ($x_i(t+1) > 0$), то при $\nu_i(t) > u(t)$ он становится покупателем, когда он обладает деньгами $y_i(t+1) > 0$, и ожидающим, если у него нет денег ($y_i(t+1) = 0$), а при $\nu_i(t) \le u(t)$ – в момент $t+1$ остается продавцом.

Аналогично, если в результате торговли на первом такте момента t покупатель истратил все свои деньги ($y_i(t+1)=0$), то при $w_i(t) < u(t)$ в момент $t+1$ он становится продавцом, а при $w_i(t) \geq$ $\geq u(t)$ – ожидающим. Если в результате торговли на первом такте момента t покупатель истратил только часть своих денег или совсем не участвовал в торговле ($y_i(t+1) > 0$), то при $\nu_i(t) < u(t)$ он становится продавцом, когда $x_i(t+1) > 0$, и становится ожидающим при $x_i(t+1) = 0$, а при $\nu_i(t) \geq u(t)$ – остается покупателем.

Ожидающие участники рынка не участвуют в торговле, но ценность их товара и денег определяется величиной средней цены на рынке $u(t)$ и величиной собственной оценки $\nu_i(t)$. Если после первого такта момента t оказывается, что $\nu_i(t) \leq u(t)$ и $x_i(t) = x_i(t+1) > 0$, то ожидающий участник в момент $t+1$ становится продавцом; если $\nu_i(t) > u(t)$ и $x_i(t) = x_i(t+1) > 0$, – остается ожидающим; если $\nu_i(t) \geq u(t)$ и $x_i(t) = x_i(t+1) = 0$, – становится покупателем; если $\nu_i(t) > u(t)$ и $x_i(t) = x_i(t+1) = 0$, – остается ожидающим.

Вслед за выбором своего статуса в следующий момент времени участники рынка должны выбрать свои цены, относящиеся к следующему моменту времени.

Можно изучать модели поведения участников рынка со многими способами выбора цен, относящихся к следующему моменту времени, с различной степенью риска не принять участие в торговле в следующий момент (в том числе и алогичные, каким, в частности, является стадное поведение). Но оправдывая себя тем, что это исследование подобной модели реализуется впервые, и руководствуясь стремлением к простоте, мы рассмотрим только два простейших алгоритма выбора цен (два действия) – осторожный и рискованный.

При осторожном выборе продавец, продавший весь товар в момент t, назначает в следующий момент цену $\nu_i(t+1) = w_i(t)$, а при рискованном способе – цену $\nu_i(t+1) = \min(w_i(t) - d, u(t))$. Здесь величина d означает наименьшее возможное изменение цены и является параметром модели.

В случае осторожного назначения цены вероятность того, что данный участник будет участвовать в торговле в момент $t+1$ выше, чем при рискованном выборе. Это происходит потому, что при осторожном выборе цена покупателя больше (а цена продавца меньше), чем цена при рискованном выборе. Будем считать, что при осторожном выборе переменная этого участника, обозначающая характер его выбора цены, равна единице ($k_i(t) = 1$), а при рискованном выборе – равна минус единице ($k_i(t) = -1$). При рискованном выборе продавец назначает (если это возможно) цену на d большую, а покупатель – цену на d меньшую (если это возможно), чем при осторожном выборе цены. Таким образом, участник стремится получить бóльшую прибыль от предстоящей торговли, но рискует совсем не принять в ней участия.

В случае осторожного выбора покупатель при $\alpha_i(t) = -1$, $y_i(t+1) > 0$ назначает цену $\nu_i(t+1) = \nu_i(t) + d$ (он вынужден повысить цену, чтобы получить возможность участвовать в торговле в момент $t+1$), тогда как при рискованном выборе он подчиняется стремлению купить в следующий момент дешевле и назначает цену $\nu_i(t+1) = \nu_i(t) - d$, если $\nu_i(t) - d \geq u(t)$ и $u(t)$, – в противоположном случае. В случае $\alpha_i(t) = 1$, $x_i(t+1) = 0$ покупатель при осторожном выборе ($k_i(t+1) = 1$) назначает цену $\nu_i(t+1) = w_i(t)$, а при рискованном выборе ($k_i(t+1) = -1$) подчиняется стремлению купить в следующий момент дешевле и назначает цену $\nu_i(t+1) = w_i(t) - d$, если $w_i(t) - d \geq u(t)$ и $u(t)$, – в противоположном случае. В остальных случаях покупатель при осторожном выборе назначает цену $\nu_i(t+1) = \nu_i(t)$, а при рискованном выборе подчиняется стремлению купить в следующий момент дешевле и назначает цену $\nu_i(t+1) = \nu_i(t) - d$, если $\nu_i(t) - d \geq u(t)$ и $u(t)$, – в противоположном случае. Аналогично поступает продавец в случаях $k_i(t+1) = 1$ и $k_i(t+1) = -1$.

Если в момент $t+1$ участник рынка из продавца или покупателя стал ожидающим, то происходит следующее. При осторожном выборе ($k_i(t+1) = 1$), когда он продал весь товар или истратил все деньги ($x_i(t+1) = 0$ или $y_i(t+1) = 0$), он назначает в качестве цены в момент $t+1$ среднюю цену предыдущей торговли ($\nu_i(t+1) = w_i(t)$). Если при $k_i(t+1) = 1$ оказывается, что $x_i(t+1) > 0$ или $y_i(t+1) > 0$, он назначает в следующий момент цену, равную своей последней цене ($\nu_i(t+1) = \nu_i(t)$). При рискованном выборе он назначает цену на d большую цены осторожного выбора, если $x_i(t+1) > 0$, и на d меньшую осторожного выбора, если $x_i(t+1) = 0$.

Если ожидающий участник в момент $t + 1$ становится продавцом или покупателем, происходит следующее. При осторожном выборе цены он назначает цену в момент $t + 1$, равной своей цене в момент t. При рискованном выборе назначает цену на d большую своей цены в момент t, если становится продавцом (если $\nu_i(t) + d > u(t)$, то $\nu_i(t + 1) = u(t)$), и цену на d меньшую, если становится покупателем (если $\nu_i(t) + d < u(t)$, то $\nu_i(t + 1) = u(t)$).

Если ожидающий участник и в момент t также был ожидающим, для него естественно приблизиться к ситуации, когда он сможет участвовать в торговле (стать продавцом или покупателем) с выгодной для него ценой. Поэтому при осторожном выборе он назначает цену $\nu_i(t + 1) = \nu_i(t) - d$, если $x_i(t + 1) > 0$ и $\nu_i(t + 1) = \nu_i(t) + d$, если $x_i(t + 1) > 0$, а при рискованном выборе – оставляет свою цену неизменной $\nu_i(t) = \nu_i(t)$.

В работе (Вороновицкий, 2015) для случая осторожного выбора цены всеми участниками были доказаны некоторые утверждения о динамике множества цен. Доказательства этих утверждений легко переносятся на случай, когда каждый участник, независимо от остальных, выбирает осторожное или рискованное назначение цены в момент $t + 1$.

Пусть $\rho(t) = \max\limits_{\alpha_i(t)=-1} \nu_i(t) - \min\limits_{\alpha_i(t)=1} \nu_i(t)$ – ширина спектра цен,

$$\eta_1(t) = u(t-1) - \min_{\alpha_i(t)=1} \nu_i(t), \quad \eta_{-1}(t) = \max_{\alpha_i(t)=-1} \nu_i(t) - u(t-1),$$

$$\nu_x(t) = \max_{\alpha_i(t)=0,\, x_i(t)>0} \nu_i(t) - u(t-1), \quad \xi_x(t) = u(t-1) - \min_{\alpha_i(t)=0,\, x_i(t)>0} \nu_i(t),$$

$$\nu_y(t) = \max_{\alpha_i(t)=0,\, y_i(t)>0} \nu_i(t) - u(t-1), \quad \xi_y(t) = u(t-1) - \min_{\alpha_i(t)=0,\, y_i(t)>0} \nu_i(t).$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. *Начиная с некоторого момента T_0 будет $\sigma(t) \geq 0$, $t > T_0$. Если $\alpha_i(t) = 0$, то для $t > T_0$ будет либо $x_i(t) = 0$, либо $y_i(t) = 0$.*

Утверждение 2. *Для $t > T_0 + 1$ мы имеем*

$$\eta_1(t) \geq 0, \quad \eta_{-1}(t) \geq 0, \quad 0 \leq \xi_x(t) \leq d, \quad 0 \leq \nu_y(t) \leq d, \quad 0 \leq \xi_y(t), \quad 0 \leq \nu_x(t).$$

Утверждение 3. *Существует такое $T_1 > T_0$, что для всех $t > T_1$ будет*

$$\rho(t) \leq 5d + \beta, \quad \eta_1(t) \leq 3{,}5d + \beta/2, \quad \eta_{-1}(t) \leq 3{,}5\, d + \beta/2,$$

где β – сколь угодно малая, но постоянная величина.

Для полного описания поведения участника рынка остается определить целесообразный (в смысле прибыли участника) механизм изменения характера выбора цены $k_i(t + 1)$, т.е. переход от $k_i(t)$ к $k_i(t + 1)$, исходя из изменений личных переменных участника и изменения средней цены рынка в результате торговли в предыдущий момент времени. В качестве такого механизма предлагается использовать конечные автоматы с линейной тактикой.

4. МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ О ХАРАКТЕРЕ ВЫБОРА ЦЕНЫ

В нашей модели поведения участника рынка мы используем конечный детерминированный автомат с линейной тактикой, емкостью памяти $2m$ и с двумя действиями. Такой автомат в (Цетлин, 1969) обозначается как $L_{2m,2}$.

Автомат $L_{2m,2}$ может производить два действия f_1 и f_{-1} и имеет $2m$ состояний $\varphi_1,...,\varphi_{2m}$ (число $2m$ называется емкостью памяти автомата), при этом в состояниях $\varphi_1, ..., \varphi_m$ автомат производит действие f_1 (осторожное назначение цены в момент $t + 1$), а в состояниях $\varphi_{m+1},...,\varphi_{2m}$ производит действие f_{-1} (рискованное назначение цены в момент $t + 1$). Автомат воспринимает в каждый момент времени $t = 1, 2,...$ один сигнал s, принимающий два значения: $s=1$ – поощрение и $s = -1$ – штраф. В зависимости от сигнала автомат меняет свое внутреннее состояние следующим образом:

$$\text{при } s(t)=1: \begin{cases} \varphi(t+1)=\varphi_{i+1}, \text{ если } \varphi(t)=\varphi_i \text{ и } i=1, \ldots, m-1, m+1, 2m-1, \\ \varphi(t+1)=\varphi_i, \text{ если } \varphi(t)=\varphi_i \text{ и } i=m \text{ или } i=2m; \end{cases}$$

$$\text{при } s(t)=-1: \begin{cases} \varphi(t+1)=\varphi_{i-1}, \text{ если } \varphi(t)=\varphi_i \text{ и } i=2, \ldots, m, m+2, \ldots, 2m, \\ \varphi(t+1)=\varphi_{m+1}, \text{ если } \varphi(t)=\varphi_1, \\ \varphi(t+1)=\varphi_1, \text{ если } \varphi(t)=\varphi_{m+1}. \end{cases}$$

Матрицу перехода из состояния φ_i в состояние φ_j при $s = 1$ обозначим $A_{i,j}(1)$, а матрицу перехода из состояния φ_i в состояние φ_j при $s = -1$ обозначим $A_{i,j}(-1)$.

Каждая строка этих матриц содержит только один элемент, равный единице, а остальные элементы равны нулю.

Мы будем говорить, что автомат $L_{2m,2}$ находится в стационарной случайной среде $C(p_1, p_{-1})$, если действие автомата f_1, произведенное в момент t, влечет за собой в момент t+1 значение его сигнала s, равное единице ($s = 1$) с вероятностью $p_1 = (1 + \alpha_1)/2$ и равное нулю ($s = -1$) с вероятностью $1 - p_1$, а действие автомата f_{-1}, произведенное в момент t, влечет за собой в момент t+1 значение его сигнала s, равное единице ($s = 1$) с вероятностью $p_{-1} = (1 + \alpha_{-1})/2$ и равное минус единице ($s = -1$) с вероятностью $1 - p_{-1}$. Вероятность перехода автомата из состояния φ_i в состояние φ_j равна $p_{i,j} = p_i A_{i,j}(1) + (1 - p_i) A_{ij}(-1)$, где $p_i = p_1$, если $1 \le i \le m$ и $p_i = p_{-1}$, если $m < i \le 2m$.

Таким образом, поведение автомата $L_{2m,2}$ в стационарной случайной среде описывается цепью Маркова, которая в нашем случае оказывается эргодической. Поэтому существуют финальные вероятности состояний автомата $r_1, \ldots, r_{2m}$. Обозначим через ω_1 сумму $r_1 + \ldots + r_m$ и через ω_{-1} сумму $r_{m+1} + \ldots + r_{2m}$. Следовательно, ω_1 и ω_{-1} – вероятности действий f_1 и f_{-1} в случайной среде.

Ожидаемый выигрыш W_m автомата $L_{2m,2}$ в случайной среде выразится формулой $W_m = \omega_1\alpha_1 + \omega_{-1}\alpha_{-1}$. Очевидно, целесообразность поведения автомата заключается в его стремлении к увеличению ожидаемого выигрыша. Доказано, что, в частности, автомат $L_{2m,2}$ обладает целесообразным поведением в стационарной случайной среде в том смысле, что $W_m > (\alpha_1 + \alpha_{-1})/2$.

Наряду с этим из доказанных общих фактов следует, что последовательность автоматов $L_{2m,2}$ ($m = 1, 2,\ldots$) является асимптотически оптимальной, т.е. $W = \lim_{m\to\infty} W_m = \max(\alpha_1, \alpha_{-1})$, конечно, при условии, что max $(\alpha_1, \alpha_2) \ge 0$. Наряду с этим И.М. Гельфанд, М.Л. Цетлин и их сотрудники (Цетлин, 1969) рассматривали случай игры с многими участниками, когда участники не обладают априорной информацией о выигрышах при любых наборах стратегий участников (в отличие от классического случая, когда игроки заранее знают последствия своих действий и действий противников). На примерах некоторых игр, участниками которых являются автоматы, было показано, что конечные автоматы с линейной тактикой могут успешно (в смысле выигрыша) участвовать в этих играх.

Все вышеизложенное явилось причиной нашей попытки использовать простейшие конечные линейные автоматы для моделирования выбора участником рынка характера назначения цены в следующий момент времени.

Будем полагать, что поведение участника i, касающееся выбора характера назначения им цен в момент $t + 1$, определяет конечный автомат с линейной тактикой $L^{(i)}_{2m,2}$, обладающий $2m$ состояниями $\varphi^{(i)}_1, \ldots, \varphi^{(i)}_{2m}$. При этом в состояниях $\varphi^{(i)}_1, \ldots, \varphi^{(i)}_m$ автомат производит действие $f^{(i)}_1$, а в состояниях $\varphi^{(i)}_{m+1}, \ldots, \varphi^{(i)}_{2m}$ – действие $f^{(i)}_{-1}$. Будем предполагать, что в момент времени t автомат, соответствующий участнику i, находится в состоянии $\varphi^{(i)}_j(t)$ и при $j \le m$ он производит действие $f^{(i)}_1$, т.е. осуществляет осторожный выбор цены в момент $t + 1$, а при $j > m$ он производит действие $f^{(i)}_{-1}$, т.е. осуществляет рискованный выбор цены в момент $t + 1$. Переходы от состояния в момент t к состоянию в момент $t + 1$ так, как это было описано выше, зависят от входного сигнала $s(t)$ в момент t. Таким образом, для полного определения динамики автомата (а следовательно, и цен участника i) нам необходимо определить вероятности поощрения и штрафа участника i, находящегося в момент t в состоянии $\varphi_j^{(i)}(t)$ и соответствующим образом назначившего цену $v_i(t)$. Возможно, вероятность поощрения является некоторой оценкой результата его торговли на первом такте момента t.

Рассмотрим сначала случай продавца, цена которого в момент t равна $\nu_i(t)$, продавшего часть своего товара или весь свой товар на первом такте момента t по средней цене $w_i(t)$. Соотношение средней цены продавца $w_i(t)$ и средней цены по рынку $u(t)$ на первом такте момента t определяет его статус в момент $t + 1$. Если $w_i(t) > u(t)$ (при $\nu_i(t) \le w_i(t)$ он получает некоторую прибыль), то в следующий момент он становится продавцом и может купить товар по цене меньшей $w_i(t)$ (т.е. получить прибыль еще раз), в противном случае он становится ожидающим и не участвует в торговле в момент $t + 1$.

Условно будем считать, что при $w_i(t) = u(t)$ вероятность поощрения или штрафа равны 1/2. В случае $w_i(t) > u(t)$ будем оценивать его действия в момент t через отношение разности $w_i(t) - u(t)$ к максимальному значению этой величины, которое могло бы возникнуть при торговле данного продавца с покупателем, обладающим максимальной ценой в момент t, т.е. к $(\nu_i(t) + \max_{\alpha_j(t)=1} \nu_j(t))/2 - u(t)$. При $w_i(t) < u(t)$ (в момент $t + 1$ он не участвует в торговле) будем оценивать его действия в момент t через отношение разности $u(t) - w_i(t)$ к максимальному значению этой величины, которое могло бы возникнуть при торговле данного продавца с покупателем, обладающим минимальной ценой в момент t (а такой ценой в момент t согласно утверждению 1 является $u(t-1)$), т.е. к $u(t) - (\nu_i(t) + u(t-1))/2$.

Для удобства изложения обозначим:

$$F_i^s = \frac{2(w_i(t) - u(t))}{\nu_i(t) + \max_{\alpha_j(t)=-1} \nu_j(t) - 2u(t)}, \quad G_i^s = \frac{2(u(t) - w_i(t))}{2u(t) - u(t-1) - \nu_i(t)}.$$

Тогда мы можем определить вероятность поощрения за действия данного участника торговли в момент t:

$$\begin{cases} p_i(t) = (1 + F^s)/2, & \text{если } w_i(t) > u(t); \\ p_i(t) = 1/2, & \text{если } w_i(t) = u(t); \\ p_i(t) = (1 - G^s)/2, & \text{если } w_i(t) < u(t). \end{cases}$$

Когда участник рынка является в начале момента t покупателем и на первом такте этого момента тратит все или часть его денег, то действуют симметричные рассуждения.

Обозначим

$$F_i^b = \frac{2(w_i(t) - u(t))}{\nu_i(t) + \max_{\alpha_j(t)=-1} \nu_j(t) - 2u(t)}, \quad G_i^b = \frac{2(u(t) - w_i(t))}{2u(t) - u(t-1) - \nu_i(t)}.$$

Тогда

$$\begin{cases} p_i(t) = (1 + F^b)/2, & \text{если } w_i(t) < u(t); \\ p_i(t) = 1/2, & \text{если } w_i(t) = u(t); \\ p_i(t) = (1 - G^b)/2, & \text{если } w_i(t) > u(t). \end{cases}$$

В случаях, когда на первом такте момента t продавец ничего не продал, покупатель ничего не купил или участник имел статус ожидающего агента, то вероятность поощрения можно определить только через тенденцию изменения возможных цен продажи (когда участник–продавец или ожидающий агент, имеющий товар) или возможных цен покупки (когда участник–покупатель или ожидающий агент, имеющий деньги). В этих случаях реализованное приращение цены в момент t, т.е. $u(t) - u(t-1)$, сравнивается со своим максимально возможным и своим минимально возможным значением при ценах в момент t.

В случае продавца или ожидающего участника, обладающего товаром, обозначим

$$F^{sw} = \frac{2(u(t) - u(t-1))}{\max_{\alpha_j(t)=-1} \nu_j(t) - 2u(t)}, \quad G^{sw} = \frac{2(u(t-1) - u(t))}{u(t-1) - \max_{\alpha_j(t)=1} \nu_i(t)}.$$

Тогда

$$\begin{cases} p(t) = (1+F^{sw})/2, & \text{если } u(t) > u(t-1); \\ p(t) = 1/2, & \text{если } u(t) = u(t-1); \\ p(t) = (1-G^{sw})/2, & \text{если } u(t) < u(t-1). \end{cases}$$

В другом случае (покупатель или ожидающий с деньгами) вероятности поощрения имеют вид

$$\begin{cases} p(t) = (1+F^{sw})/2, & \text{если } u(t) < u(t-1); \\ p(t) = 1/2, & \text{если } u(t) = u(t-1); \\ p(t) = (1-G^{sw})/2, & \text{если } u(t) > u(t-1). \end{cases}$$

Заметим, что во всех случаях вероятность штрафа равна единице минус вероятность поощрения. В каждый момент t состояния, в которых находятся разные автоматы, могут быть различными.

Таким образом, полностью описан алгоритм поведения (конечно, достаточно упрощенный и один из, вероятно, возможных алгоритмов)

5. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПОСРЕДСТВОМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В предыдущих разделах была дано микроописание замкнутого однотоварного рынка. К пяти переменным, определяющим состояние участника, при рассмотрении нескольких (двух) возможностей характера изменения цены, необходимо добавить переменную, обозначающую номер состояния, в котором находится участник i в момент t. В случае рассматриваемого нами автомата $L_{2m,2}$ нам будет удобно обозначать номер состояния $\varphi_\lambda^{(i)}(t)$, в котором находится участник i в момент t, через два числа $l_i(t)$ и $k_i(t)$, так что $l_i(t) = \lambda$ и $k_i(t) = 1$, если $\lambda \le m$ и $l_i(t) = \lambda - m$ и $k_i(t) = -1$, если $\lambda > m$.

Итак, набор $7N$ переменных $x_1(t), y_1(t), \alpha_1(t), \nu_1(t), l_1(t), k_1(t), \ldots, x_N(t), y_N(t), \alpha_N(t), \nu_N(t), l_N(t), k_N(t)$ определяет состояние $r(t)$ системы в момент t. Динамика системы (алгоритм перехода от $r(t)$ к $r(t+1)$) полностью описана в предыдущих разделах. Выбор действия автоматом, определяющим поведение участника, индуцирует значение случайной величины $s(t)$ (поощрение или штраф), поэтому данная система является стохастической. Вероятно, это делает возможность аналитического исследования еще более проблематичной.

Состояние системы r называется стационарным, если из $r(t) = r$ следует $r(t+1) = r$. Скорее всего, для этой системы таких состояний не существует. Множество состояний M называют стационарным множеством состояний, если из $r(t) \in M$ следует $r(t+1) \in M$.

Компьютерные эксперименты показали, что для рассматриваемой системы существуют стационарные множества. Все последующие результаты о динамике нашей модели однотоварного замкнутого рынка получены посредством компьютерного моделирования, причем рассматривалось естественное множество начальных состояний $r(0)$, конечно же, не охватывающее все возможные начальные состояния.

В качестве начального состояния системы выбирались состояния $r(0)$, для которых распределение единицы товара и единицы денег между покупателями близко к равномерному распределению – каждый участник с вероятностью 1/3 мог в нулевой момент находиться в любом из возможных статусов и равномерно выбрать цену на отрезке $(0,V)$. Начальные величины $l_i(0)$ и $k_i(0)$ определялись с равной вероятностью среди чисел $1,\ldots,m$ и $1,-1$.

Случай, исследовавшийся в работе (Вороновицкий, 2015), соответствует модели поведения, в которой автомат $L_{2m,2}$ отсутствует и величины $l_i(t)$, $k_i(t)$ не меняются со временем ($k_i(t) = 1$ для $i = 1, \ldots, N$; $t = 0, 1, \ldots$). Компьютерное исследование такой модели показало следующее:

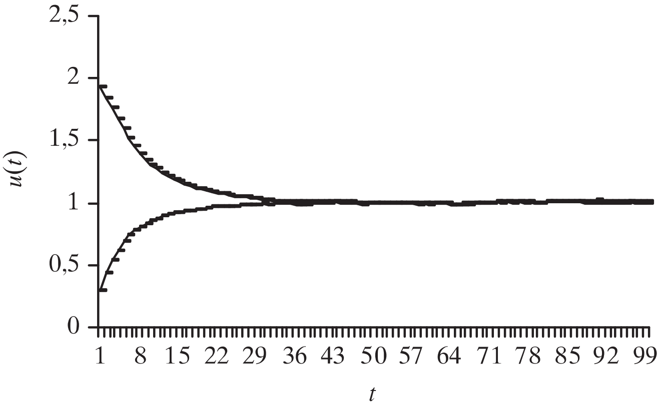

Рис. 1. Траектории $u(t)$ для $0 < t < 10\,000$, когда все участники с осторожностью назначают цены в следующий момент ($N = 300$; $d = 0{,}005$; $u(0) = 2$, $u(0) = 0{,}5$; одно деление на шкале времени равно 100 моментам времени)

существует такой момент τ_1, *что для всех* $t > \tau_1$ *имеет место* $r(t) \in M_0(d)$, *где для всех точек множества* $M_0(d)$ *имеют место неравенства* $u_0 - 5d < u(t) < u_0 + 5d$ (u_0 *– усредненное за большой промежуток времени значение* $u(t)$: $\left(\sum_{i=\tau_1}^{t=\tau_1+\Theta} u(t)\right)/\Theta$ *и* Θ *достаточно велико).*

Кроме ограниченности функции $u(t)$ сверху и снизу для $t > \tau_1$, нам не удалось, к сожалению, обнаружить других свойств $M_0(d)$, хотя они, возможно, существуют.

На рис. 1 показаны две траектории средней цены рынка для различных начальных значений этой цены при $k_i(t) = 1$; $i = 1, \ldots, N$; $t = 0, \ldots, 10\,000$.

В данном исследовании мы вначале провели эксперименты с компьютерной моделью замкнутого однотоварного рынка, не отличающейся от (Вороновиций, 2015), т.е. автомат $L_{2m,2}$ отсутствует и величины $l_i(t)$, $k_i(t)$ не меняются со временем. В этих экспериментах все участники во все моменты времени выбирают только рискованное назначение своей цены ($k_i(t) = -1$, $i = 1,\ldots, N$, $0 < t < \infty$). В этом случае траектория средней цены рынка после некоторого момента времени τ_2 значительно отличается от случая (Вороновицкий, 2015), хотя также ограничена снизу и сверху. Экспериментально выявлен следующий факт: *существует такой момент* τ_2, *что* $\forall t > t_2$ *имеет место* $r(t) \in M_1(d)$, *где для всех точек множества* $M_1(d)$ *справедливы неравенства* $u_1 - 25d < u(t) < u_1 + 25d$, *а* u_1 *– усредненное за большой промежуток времени значение* $u(t)$: $\left(\sum_{i=\tau_2}^{t=\tau_2+\Theta} u(t)\right)/\Theta$ *и* Θ *достаточно велико.*

Следует заметить, что так же, как и в (Вороновицкий, 2015), не удалось обнаружить других характеристик множества $M_1(d)$, кроме ограниченности функции $u(t)$ сверху и снизу для $t > t > t_2$. На рис. 2 приведены траектории средней цены рынка для различных начальных значений этой цены при $k_i(t) = -1$; $i = 1,\ldots,N$; $t = 0,\ldots,$ 10 000. Как показали эксперименты, колебания $u(t)$ при больших значениях t значительно сглаживаются, когда половина участников всегда осуществляет осторожный выбор, а другая половина – всегда осуществляет рискованный выбор.

Теперь приведем некоторые результаты компьютерного исследования модели замкнутого однотоварного рынка, описанного в данной работе. Она отличается от изучавшихся выше моделей тем, что участники рынка постоянно используют два действия по выбору цены в момент $t + 1$: осторожное и рискованное назначения цены. Выбор характера действия осуществляется посредством конечного автомата с линейной тактикой $L_{2m,2}$. Автомат меняет состояния в зависимости от результатов предыдущего действия, как это описано выше. Как и в предыдущих случаях, независимо от начального состояния системы *существует такой момент* τ_3, *что для всех* $t > \tau_3$ *имеет место* $r(t) \in M_2(d)$, *где для всех точек множества* $M_2(d)$ *будет* $u_2 - R(m,d) < u(t) < u_2 + R(m,d)$ (u_0 *– усредненное за большой промежуток времени значение* $u(t)$ *и* $R(m,d) < 15d$ *для всех значений* m: $\left(\sum_{i=\tau_3}^{t=\tau_3+\Theta} u(t)\right)/\Theta$ *и* Θ *достаточно велико).*

Рис. 2. Траектории средних цен рынка, когда все участники постоянно склонны к риску ($N = 500$; $d = 0{,}005$; $u(0) = 0{,}2$; $u(0) = 3{,}3$; $0 < t < 14\,000$)

На рис. 3–4 показаны ситуации, когда при различных значениях $u(0)$ все значения $u(t)$ становятся близкими к u_2 и остаются такими в последующие моменты времени. На рис. 4 приведены ограниченные по амплитуде нерегулярные колебания величин $u(t)$, соответствующие разным начальным условиям.

Интересным представляется вопрос о зависимости поведения системы (точнее траектории $u(t)$) при различной емкости памяти автоматов.

Следует заметить, что автомат $L_{2m,2}$ является асимптотически оптимальным (т.е. его ожидаемый выигрыш при взаимодействии со стационарной случайной средой стремится с ростом его памяти к максимально возможному). Но при этом в нестационарных случайных средах такие автоматы с ростом памяти теряют эффективность функционирования. После некоторой величины емкости памяти ожидаемый выигрыш автомата начинает уменьшаться. В рассматриваемом случае в ходе компьютерных экспериментов удалось установить, что при различных значениях m траектории средней цены, начиная с некоторого момента времени, мало отличаются по величине, хотя и не совпадают, даже если все начальные условия при разных m одни и те же. Из компьютерных экспериментов мы получили следующие соотношения величин $R(m,d)$ при различных значениях m

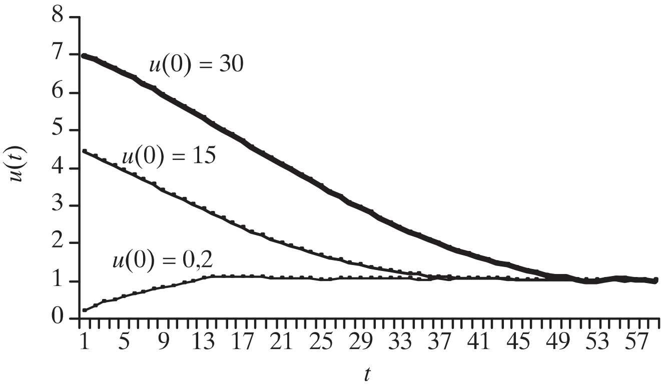

Рис. 3. Траектории $u(t)$ в случаях различных начальных условий, где $\tau_1 > 4500$ и все участники являются автоматами $L_{2m,2}$ ($N = 300$; $d = 0,005$; $m = 8$; $u(0) = 30$; $u(0) = 15$; $u(0) = 0,2$; $0 < t < 5500$)

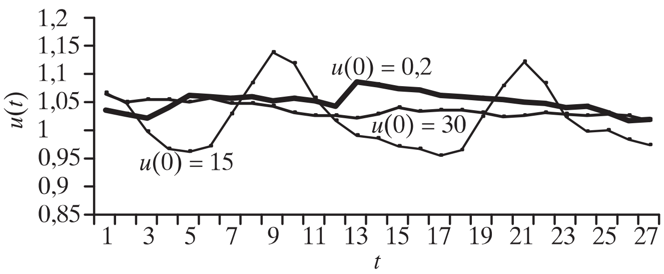

Рис. 4. Траектории $u(t)$ для $8500 < t < 10\,000$ для случаев, в которых начальные условия различны, но емкость памяти у автоматов одна и та же и равна 16 ($N = 300$; $d = 0,005$; $m = 8$; $u(0)=30$; $u(0) = 15$; $u(0) = 0,2$; $0 < t < 5500$)

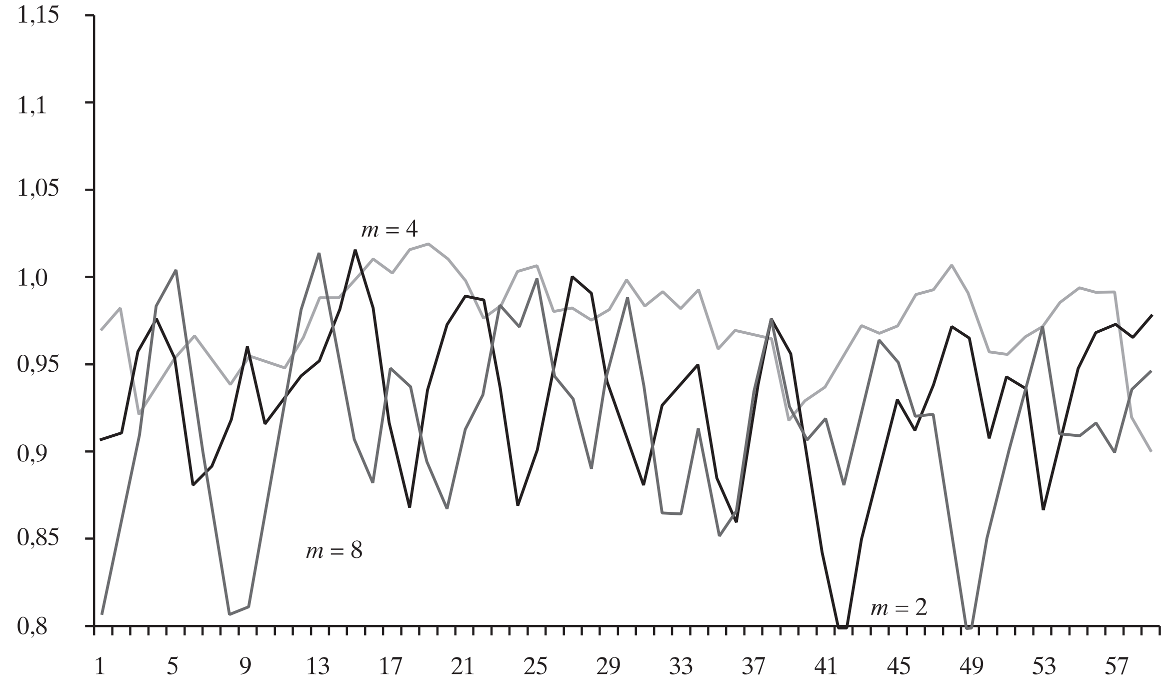

Рис. 5. Траектория $u(t)$ для $3000 < t < 9000$ при $m = 8, 4, 2$ ($N = 300$; $d = 0,005$; $u(0) = 15$)

и различных начальных условиях: $R(1, d) > R(2, d) > R(4, d) < R(8, d) < R(16, d)$. Более того, при $m > 8$ величина $R(m, d)$ почти не изменяется, а $\left(\sum_{i=1}^{i=N} l_i(t)\right)/N$, начиная с некоторого $t > \tau_3$ и $m > 4$, всегда остается меньше 4.

На рис. 5 приведена часть траекторий средней цены при $m = 8$, $m = 4$, $m = 2$ на интервале $4000 < t < 10\,000$. Этот рисунок иллюстрирует вывод о зависимости $R(m, d)$ от m, сделанный нами на основе большого числа компьютерных экспериментов. Эксперименты показывают, что почти во все моменты времени после $t = \tau_3$ число участников, выбирающих осторожный характер назначения цены в следующий момент времени, больше числа участников, выбирающих рискованный характер назначения цены.

Зависимость поведения всей системы от памяти автоматов, выбирающих цены в следующий момент времени, еще предстоит детально изучить. Предстоит ответить на множество вопросов, связанных с поведением и структурой описанной выше системы, так же, как и на вопросы о возможностях ее модификации и приближения к реальности. В данном исследовании сделан лишь первый шаг в предлагаемом подходе к описанию структуры и динамики однотоварного замкнутого рынка.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По нашему мнению, предложенная в настоящей работе модель в большей степени, чем предыдущая (Вороновицкий, 2015), отражает черты реальных замкнутых рынков. Использование конечных автоматов с целесообразным поведением при взаимодействии со стационарной случайной средой в качестве модели принятия решения агентом позволяет изучить поведение коллектива участников рынка при двух вариантах (с различной степенью риска) индивидуального выбора. Поэтому перспективным направлением дальнейшего изучения этой модели, вероятно, является исследование стадного поведения участников рынка, когда каждый участник принимает решение исходя из информации о выборе остальных в предшествующий момент, не используя при этом собственную информацию. Интересны два варианта – игра на повышение и игра на понижение цены Изучению этих проявлений стадного поведения предполагается посвятить ближайшие исследования.

Надежда на возможность аналитического исследования приведенной в статье модели вынудила нас максимально упростить формальное описание ее элементов. Исследовалась только динамика системы при одном классе начальных состояний, поэтому о поведении системы при других множествах ее начальных состояний нам пока ничего неизвестно.

Проведенное аналитическое исследование модели, а также компьютерные эксперименты позволили указать на некоторые полезные ее модификации, которые позволят (по нашему мнению) приблизить поведение модели к реальной ситуации на замкнутом рынке.

Прежде всего это относится к определениям вероятностей штрафа в разных ситуациях. Действительно, эти вероятности определены как отношение удельной прибыли от торговли в предыдущий момент к максимально возможной удельной прибыли в этот момент. С одной стороны, это определение довольно простое и, возможно, оно допустимо при первом исследовании модели, но, с другой стороны, оно отражает далеко не все черты реальной ситуации. Имеет смысл рассмотреть изменение прибыли за два предшествующих шага (продажа–покупка, покупка–продажа, ожидание покупка и т.п.), и желательно включать в оценку двух предыдущих выборов не удельную прибыль, а полную прибыль участника. При таком подходе поведение участников оказывается в большей мере управляемым их стремлением увеличить свое богатство, т.е. сумму имеющихся денег плюс количество товара, умноженное на среднюю цену на рынке. Не менее важно включить в модель больше вариантов выбора цены (варианты выбора с различной степенью риска, может быть, иррациональный выбор).

Представляется не только полезным, но и возможным продолжение аналитического исследования нашей модели и доказательство ее свойств, установленных ранее посредством компьютерного моделирования.

Нам не удалось получить доказательства сходимости состояния системы к стационарному множеству M, но мы не считаем, что нельзя получить это доказательство в дальнейшем. То же касается и свойств этого стационарного множества. Компьютерная модель не позволила нам дать полного описания этого множества. Она лишь позволила установить сходимость траектории средней цены рынка к значениям этой цены в точках стационарного множества. Мы надеемся, что в дальнейшем удастся установить аналитически необходимые и достаточные условия принадлежности состоянии системы к этому множеству.

Представляется возможным указать направления модификации этой модели, которые повысят адекватность отражения в нашей новой модели реальной ситуации замкнутого рынка с большим числом участников. Например, существенно влияющее на ход нашего исследования требование того, чтобы в каждый момент минимальная цена покупателей была не меньше максимальной цены продавцов, значительно упрощает аналитическую часть исследования, но не представляется абсолютно естественным. Это требование, с нашей точки зрения, означает рациональный и максимально осторожный выбор участниками своего статуса в момент $t + 1$. Отказ от этого требования может сделать поведение участника, связанного с выбором его статуса в следующий момент, неоднозначным и, возможно, стохастическим, что, в свою очередь, сделает выбор цены в следующий момент времени более близким к реальной ситуации. При этом для описания поведения участников, касающегося многовариантного выбора статуса, можно также использовать конечные автоматы. Полезным представляется введение в модель механизма прогноза участниками на основе своей личной информации средней цены рынка, относящейся к последующим моментам времени.

Хочется заметить, что первые шаги в нашем исследовании агент-ориентированных моделей замкнутого однотоварного рынка – при всех сложностях и недостатках этого подхода – позволяют надеяться на получение, в конце концов, адекватного понимания механизмов, действующих на реальных рынках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вороновицкий М.М. (1974). Об одной модели обмена // *Автоматика и телемеханика.* № 8. С. 85–92.

Вороновицкий М.М. (2014). Агент-ориентированная модель замкнутого однотоварного рынка // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 2. С. 58–72.

Вороновицкий М.М. (2015). Агент-ориентированная модель замкнутого однотоварного рынка при рациональном предпочтении участников // *Экономика и математические методы.* Т. 51. № 3. С. 75–91.

Макаров В.Л. (2012). Искусственные общества // *Экономика и математические методы.* Т. 48. № 3. С. 3–20.

Цетлин М.Л. (1969). Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука.

LeBaron B., Brian W.A., Palmer R. (1999).Time Series Properties of an Artificial Stock Market Model // *Journal of Economic Dynamics and Control.* Vol. 23. P. 1487–1516.

Topol R. (1991). Bubbles and Volatility of Stock Prices; Effect of Mimetic Contagion // *The Economic Journal*. Vol. 101. P. 786–809.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

LeBaron B., Brian W.A., Palmer R. (1999). Time Series Properties of an Artificial Stock Market Model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 23, 1487–1516.

Makarov V.L. (2012). Artificial Societies. *Economics and Mathematical Methods* 48, 3, 3–20 (in Russian).

Topol R. (1991). Bubbles and Volatility of Stock Prices; Effect of Mimetic Contagion. *The Economic Journal*, 101, 786–809.

Tsetlin M.L. (1969). Automaton Theory and Modeling of Biological Systems. Moscow: Nauka (in Russian).

Voronovitsky M.M. (1974). One Model of Exchang. *Automatika i Telemekhanika* 8, 85–92 (in Russian).

Voronovitsky M.M. (2014). The Agent-Based Model of the Closed Market with One Commodity. *Ekonomika i matematicheskie metody*, 50, 2, 58–72 (in Russian).

Voronovitsky M.M. (2015). The Agent-Based Model of the Closed Market with One Commodity and Rational Choice of Partners. *Economics and Mathematical Methods* 51, 3, 75–91 (in Russian).

Поступила в редакцию
01.07.2015 г.

The Dynamic Model of the Closed Market with One Commodity and Finite Linear Automata as Participants

M.M. Voronovitsky

The dynamic model of a closed market with one commodity, which is a combination of autonomous and interacting participants, is investigated in the paper. Closure of the market means that quantity of the commodity and amount of money on the market are constant at all the moments of time. Each partner in the market can be in one of the three statuses: a buyer, a seller and not a participant in trade at this moment of time. The interaction is carried out through trade. Partners in the market change their statuses and prices, using the personal information of each of them about trade in the previous moment of time only and trying to secure their partnership in trade at the next moment. The finite automata models the choice of risk degree in definition of new prices. So we study the closed market with one commodity as a system of interacting finite automata. We showed by the computer investigation the convergence of the average price of the market to a neighborhood of some his average value. We also investigated the role of volume of automata's memory, which represent the participants of market, on the behavior of all our system.

Keywords: mathematical model, closed market, one commodity market, dynamics of prices, trajectory, stationary set, stationary state, finite automata.

JEL Classification: C51, D01.