ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2016, том 52, № 2, с. 91–102

О СВОЙСТВАХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ CES-ФУНКЦИЙ В МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТОВАРАМИ*

© 2016 г. В.Д. Матвеенко, Е.М. Бронштейн

(Санкт-Петербург, Уфа)

Производственные CES-функции широко применяются в исследованиях экономического роста и развития, однако не всегда учитывается, что свойства различных спецификаций CES-функций (континуальных или дискретных, с весами или без) значительно различаются. В статье изучаются свойства производственных CES-функций, существенные при анализе экономических моделей. Доказывается, что CES-функция с конечным числом аргументов при наличии нормированных весов возрастает по параметру эластичности замещения, тогда как CES-функция при отсутствии весов убывает по этому параметру. Характер поведения CES-функции с аргументом $x(i)$, определенным на континуальном множестве $[0, N]$, определяется значением N. При $N = 1$ функция с континуальным аргументом при изменении эластичности замещения ведет себя аналогично функции с конечным числом аргументов с весами, но при $N > 1$ ее поведение может существенно отличаться. Между континуальной и дискретной CES-функциями имеются существенные отличия в поведении при параметре эластичности замещения, стремящемся к нулю. В работе приводятся ошибки, возникающие при использовании континуальных CES-функций в моделях производства с промежуточными товарами, получивших распространение в последние годы. Отмечены недостатки, которые проявляются при применении таких моделей к анализу проблем экономического развития.

Ключевые слова: производственная функция, CES-функция, континуальные и дискретные модели экономики, монотонность по параметру, минимум, существенный инфимум.

Классификация JEL: D240.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматриваются некоторые свойства используемых в экономике функций постоянной эластичности замещения (CES-функций, constant elasticity of substitution) с конечным числом аргументов $F(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{N} \gamma_i x_i^{\eta}\right)^{1/\eta}$ и с континуумом аргументов $F(x) = \left(\int_0^N \gamma(i) x(i)^{\eta} di\right)^{1/\eta}$, где $x_i > 0$, $x(i) > 0$ – аргументы; $N > 0$, $\gamma(i) > 0$, $\gamma_i > 0$, $\eta \neq 0$ – параметры.

Напомним, что для производственной функции n аргументов $G(x_1, \ldots, x_n)$ эластичностью замещения для пары производственных факторов i, j называют величину

$$\sigma = d\ln\left(\frac{x_i}{x_j}\right) \Big/ d\ln\left(\frac{\partial G}{\partial x_j} \Big/ \frac{\partial G}{\partial x_i}\right).$$

Эта величина, в условиях совершенной конкуренции, приближенно равна отношению процентных изменений относительного спроса на факторы и относительной цены факторов при малом изменении последней. У производственной CES-функции для любой пары факторов производства эластичность замещения постоянна и равна $\sigma = 1/(1-\eta)$ при $\eta \neq 1$. В линейном случае при $\eta = 1$ принято говорить, что эластичность замещения бесконечная.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 13-01-00005, 14-01-00448, 14-06-00253).

По-видимому, впервые CES-функция была введена в экономике в статье (Solow, 1956) как функция вида $Y = (AK^{\eta} + L^{\eta})^{1/\eta}$, где $A > 0$, $\eta \neq 0$, описывающая объем выпуска продукта Y с двумя факторами производства: капиталом K и L. Р. Солоу применял производственную CES-функцию при значениях параметра $\eta < 1$, но отмечал, что она имеет экономический смысл и при $\eta > 1$.

Свойства производственных функций, обоснование их формы и вопросы их практического применения изучались в работах российских авторов (см., например, (Баркалов, 1981; Клейнер, 1986; Ершов, 2013; Афанасьев, Пономарева, 2014)).

В последние годы для обоснования вида производственной функции получили распространение вероятностные модели потока технологических идей. Такие модели эндогенно приводят к производственной CES-функции того или иного вида (Jones, 2005; Growiec, 2008; Матвеенко, 2009; Матвеенко, Полякова, 2012).

CES-функции используются также в качестве функций полезности. Принципиальное отличие производственных функций и функций полезности состоит в том, что для производственных функций существенно числовое значение функции, поскольку оно показывает объем производства, тогда как для функций полезности, в большинстве случаев, играют роль только порядковые предпочтения, а численные значения полезности несущественны. Поэтому обычно о функции полезности говорят с точностью до монотонного преобразования, и часто CES-функцией полезности называют функцию типа $x_1^{\eta} + \ldots + x_N^{\eta}$, где $x_1, \ldots, x_N$ – потребляемые количества благ.

В известной модели Диксита–Стиглица монополистической конкуренции функция полезности имеет вид $\left(\int_0^N x(i)^{\eta}\, di\right)^{1/\eta}$, где $[0, N]$ – континуальное множество благ[1]. Модель Диксита–Стиглица легла в основу большого числа исследований в области теории рынков, международной экономики, экономической географии и теории экономического роста. Начиная с работ (Ethier, 1982; Romer, 1990), по аналогии с континуальными функциями полезности, стали применяться континуальные производственные функции.

Следует отметить, что, несмотря на широкое распространение в экономике различных вариантов CES-функции и на близость этой функции к широко известным функциональным формам нормы Гёльдера и функции обобщенного среднего (Харди и др., 1948; Bullen, 2004), некоторые базовые свойства CES-функции до сих пор недостаточно исследованы, в частности свойства, относящиеся к зависимости от параметра η. В работах (La Grandville, Solow, 2006; Nam, Minh, 2008; La Grandville, 2011) анализируются свойства графика функции $M(\eta) = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i^{\eta}\right)^{1/\eta}$, где все величины, кроме η, фиксированы; $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = 1$.

В настоящей статье изучаются свойства производственных CES-функций с конечным числом аргументов и с континуумом аргументов, относящиеся к зависимости значения функции от параметра η, которые оказываются существенными при анализе моделей производства. Мы рассматриваем эти свойства в связи с моделью производства с континуумом промежуточных товаров (Jones, 2011). Как видно из указанной работы, недостаточное знание свойств континуальных CES-функций может привести к некорректным экономическим заключениям.

---

[1] В первоначальной версии модели Диксита–Стиглица в препринте 1974 г. (Dixit, Stiglitz, 2004) фигурировал континуум товаров $[0, N]$, тогда как в журнальной версии (Dixit, Stiglitz, 1977) – конечное и счетное множества товаров. В последовавших многочисленных теоретических приложениях модели Диксита–Стиглица стала стандартом именно континуальная версия. В (Combes et al., 2008, p. 69–71) перечислены теоретико-экономические преимущества континуальной модели Диксита–Стиглица по сравнению с дискретной.

2. СХОДИМОСТЬ CES-ФУНКЦИИ К МИНИМУМУ И МАКСИМУМУ

Основная цель анализа в (Jones, 2011) – изучение роли *слабого звена*, т.е. того из секторов, выпускающих промежуточные товары, который является узким местом для всей экономики.

В частности, в этой работе рассматривалась фирма, которая использует континуум промежуточных товаров [0, 1] и выпускает свой продукт согласно производственной функции

$$Y=\left(\int_0^1 z(i)^{\eta}\,di\right)^{1/\eta}, \tag{1}$$

где $z(i)$ – количество[2] промежуточного товара i.

Автор модели (Jones, 2011, p. 7) полагает, что функция (1) при $\eta\to-\infty$ стремится к $\min z(i)$: “В этом случае CES-функция сходится к функции минимума, так что выпуск равен наименьшему из z_i”.

Хорошо известно, что CES-функция $(\alpha_1 x_1^{\eta}+\ldots+\alpha_N x_N^{\eta})^{1/\eta}$ с конечным числом положительных аргументов и произвольными значениями параметров $\alpha_i>0$ стремится к $\min\{x_1,\ldots,x_N\}$ при $\eta\to-\infty$. Убедиться в этом легко.

Пусть, для простоты обозначений, $\min\{x_1,\ldots,x_N\}=x_1$. Тогда

$$(\alpha_1 x_1^{\eta}+\ldots+\alpha_N x_N^{n})^{1/\eta}=x_1\left(\alpha_1+\alpha_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\eta}+\ldots+\alpha_N\left(\frac{x_N}{x_1}\right)^{\eta}\right)^{1/\eta}.$$

Каждая из величин $(x_i/x_1)^{\eta}$ либо равна единице при всех η, либо стремится к 0 при $\eta\to-\infty$, поэтому $(x_1^{n}+\ldots+x_N^{\eta})^{1/\eta}\to x_1=\min x_i$.

Аналогично, при $\eta\to+\infty$ CES-функция с конечным числом аргументов стремится к $\max\{x_1,\ldots,x_N\}$.

Однако для CES-функции $\left(\int_0^1 z(i)^{\eta}\,di\right)^{1/\eta}$ с континуумом аргументов $\min z(i)$ в общем случае не существует; и даже если минимум существует, то сходимость к минимуму, вообще говоря, отсутствует.

В качестве контрпримера, показывающего отсутствие сходимости CES-функции к минимуму, рассмотрим функцию $z(i)$, которая определена при $i\in[0,\,1]$ следующим образом: $z(i)=2$, если $i\neq 1/2$; $z(i)=1$, если $i=1/2$. Тогда

$$\lim_{\eta\to-\infty}\left(\int_0^1 z(i)^{\eta}\,di\right)^{1/\eta}=2\neq 1=\min z(i).$$

Сходимость континуальной CES-функции к минимуму имела бы место, если бы функция $z(i)$ была непрерывна. В работе (Jones, 2011) нет такого предположения, а если бы оно и было сделано, оно вряд ли могло бы иметь экономический смысл. Число i – это всего лишь индекс промежуточного товара. Промежуточные товары разнородны. К. Джонс, говоря о функции (1) как об относящейся к фирме, указывает среди промежуточных товаров такие, как электричество,

[2] Хотя экономисты часто используют в моделях с континуумом товаров термин “количество товара”, ясно, что на самом деле это “количество” представляет собой плотность или интенсивность выпуска и имеет свойства, отличные от обычных свойств количеств. Например, если, применительно к (1), $z(i)=1$, то неверно, что суммарное количество товаров с индексами $i=0{,}2$ и $i=0{,}5$ равно 2; иначе общее количество (объем) всех товаров множества [0, 1] пришлось бы признать бесконечным, и модель потеряла бы смысл.

транспортные услуги и сырье, используемое в производстве. Если речь идет о репрезентативной фирме в национальной экономике, то множество промежуточных товаров становится еще более разнообразным и включает, например, продукты сельского хозяйства, работу ядерных реакторов, услуги полиции и т.д. При такой разнородности реальных промежуточных товаров сделать предположение о непрерывности в континуальной модели (например, предполагая существование товаров, промежуточных между ядерной энергией и картошкой, чтобы обеспечить между ними непрерывность) – значит наделить множество промежуточных товаров свойствами, которых нет в реальности. Заметим, что при рассмотрении аналогичной модели с конечным числом промежуточных товаров есть возможность совершенно произвольно менять индексы товаров, т.е. ни о какой упорядоченности, свойственной понятию непрерывности на отрезке, нет и речи.

Утверждение о сходимости функции $\left(\int_0^1 z(i)^\eta di\right)^{1/\eta}$ при $\eta \to -\infty$ становится справедливым при замене минимума на существенный инфимум $\operatorname{ess\,inf} z(i)$. В приведенном выше примере $\operatorname{ess\,inf} x_1 = 2$; отсюда видно, что существенный инфимум не совпадает с минимумом. Однако применительно к данной экономической модели (без предположения непрерывности) мы не видим возможности исправить положение, привлекая понятие существенного инфимума.

Смысл анализа роли слабого звена в модели экономики состоит именно в допущении возможности низкой производительности при выпуске одного из промежуточных товаров. Модель с континуумом промежуточных товаров такой возможности не дает, поскольку низкая производительность в точке континуального множества ни на чем не скажется, если нет столь же низких близких значений. Значения функции на множестве меры 0 не могут повлиять на значение интеграла!

Предположение же о наличии близких низких значений (родственное предположению о непрерывности) означало бы наличие особой структуры множества промежуточных товаров, но такая структура в модели не описана, а в реальной экономике, по-видимому, не имеет прототипа.

Аналогично неверно и положение о том, что «... если $\eta \to +\infty$, то выпуск сходится к максимуму z_i – к производственной функции типа “суперзвезды”, подобной рассмотренной Шервином Розеном (1981)»[3] (Jones, 2011, p. 7).

3. МОНОТОННОСТЬ CES-ФУНКЦИЙ ПО ПАРАМЕТРУ η

Теперь необходимо выяснить характер зависимости выпуска Y от параметра η и, соответственно, от эластичности замещения $\sigma = 1/(1-\eta)$. Этот момент важен для экономики, поскольку представляет собой вопрос о том, жесткие (подобные леонтьевским) или гибкие производственные зависимости являются предпочтительными с точки зрения увеличения выпуска в экономике.

Для функции (1) уменьшение параметра η означает повышение степени дополняемости промежуточных товаров при агрегировании[4], но при этом выпуск Y снижается. К. Джонс придает этому факту особое значение: “Экономически, более сильная степень дополняемости генерирует большие веса самым слабым звеньям и сокращает выпуск” (Jones, 2011, p. 7).

Заметим, что в случае конечного числа аргументов функция $Y = \left(\sum_{i=1}^{N} z_i^\eta\right)^{1/\eta}$ не возрастает, а убывает по η, т.е. более сильная степень дополняемости увеличивает выпуск! Точнее говоря, имеется существенное различие между CES-функциями вида $(\alpha_1 x_1^\eta + \ldots + \alpha_N x_N^n)^{1/\eta}$ в случае $\alpha_1 = \ldots = \alpha_N = 1$ и в случае $\alpha_i \in (0,1)$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_N = 1$. Это показывают следующие два предложения.

---

[3] Имеется в виду статья (Rosen, 1981).

[4] Наивысшей степенью дополняемости обладает функция Леонтьева; она получается из CES-функции в пределе при $\eta \to -\infty$. В случае функции Леонтьева промежуточные товары должны агрегироваться в строго определенной пропорции, иначе избыточные товары не могут быть производительно использованы.

Предложение 1. *CES-функция* $G_\eta = (x_1^\eta + \ldots + x_N^\eta)^{1/\eta}$, *где* $\eta \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, *убывает по* η *на каждом из интервалов* $(-\infty, 0)$ *и* $(0, 1)$ *для любых фиксированных положительных чисел* $x_1, \ldots, x_N$.

Доказательство. Производная функции G_n по η равна

$$(x_1^n + \ldots + x_N^\eta)^{1/\eta}\ln(x_1^\eta + \ldots + x_N^\eta)\left(-\frac{1}{\eta^2}\right) + \frac{1}{\eta}(x_1^\eta + \ldots + x_N^n)^{1/\eta - 1}(x_1^\eta \ln x_1 + \ldots + x_N^\eta \ln x_N).$$

Она имеет тот же знак, что и функция

$$-[(x_1^\eta + \ldots + A_N^\eta)\ln(x_1^\eta + \ldots + A_N^\eta) - \eta(x_1^\eta \ln x_1 + \ldots + x_N^\eta \ln x_N)] =$$

$$= -[x_1^\eta \ln((x_1^\eta + \ldots + x_N^\eta)x_1^{-\eta}) + \ldots + x_N^\eta \ln((x_1^\eta + \ldots + x_N^\eta)x_N^{-\eta})] =$$

$$= -[x_1^\eta \ln(1 + x_1^{-\eta}(x_2^\eta + \ldots + x_N^\eta)) + \ldots + x_N^\eta \ln(1 + x_N^{-\eta}(A_1^\eta + \ldots + A_{N-1}^\eta))] < 0.$$

Это означает, что функция G_η убывает. ■

Предложение 2. *CES-функция* $\tilde{G}_\eta = (\alpha_1 x_1^\eta + \ldots + \alpha_N x_N^\eta)^{1/p}$, *где* $\eta \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$ *не убывает по* η *на каждом из интервалов* $(-\infty, 0)$ *и* $(0, 1)$ *для любых фиксированных положительных чисел* $x_1, \ldots, x_N$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из теоремы об обобщенном среднем (Харди и др., 1948). ■

В случае континуума промежуточных товаров мы также можем определить CES-функции, аналогичные рассмотренным в предложениях 1 и 2 функциям G_η и $\tilde{G}_\eta$. Следующее предложение является континуальным аналогом предложения 2.

Предложение 3. *Пусть неотрицательные функции* $f(t)$, $g(t)$ *интегрируемы на отрезке* $[0, 1]$, *причем* $\int_0^1 f(t)dt = 1$. *Тогда функция* $\phi(\eta) = \left(\int_0^1 f(t) g^\eta(t) dt\right)^{1/\eta}$ *– неубывающая на множествах* $(-\infty, 0)$ *и* $(0, 1)$.

Доказательство. Определим величины

$$\phi_n(\eta) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} g^\eta(k/n) \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt\right)^{1/\eta}.$$

Очевидно, что $\phi_n(\eta) \to \phi(\eta)$ поточечно. Обозначим через A_k величину $\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt$. Тогда $\sum_{k=0}^{n-1} A_k = 1$. По предложению 2 функция $\phi_n(\eta)$ неубывающая при любом n. А тогда не убывает и функция $\phi(\eta)$. ■

Может показаться несколько неожиданным тот факт, что при использовании континуального множества $[0, 1]$ нет столь радикального различия, как то, которое демонстрируют предложения 1 и 2 для функций G_η и $\tilde{G}_\eta$ в случае конечного числа измерений. Это видно из следующего следствия из предложения 3.

Следствие. Пусть неотрицательная функция $g(t)$ – интегрируемая на отрезке $[0, 1]$. Тогда функция $\psi(\eta) = \left(\int_0^1 g^\eta(t) dt\right)^{1/\eta}$ – неубывающая на множествах $(-\infty, 0)$ и $(0, 1)$.

Доказательство. Это следует из предложения 3 при $f(t) \equiv 1$. ■

Однако совпадение направления изменений для функций $\phi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ при изменении параметра η доказано нами только для множества [0, 1] и свидетельствует, по-видимому, о различии свойств CES-функций, определенных для континуальных множеств $[0, N]$ при $N \le 1$ и при $N > 1$. В последнем случае ситуация может быть противоположной, как показывает такой пример: если выполняется (1) и $z(i) \equiv 1$ для всех $i \in [0, N]$, то, очевидно, $Y = N^{1/\eta}$; в таком случае Y убывает по η, т.е. более сильная степень дополняемости (в частности, большая абсолютная величина параметра η при $\eta < 0$) увеличивает выпуск, а не сокращает его.

Совершенно неясно, какой экономический смысл может иметь небольшое расширение континуального множества промежуточных товаров от [0, 1] до $[0, 1 + \varepsilon]$, которое столь существенно меняет свойства производственной функции. По-видимому, трудно (если вообще возможно) дать экономическую интерпретацию наличию у континуального множества промежуточных товаров границы (равной 1), переход через которую резко меняет свойства модели, поэтому не следует столь однозначно, как это сделано в (Jones, 2011, p. 7), утверждать, что более сильная степень дополняемости сокращает выпуск.

4. МОДЕЛЬ С ДВУМЯ ФУНКЦИЯМИ АГРЕГИРОВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТОВАРОВ

В более полной и сложной модели (Jones, 2011, p. 8) множество промежуточных товаров, по-прежнему, описывается отрезком [0, 1], а производство каждого промежуточного товара i происходит согласно $Q(i) = A(i)f(K(i), \ H(i))^{1-\sigma}X(i)^{\sigma}$. Здесь $Q(i)$ – выпуск промежуточного товара[5] i; $A(i)$ – коэффициент общей производительности факторов (TFP, total factor productivity) сектора i; $K(i)$, $H(i)$, $X(i)$ – соответственно физический капитал, человеческий капитал и агрегат промежуточных товаров, используемые при производстве промежуточного товара i; $\sigma \in (0,1)$ – параметр; функция f обладает стандартными свойствами производственной функции, т.е. линейно однородна, возрастает и строго вогнута по каждому аргументу[6].

Суммарные запасы капитала $K = \int_0^1 K(i)di$, человеческого капитала $H = \int_0^1 H(i)di$ и агрегата промежуточного товара $X = \int_0^1 X(i)di$ продаются на рынке для использования секторами промежуточных товаров[7]. Каждый отдельный промежуточный товар i продается на рынке для производства агрегата финального товара (ВВП) и агрегата промежуточного товара: $Q(i) = c(i) + z(i)$.

Производство агрегата финального товара описывается CES-функцией $Y = \left(\int_0^1 c(i)^{\theta} di \right)^{1/\theta}$, где $\theta \in (0,1)$, а производство агрегата промежуточного товара – CES-функцией $X = \left(\int_0^1 z(i)^{\rho} di \right)^{1/\rho}$, где $\rho \in (-\infty, 0)$. Предположение о различии знаков параметров θ и ρ – это способ (возможно, слишком радикальный) подчеркнуть, что степень дополняемости затрат при производстве агрегата промежуточных товаров больше, чем при производстве финального товара.

В (Jones, 2011) рассматриваются оптимизационные задачи, решаемые фирмами, производящими промежуточные товары и агрегаты товаров, и на основе условий оптимальности первого

[5] Поскольку имеется континуум производственных функций, правильнее говорить не о выпуске, а об интенсивности выпуска.

[6] В (Jones, 2011) предполагается, что f – функция Кобба–Дугласа, но такое предположение излишне.

[7] Из указанных равенств видно, что функции $K(i)$, $H(i)$, $X(i)$ играют роль плотностей.

порядка для этих задач выводится производственная функция экономики в целом в случае рыночного равновесия. Она имеет вид

$$Y = A f(K, H), \tag{2}$$

где f – функция, определяющая структуру выпуска в секторах. При этом коэффициент TFP экономики в целом оказывается равным $A = (1-\sigma)\sigma^{\sigma/(1-\sigma)} B_0 B_\rho^{\sigma/(1-\sigma)}$, где $B_s = \left(\int_0^1 A(i)^{s/(1-s)}\,di\right)^{(1-s)/s}$ при $s = \theta, \rho$. Напомним, что $A(i)$ – это коэффициенты TFP секторов производства промежуточных товаров.

Изучается также *симметричный случай*, который можно рассматривать как одну из возможных альтернатив рыночному равновесию. В симметричном случае капитал K, человеческий капитал H и агрегат промежуточных товаров X равномерно распределены между секторами $i \in [0,1]$. Для симметричного случая в (Jones, 2011) показано, что производственная функция экономики в целом также имеет вид (2), но коэффициент TFP равен $\tilde{A} = (1-\sigma)\sigma^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} S_\theta S_\rho^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$, где $S_s = \left(\int_0^1 A(i)^s\,di\right)^{1/s}$, $s = \theta, \rho$.

5. РОЛЬ МИНИМУМА ФУНКЦИИ $A(i)$

Слабым звеном называется сектор $i \in [0,1]$, обладающий наименьшей производительностью $i^* = \arg\min_{i\in[0,1]} A(i)$. Разумеется, если указанный минимум не существует, говорить о слабом звене нельзя.

В (Jones, 2011) полагается, что при высокой степени дополняемости (т.е. при большом по абсолютной величине значении параметра ρ) слабое звено может существенно ограничивать ВВП в экономике, и что при изменении параметра ρ от $-\infty$ до 0 величина S_ρ возрастает от нижнего значения, равного минимуму $A(i)$[8], до значения, равного среднему геометрическому величин $A(i)$[9].

Этому свойству придается существенный экономический смысл: фирмы двух стран, например США и Кении, могут несущественно отличаться по среднему значению $A(i)$ и параметрам θ и ρ, однако Кения может иметь очень низкую TFP слабого звена.

Пусть $\rho \to -\infty$. “Тогда агрегатная TFP зависит решающим образом от наименьшего уровня TFP среди секторов экономики, т.е. от самого слабого звена” (Jones, 2011, p. 11) и различие в минимумах $A(i)$ в этих странах может существенно влиять на различия в значениях TFP (A) и ВВП (Y). Отсюда делается вывод, что «... важность “слабого звена” в производстве зависит от степени дополняемости и от относительной важности промежуточных товаров» (Jones, 2011, p. 11).

С этим выводом трудно согласиться. Во-первых, как мы уже отмечали, минимум функции $A(i)$ может не существовать. Во-вторых, если минимум существует, он может не играть никакой роли, поскольку S_ρ, вообще говоря, не превращается в минимум при $\rho \to -\infty$. В-третьих, лишь благодаря тому, что используется континуальное множество промежуточных товаров [0, 1], а не [0, N] при $N > 1$, минимум оказывается ниже, а не выше по сравнению с предельным значением величины S_ρ при $\rho \to 0$. Действительно, пусть $S_\rho = \left(\int_0^N A(i)^\rho\,di\right)^{1/\rho}$, $N > 1$, $A(i) \equiv 1$. Тогда $\min A(i) = 1$, однако $S_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Более того, $S_\rho < \min A(i)$ при всех $\rho \in (-\infty, 0)$.

[8] На самом деле, нижнее значение равно $\operatorname{ess\,inf} A(i)$.

[9] Предел S_ρ при $\rho \to 0$ равен $\exp\left(\int_0^1 \ln A(i)\,di\right)$.

6. СРАВНЕНИЕ РЫНОЧНОГО РАВНОВЕСИЯ И СИММЕТРИЧНОГО СЛУЧАЯ

Вопрос о роли минимума функции $A(i)$ возникает снова при сравнении рыночного равновесия и симметричного случая.

“Дополняемость при определении B_ρ меньше, чем при определении S_ρ” (Jones, 2011, p. 14), поскольку, когда параметр ρ функции S_ρ изменяется в пределах $(-\infty, 0)$, параметр $\rho/(1-\rho)$ функции B_ρ находится лишь в пределах (–1, 0). Значение этого факта автор модели объясняет тем, что при $\rho \to -\infty$ величина S_ρ “ ...зависит от наименьшей из A_i, от слабого звена” (Jones, 2011, p. 15). Мы уже видели, что на самом деле это не так.

Величина $B_\rho = \left(\int\limits_0^1 A(i)^{\rho/(1-\rho)} di \right)^{(1-\rho)/\rho}$ при $\rho \to -\infty$ превращается в среднее гармоническое $B_\rho = \int\limits_0^1 \left(A(i)^{-1} di \right)^{-1}$, что превосходит минимум, к которому стремится S_ρ при $\rho \to -\infty$. Это выделяется как существенный результат: “Губительно низкая производительность одной-единственной разновидности фатальна при симметричном размещении, но не при равновесном размещении. Почему? Причина в том, что равновесное размещение способно усиливать слабые связи, направляя больше ресурсов на виды деятельности с низкой производительностью” (Jones, 2011, p. 15).

Такое сравнение имело бы смысл, если бы был обоснован выбор в качестве множества промежуточных товаров именно континуального множества [0, 1], а не множества [0, N], где $N > 1$. Однако при отсутствии такого обоснования результат сравнения может стать противоположным. Если множеством промежуточных товаров служит отрезок [0, N], $N > 1$ и $A(i) \equiv 1$, то $B_\rho \to N^{-1}$ при $\rho \to -\infty$. При этом вполне возможно, что $N^{-1} < \min A(i)$, тогда B_ρ становится меньше, чем S_ρ, т.е. симметричное размещение дает лучший результат по сравнению с равновесным.

Аналогичные рассуждения можно провести и применительно к случаю $\theta \to +\infty$, для которого в (Jones, 2011) ошибочно полагается, что $B_\theta \to \max A(i)$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хотя реальные экономические процессы в основном имеют дискретный характер, применение аппарата континуальной математики является чрезвычайно продуктивным, и континуальные модели широко используются в теоретической экономике.

В одних случаях смысл континуальных моделей экономики вполне очевиден. Например, в теории экономического роста рассматривается функция полезности вида $\int\limits_0^T e^{-\rho t} u(c(t)) dt$, где [0, T] – период времени, ρ – норма дисконтирования, $c(t)$ – поток потребления, u – так называемая моментная функция полезности. Здесь $u(c(t))$ имеет смысл скорости изменения полезности, что понятно и с точки зрения экономики, и с точки зрения известных аналогов этого интеграла в естественных науках.

В других случаях переход в экономике от дискретного к континуальному случаю приводит к появлению новых по сравнению с реальностью конструкций. Например, в континуальной версии модели Диксита–Стиглица рассматривается функция полезности $\left(\int\limits_0^N x^\eta(i) di \right)^{1/\eta}$, где [0, N] – множество производителей разновидностей товара в отрасли с монополистической конкуренцией и одновременно множество товаров, выпускаемых этими производителями; i – индекс товара. В соответствующей дискретной модели аналогом величины $x(i)$ является количество товара i, однако в непрерывной модели величина $x(i)$ становится плотностью количества товара. При этом в модели предполагается, что каждый производитель i назначает цену товара $p(i)$ и получает выручку (точнее, плотность выручки) $p(i)x(i)$. Суммарные затраты на приобретение всех разновидностей при этом равны $\int_0^N p(i)x(i)di$.

Следующим шагом после появления модели Диксита–Стиглица стало развитие моделей с континуальными производственными функциями ((Ethier, 1982; Romer, 1990) и последовавшие за ними работы).

В (Jones, 2011) впервые был поставлен вопрос о зависимости выпуска, описываемого производственной CES-функцией, от параметра η и о роли пределов CES-функции при значении параметра, стремящемся к $-\infty$ или к $+\infty$. Однако из-за неточного использования свойств континуальной CES-функции выводы оказались некорректными, и интересные содержательные утверждения работы (Jones, 2011) приходится рассматривать как рабочие гипотезы, которые могут быть проверены только на более адекватных моделях.

В этой статье нами рассмотрены свойства CES-функций, которые необходимы при анализе моделей производства с промежуточными товарами. Мы показали, что производственная CES-функция (1), если не наложено предположение непрерывности, может не иметь минимума, а при наличии минимума, вообще говоря, не происходит сходимости функции (1) к минимуму. То же самое можно сказать и о максимуме.

Предположение непрерывности, если бы оно было введено в модель (Jones, 2011), вряд ли имело бы экономический смысл в силу принципиальной разнородности промежуточных товаров. В этом, кстати, отличие модели Джонса от модели Диксита–Стиглица, в которой речь идет о разновидностях товара в единственной отрасли с монополистической конкуренцией – по-видимому, там непрерывность более правдоподобна.

Утверждение о сходимости континуальной CES-функции при $\eta \to -\infty$ становится справедливым при замене минимума на существенный инфимум, однако мы не видим возможности исправить положение, привлекая понятие существенного инфимума, поскольку целью модели Джонса является анализ роли слабого звена в экономике, а такой анализ строится на допущении возможности низкой производительности при выпуске одного из промежуточных товаров. Модель с континуумом промежуточных товаров такой возможности не дает, поскольку низкая производительность в точке, т.е. на множестве меры 0, не может повлиять на значение интеграла, а предположение о наличии близких низких значений означало бы наличие особой структуры множества промежуточных товаров, но такая структура никак не описана в модели и неизвестно, имеет ли место аналог в реальной экономике.

Важным для экономики является вопрос о направлении зависимости выпуска от параметра η производственной CES-функции (и, соответственно, от эластичности замещения $\sigma = 1/(1-\eta)$). В рассмотренном в (Jones, 2011) случае множества промежуточных товаров [0, 1] зависимость положительная, и на этом основании делаются достаточно серьезные экономические выводы. В разд. 3 мы показали, что характер зависимости определяется тем, какое именно континуальное множество выбрано, и уже для множества промежуточных товаров $[0, 1 + \varepsilon]$ направление зависимости может измениться на противоположное. Поскольку вряд ли возможно обосновать столь точно выбор границы континуального множества, результат континуальной модели является неробастным и вряд ли годится для каких-либо выводов относительно реальной экономики.

Указанные свойства континуальных CES-функций проявляются как в простой модели с одной производственной функцией, так и в более полной и сложной модели с двумя CES-функциями, описывающими формирование финального товара (ВВП) и агрегата промежуточных товаров. Для такой модели в (Jones, 2011) проводится сравнение рыночного равновесия и случая симметричного распределения ресурсов между отраслями, производящими промежуточные товары. При этом особый экономический смысл придается тому факту, что при параметре, стремящемся к $-\infty$, коэффициент, характеризующий TFP, в симметричном случае превращается в минимум, а в случае рыночного равновесия – в среднее геометрическое, превосходящее минимум.

В разд. 6 мы показали, что и в основе этого результата также лежит выбор в качестве множества промежуточных товаров отрезка [0, 1]. Если бы мы взяли множество $[0, N]$ при $N > 1$, то минимум мог бы оказаться больше среднего геометрического.

Подводя итог сказанному, можно отметить наличие существенных различий в свойствах CES-функций с конечным числом аргументов и с континуумом аргументов, касающихся направления монотонности функции по параметру и сходимости функции к минимуму или максимуму аргументов. Эти отличия следует учитывать при использовании CES-функций в моделях производства.

Приходится сделать вывод об ограниченности возможностей континуальных моделей при анализе вопросов, связанных с экономическим развитием, когда указанные свойства производственных функций приобретают ведущую роль. Некоторые результаты, полученные с помощью таких моделей, оказываются неробастными, другие требуют введения предположения о непрерывности, которое далеко не всегда экономически оправдано. Выходом в таких ситуациях нам представляется применение моделей с дискретным множеством промежуточных товаров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Афанасьев А.А., Пономарева О.С. (2014). Производственная функция народного хозяйства России в 1990–2012 гг. // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 4. С. 21–33.

Баркалов Н.Б. (1981). Производственные функции в моделях экономического роста. М.: Издательство МГУ.

Ершов Э.Б. (2013). Композитные производственные функции // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. Т. 17. № 1. С. 108–129.

Клейнер Г.Б. (1986). Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика.

Матвеенко А.В., Полякова Е.В. (2012). Моделирование изменения технологий и потребительских предпочтений // *Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова*. Т. 18. № 6. С. 159–162.

Матвеенко В.Д. (2009). "Анатомия" производственной функции: технологическое меню и выбор наилучшей технологии // *Экономика и математические методы*. Т. 46. № 2. С. 105–115.

Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. (1948). Неравенства. М.: Государственное издательство иностранной литературы.

Bullen P.S. (2004). Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Combes P.-P., Mayer T., Thisse J.-F. (2008). Economic Geography: The Integration of Regions and Nations. Princeton: Princeton University Press.

Dixit A.K., Stiglitz J.E. (1977). Monopolistic Competition and Optimum Product diversity // *American Economic Review*. Vol. 67. No. 3. P. 297–308.

Dixit A.K., Stiglitz J.E. (2004). Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity (May 1974). In: "*Monopolistic competition revolution in retrospect*" Brakman S., Hejdra B.J. (eds.). Princeton: Princeton University Press. P. 70–88.

Ethier W.I. (1982). National and International Returns to Scale in the Modern Theory of International Trade // *American Economic Review*. Vol. 72. No. 3. P. 389–405.

Growiec J. (2008). Production Functions and Distributions of unit Factor Productivities: Uncovering the Link // *Economic Letters*. Vol. 101. No. 1. P. 87–90.

Jones C.I. (2005). The Shape of Production Function and the Direction of Technical Change // *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 120. No. 2. P. 517–549.

Jones C.I. (2011). Intermediate Goods and Weak Links in the Theory of Economic Development // *American Economic Journal: Macroeconomics*. Vol. 3. P. 1–28.

La Grandville O. de (2011). A New Property of General Means of Order with an Application to the Theory of Economic Growth // *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 8. No. 1. Article 4.

La Grandville O. de, Solow R.M. (2006). A Conjecture on General Means // *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Vol. 7. No. 1. P. 1–3.

Nam P.T., Minh M.N. (2008). Proof for a Conjecture on General Means // *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Vol. 9. No. 3. Article 86.

Romer P. (1990). Endogenous Technological Change // *Journal of Political Economy*. Vol. 98. No. 5. P. S71–S102.

Rosen S. (1981). The Economy of Superstars // *American Economic Review*. Vol. 71. No. 5. P. 845–858.

Solow R. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth // *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 70. No. 1. P. 65–94.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Afanasyev A.A., Ponomareva O.S. (2014). The Aggregate Production Function of Russian Economy in 1990–2012. *Economics and Mathematical Methods* 50, 4, 21–33 (in Russian).

Barkalov N.B. (1981). Production Functions in the Models of Economic Growth. Moscow: Izdatel'stvo MGU (in Russian).

Bullen P.S. (2004). Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Combes P.-P., Mayer T., Thisse J.-F. (2008). Economic Geography: The Integration of Regions and Nations. Princeton: Princeton University Press.

Dixit A.K., Stiglitz J.E. (1977). Monopolistic Competition and Optimum Product diversity. *American Economic Review* 67, 3, 297–308.

Dixit A.K., Stiglitz J.E. (2004). Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity (May 1974). In: "*Monopolistic competition revolution in retrospect*" Brakman S., Hejdra B.J. (eds.). Princeton: Princeton University Press, 70–88.

Ershov E.B. (2013). Composite Production Functions. *The HSE Economic Journal* 17, 1, 108–129 (in Russian).

Ethier W.I. (1982). National and International Returns to Scale in the Modern Theory of International Trade. *American Economic Review* 72, 3, 389–405.

Growiec J. (2008). Production Functions and Distributions of unit Factor Productivities: Uncovering the Link. *Economic Letters* 101, 1, 87–90.

Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. (1934). Inequalities. Cambridge: Cambridge University Press.

Jones C.I. (2005). The Shape of Production Function and the Direction of Technical Change. *Quarterly Journal of Economics* 120, 2, 517–549.

Jones C.I. (2011). Intermediate Goods and Weak Links in the Theory of Economic Development. *American Economic Journal: Macroeconomics* 3, 1–28.

Kleyner G.B. (1986). Production Functions: Theory, Methods, and Application. Moscow: Finansy i statistika (in Russian).

La Grandville O. de (2011). A New Property of General Means of Order p with an Application to the Theory of Economic Growth. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications* 8, 1. Article 4.

La Grandville O. de, Solow R.M. (2006). A Conjecture on General Means. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 7, 1, 1–3.

Matveenko A.V., Polyakova E.V. (2012). Modeling of Technological Changes and Changes of Consumer's Preferences. *Vestnik of Nekrasov Kostroma State University* 18, 6, 159–162 (in Russian).

Matveenko V.D. (2009). An "Anatomy" of Production Functions: a Technological Menu and a Choice of the Best Technology. *Economics and Mathematical Methods* 46, 2, 105–115 (in Russian).

Nam P.T., Minh M.N. (2008). Proof for a Conjecture on General Means. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 9, 3. Article 86.

Romer P. (1990). Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy* 98, 5, S71–S102.

Rosen S. (1981). The Economy of Superstars. *American Economic Review* 71, 5, 845–858.

Solow R. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics* 70, 1, 65–94.

Поступила в редакцию
15.01.2015 г.

On the Properties of CES Production Functions in a Model of Production with Intermediate Goods

V.D. Matveenko, E.M. Bronshtein

CES production functions are widely used in economic growth and development researches. However, it is not always taken into account that properties of different specifications of CES functions (continual or discrete, with the weights or without them) are rather differ. The properties of CES production functions, essential for analysis of economic models, are studied. The CES function is proved with a finite number of arguments with normalized weights increases with the elasticity of substitution parameter, while under the absence of weights this parameter of the CES function decreases. Pattern of behavior of the CES function with argument $x(i)$, defined on a continual set $[0,N]$, is operated by the value N. Under $N = 1$ the function with continual argument behaves (in respect of the elasticity of substitution) similarly to the function with a finite number of arguments with weights, but under $N > 1$ its behavior is quite different. There are important differences between the continual and the discrete CES functions when the elasticity of substitution parameter converges to zero. We show the mistakes when continual CES functions are applied to models of production with intermediate goods which have gained popularity in recent years. We also show some shortcomings of continual models with intermediate goods when using these models for the analysis of economic development problems.

Keywords: production function, CES function, continuous and discrete economical models, monotony, minimum, essential infimum.

JEL Classification: D240.