

## Экономические и эволюционные аспекты оптимального рыбного промысла

© 2019 г. В.Г. Ильичев

*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*  
*E-mail: vitaly369@yandex.ru*

Поступила в редакцию 25.02.2019 г.

Статья подготовлена в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН (проект АААА-А18-118122790121-5), а также гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00453).

В рамках дискретных эколого-эволюционных моделей исследована проблема максимизации суммарного многолетнего вылова рыбы в водоеме, состоящем из двух зон. Показано, что при учете поведенческой адаптации рыбной популяции ее оптимальный вылов снижается. Когда водоем разделен на две зоны (промысловую и заповедник), оптимальный вылов существенно зависит от соотношения экологических емкостей (т.е. величины кормовых ресурсов) данных акваторий. Для решения теоретических и прикладных проблем использовались геометрические методы нелинейного анализа и динамическое программирование, в котором функция Беллмана определяла наибольший доход от промысла. Новизна данной работы состоит в обнаружении неожиданных экономических и биологических эффектов, вызванных процессами адаптации поведения рыбной популяций при промысле. Так, если обе зоны являются промысловыми, то возможна парадоксальная стратегия одного из конкурирующих “рыбаков” — временное уменьшение своего вылова. В результате возникает устойчивая деформация маршрута миграции рыб, которые теперь предпочитают находиться в необлавливаемой зоне. Удивительно, но даже после последующего включения оптимального вылова в данном районе он остается все еще более привлекательным для рыб. В работе введено новое и эффективное понятие внутренних цен для рыбных запасов в том или ином районе. Формально эти цены являются частными производными функции Беллмана и могут быть использованы в качестве налога на единицу выловленной рыбы. В этом случае проблема многолетней оптимизации сводится к решению простой задачи максимизации одногодичного вылова. Пространственная неоднородность внутренних цен позволяет конструировать разнообразные спекулятивные механизмы обмена потребляемыми ресурсами.

**Ключевые слова:** многолетний промысел, оптимизация, пространственная адаптация, внутренние цены.

**Классификация JEL:** Q57.

**DOI:** 10.31857/S042473880005778-4

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема разработки стратегии промысла является популярной в теоретических и прикладных исследованиях (Скалецкая и др., 1979; Абакумов, Израильский, 2017; Clark, 2010; и т.д.). В основном здесь обсуждаются вопросы максимизации многолетнего вылова или устойчивости равновесий в рамках жестких математических моделей. В работе (Ильичев и др., 2000) авторы обнаружили эффект стабилизации хаотической динамики (подробнее см. в (Якобсон, 1976)) в модели Риккера (Ricker, 1954) при оптимальном промысле. Иногда при обсуждении проблем промысла используется и теоретико-игровой подход (Mazalov, Rettieva, 2004).

В традиционных моделях оптимального вылова, как правило, не учитывается эволюционный ответ рыбной популяции на промысел. Так, пространственно-временной характер вылова может вызвать изменение маршрута миграции рыбы. Требование учета механизма адаптации вносит новизну в привычную задачу оптимизации и вызывает новые содержательные постановки задач. Основная трудность здесь заключается в эффективной реализации эволюционного процесса.

Напомним, что в известных работах (например, (Свирижев, Пасеков, 1982)) предлагается прямолинейное классическое копирование биологических факторов. А именно сначала задается до-

статочной большой набор близких субпопуляций (мутантов) с несколькими различными параметрами, а затем в результате конкуренции выявляется победитель — субпопуляция с наилучшим параметром. Такой пассивный подход требует задания тысячи и более переменных, а компьютерная реализация — значительных затрат машинного времени. В работе (Ильичев, Ильичева, 2014) был предложен быстрый метод адаптации, когда задается малое число мутантов, а параметры исходной популяции активно изменяются. Вероятно, эти модельные механизмы можно использовать и в моделях эволюционной экономики (Экономическая трансформация..., 2004).

Далее будет описана мягкая эколого-эволюционная модель, в которой маршрут миграции популяции рыб может целесообразно изменяться в зависимости от распределения кормовых ресурсов и вылова. Оказывается, во многих вопросах пространственной адаптации ключевую роль играет не финальная матрица миграции  $M$ , а ее положительный собственный вектор  $\pi$ . Этот (перроновский) вектор удовлетворяет соотношению  $M\pi = \pi$ , и при положительной  $M$  оказывается единственным (Робертс, 1986). Удобно считать, что сумма всех компонент  $\pi$  равна 1, тогда  $\pi_i$  является относительным временем пребывания популяции в районе  $i$ . Установлено (Ильичев, Ильичева, 2018), что всякое адаптивное поведение сводится, по сути, к перестройке времен пребывания в некотором районе. Таким образом, матрица является лишь одной из многих *форм* конкретной миграции, а истинным *содержанием* миграции будет перроновский вектор.

Оказывается, задачу оптимального промысла можно дополнить экономической начинкой, основанной на идее внутренних цен рыбной популяции для различных районов. Это позволяет задать эффективные экономические механизмы: налогообложение, торговые обмены и др. В данной статье приведена иллюстрация указанных подходов.

## 2. ВОДОЕМ С ЗАПОВЕДНИКОМ. МИГРАЦИЯ И АДАПТАЦИЯ РЫБ

Пусть водоем разбит на две зоны (района)  $U$  и  $Z$ . В зоне  $U$  допускается вылов, а в  $Z$  расположен заповедник (неприкосновенный запас). Предполагается, что рыбная популяция мигрирует между этими районами. Формально, пусть  $x_t$  и  $y_t$  — текущие численности данной популяции в зонах  $U$  и  $Z$  соответственно. Тогда ее перемещение за единицу времени задается линейной моделью:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $m_{ij} \geq 0$ . Поскольку общая численность популяции при перемещениях не меняется, сумма элементов по каждому столбцу равна 1. Такие матрицы называют марковскими. Удобно представлять двумерные марковские матрицы в виде:

$$M = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ . Внедиагональные элементы  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют интенсивность движения популяции. Так,  $\beta$  — это доля популяции, которая может перейти из района  $Z$  в  $U$ . Аналогично,  $\alpha$  определяет долю популяции, переходящую из  $U$  в  $Z$ . Воспользуемся представлением матриц вида (2) как некоторых точек плоскости:

$$M \rightarrow (\alpha, \beta). \quad (3)$$

В совокупности они заполняют весь квадрат  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$ . Каждая точка  $Q$  является выпуклой комбинацией этих вершин. По сути, они составляют собственный базис. Приведем базисные матрицы:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Считаем, что исходная популяция с матрицей миграции  $M_0$  может порождать мутантов с маршрутами  $\mu$ , близкими к  $M_0$ . А именно:

$$\mu = (1 - \varepsilon)M_0 + \varepsilon E_i, \quad (4)$$

где  $\varepsilon > 0$  и мало,  $E_i$  — одна из базисных матриц.

В процессе конкуренции исходной популяции с семейством таких мутантов может выявиться сильный мутант, численность которого превосходит численность исходной популяции в 10 и более раз. Если сильных мутантов несколько, выбираем самого многочисленного. А для всякого более слабого мутанта порождаем новый маршрут (4) с другими  $\varepsilon$  и  $E_i$ .

Далее, считаем, что сильный мутант задает направление естественного отбора. Формально пусть  $\mu^*$  — матрица миграции сильного мутанта. Тогда деформируем матрицу исходной популяции следующим образом:

$$M_0 \rightarrow (1 - \xi)M_0 + \xi\mu^*, \quad (5)$$

где  $\xi > 0$  и мало, параметр  $\xi$  задает скорость адаптации.

Пусть  $M_0$  и  $M_1$  — две марковские матрицы. Тогда к  $M_1$  можно сколь угодно близко подойти с помощью композиции формул вида (4) и (5) при подходящем выборе базисных матриц (Ильичев, 2012). Содержательно, это означает практическую достижимость любой марковской матрицы с помощью композиции формул вида (4) и (5).

### 3. ВОДОЕМ С ЗАПОВЕДНИКОМ. ОПТИМИЗАЦИЯ И ВНУТРЕННИЕ ЦЕНЫ

Введем параметр  $\lambda \in (0, 1)$ , который характеризует долю зоны  $U$  в водоеме: при  $\lambda \approx 0$  район промысла мал, а при  $\lambda \approx 1$  велик. Обозначим через  $K$  общую величину корма в водоеме. В этом случае  $K_1 = \lambda K$  и  $K_2 = (1 - \lambda)K$  — это величина корма в зоне  $U$  и в зоне  $Z$  соответственно.

Рассмотрим простейший случай, когда запасы корма фиксированы и не изменяются в каждом районе.

В оптимизационном блоке модели рассматривается промысел в зоне  $U$  на многолетний период. Обозначим через  $B_T(x, y)$  — оптимальный доход за  $(T + 1)$  лет,  $x$  и  $y$  — начальные запасы рыбы равны в зоне  $U$  и в зоне  $Z$  соответственно. Полагаем на всем допустимым  $\{u_t\}$

$$B_T(x, y) = \sum_{t=0}^T \gamma^t p(u_t) \rightarrow \max. \quad (6)$$

Здесь  $\gamma$  — коэффициент дисконтирования (полагаем  $\gamma = 0,9$ );  $u_t$  — величина вылова в момент  $t$ ;  $0 \leq u_t \leq x_t$ ;  $p$  — вогнутая и монотонно возрастающая, гладкая функция полезности с  $p(0) = 0$ , например  $p'(0) = 10$ . Для определенности пусть  $p(u) = 10u / (1 + u)$ .

Динамику численности  $z_t$  неподвижной популяции формально представим в виде  $z_{t+1} = f(z_t, K)$ . Используем простейший вариант нелинейного роста: пусть  $f$  — гладкая, строго возрастающая и вогнутая функция от  $z$ ;  $f(0, K) = 0$  и  $f'_z(0, K) > 1$ . Последнее неравенство гарантирует положительную численность популяции для всех  $t$ . Введем требование на ограничение роста численности популяции, например, пусть популяция растет в *медленном темпе*, т.е. при некотором  $\omega < 1$  имеет место  $f(z, K) < \omega z$  для каждого  $K$  и для всех достаточно больших  $z$ . В частности, ниже будет использована зависимость Контуа (Contois, 1959):  $f(z, K) = z(d + rK / (K + z))$ , где  $d = 0,25$  и  $r = 3$  — скорости смертности и роста.

Обозначим  $f_1(z) = f(z, K_1)$  и  $f_2(z) = f(z, K_2)$ . При заданной матрице миграции и последовательности ежегодных выловов  $\{u_t\}$  динамика фазовых переменных в водоеме с заповедником задается системой:

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1 - \alpha)f_1(x_t - u_t) + \beta f_2(y_t), \\ y_{t+1} = \alpha f_1(x_t - u_t) + (1 - \beta)f_2(y_t). \end{cases} \quad (7)$$

Компьютерные расчеты показали, что траектория (7) при оптимальной стратегии вылова стремится к некоторому равновесию. В облегченной версии вылова, когда  $u_t = \eta x_t$  при фиксированном  $0 < \eta < 1$ , это явление можно строго доказать.

**Утверждение 1.** Пусть существует положительное равновесие  $(\bar{x}, \bar{y})$  в модели (7). Тогда оно оказывается глобально устойчивым.

Обоснование данного утверждения приведено в Приложении, п. 1.

Маршрут исходной популяция является эволюционно устойчивой матрицей  $M_0$  (ЭУ-матрица), если данная популяция не вытесняется своими мутантами с близкими к  $M_0$  маршрутами.

В природе могут реализоваться только ЭУ-матрицы миграции. В наиболее сильном варианте этого понятия число мутантов может быть любым. В простейшем варианте можно ограничиться и одним мутантом. В приведенных ниже компьютерных расчетах использовались два мутанта, в которых перебор базисных матриц происходит в противоположных направлениях.

Актуальна задача, насколько зависят получаемые результаты от числа генерируемых мутантов. Предварительные расчеты показали, что найденные здесь закономерности слабо обусловлены выбранным семейством мутантов. Строго говоря, это пока открытая проблема.

Для краткости, запишем модель (7) в форме:

$$\tilde{x} = P(x - u, y), \quad \tilde{y} = Q(x - u, y). \quad (8)$$

Очевидно, что все функции в (8) являются строго возрастающими и вогнутыми по каждой переменной. Теперь согласно известной схеме динамического программирования при построении  $B_T(x, y)$  целесообразно воспользоваться рекурсией Беллмана (Беллман, 1960):

$$B_{T+1}(x, y) = \max[p(u) + \gamma B_T(\tilde{x}, \tilde{y})], \quad 0 \leq u \leq x, \quad (9)$$

где  $B_0(x, y) = p(x)$ . Каждая  $B_T(x, y)$  является непрерывной функцией. Более того, рекурсия (9) сходится к некоторой предельной непрерывной функции  $B(x, y)$  (обоснование см. в Приложении, п. 2).

Отметим, что при бесконечном горизонте планирования промысла оптимальный вылов  $u(x, y)$  зависит только от значений фазовых переменных. Напротив, при конечном горизонте планирования оптимальный вылов  $u_t(x, y)$  существенно определяется моментом времени  $t$ . Поэтому исследование бесконечномерной версии данной задачи удобнее и проще.

Далее,  $B(x, y)$  наследует хорошие свойства функции  $p(u)$ , поэтому функция Беллмана строго возрастает и вогнута по обеим переменным. Согласно известной теореме Лебега (Колмогоров, Фомин, 1972) всякая монотонная функция почти всюду дифференцируема. Известно, что возможные точки недифференцируемости вогнутой функции устроены просто. Так, всегда существуют веские основания полагать, что здесь добавка почти является лишней (Рохлин, 2000). Ниже для краткости также будем опускать эту добавку. Будем говорить: из вогнутости  $B(x, y)$  по переменной  $x$  следует, что  $B'_x(x, y)$  убывает по  $x$ . Отметим, что из строгой вогнутости и непрерывности функции Беллмана вытекает непрерывность управления (Ланкастер, 1972).

Математическую функцию  $B(x, y)$  можно трактовать как большую экономическую функцию полезности, когда начальные запасы рыбной популяции по районам равны  $x$  и  $y$ . Поэтому частные производные  $B'_x(x, y)$  и  $B'_y(x, y)$  можно трактовать как (внутренние) цены рыбы в первом и во втором районах соответственно. Любопытно было бы строго выяснить, какая из этих цен выше. Расчеты показали: промысловая рыба существенно дороже заповедной.

Важное значение имеет следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Пусть в точке  $(x, y)$  оптимальный вылов  $u = u(x, y)$ , положителен, тогда существует  $B'_x(x, y)$  и реализуется соотношение

$$B'_x(x, y) = p'(u). \quad (10)$$

Обоснование данного утверждения о связи большой и малой функций полезности приведено в Приложении, п. 3.

В частности, при оптимальном вылове  $u(x, y) > 0$  имеет место  $B'_x(x, y) < p'(0) = 10$ . Разумеется, верно и обратное: если в точке  $(x, y)$  выполняется неравенство  $B'_x(x, y) < 10$ , то в ней оптимальный вылов положителен. Значит, при  $B'_x(x, y) > 10$  оптимальный вылов равен нулю.

Величину  $A = B'_x(x, y)$  можно использовать в качестве единицы налога на выловленную рыбу. Так, рассмотрим решение простой задачи оптимизации

$$[p(u) - cu] \rightarrow \max \text{ по всем } u \in [0, x] \quad (11)$$

и попутно выясним, насколько сильно отличаются управления в (11) и (6). Для задачи (11) существует два случая.

1. Для  $c \geq 10$  целевая гладкая функция  $H$ :

$$H(u) = p(u) - cu \quad (12)$$

является строго убывающей, поскольку ее производная отрицательна  $H'(u) = p'(u) - c < 0$ . Поэтому здесь решение  $u^* = 0$  оказывается оптимальным.

2. Для  $c < 10$  в силу строгой вогнутости  $H$  и  $H'(x) \leq 0$  искомое управление должно удовлетворять уравнению  $H'(u^*) = 0$ , т.е.  $c = p'(u^*)$ . Очевидно, что данное соотношение совпадает с выражением (10). Таким образом, решение проблемы многошаговой оптимизации (6) свелось к решению задачи одношаговой оптимизации (11).

Приведем ряд численных расчетов оптимального вылова, представляющих определенный теоретический интерес. Так, при одновременно малых  $x, y$  вылов будет равен нулю. А если значение переменной  $y$  фиксировано, то функция  $u(x, y)$  возрастает по  $x$ .

Пусть ежегодный вылов выбран оптимальным в соответствии с решением задачи (9). Оказывается, что и в этом случае асимптотические значения фазовых переменных не зависят от задания начального условия  $(x_0, y_0)$  и совпадают с равновесием  $(\bar{x}, \bar{y})$  модели (7).

Любопытно было бы определить в модель некоторые глобальные экономические характеристики водоема с заповедником. Например, вычислить средние значения внутренних цен  $B'_x(x, y)$  или  $B'_y(x, y)$  по всем  $(x, y)$ . Однако оказалось, что такие значения не очень чувствительны к изменению параметров водоема. Более эффективными показали себя характеристики  $\bar{c}_1 = B'_x(\bar{x}, \bar{y})$  и  $\bar{c}_2 = B'_y(\bar{x}, \bar{y})$ .

#### 4. КОАДАПТАЦИЯ ПРОМЫСЛА И МИГРАЦИИ

Поиск стратегии оптимального вылова и построение ЭУ-матриц миграции включает два последовательных этапа (блока).

1. **Блок “Оптимизация”**. При заданной матрице миграции  $M$  на основе метода динамического программирования производится поиск оптимального вылова  $u$ . Пусть  $x$  и  $y$  — соответствующие численности популяции в двух районах. Тогда можно построить отображение

$$M \rightarrow u(x, y). \quad (13)$$

2. **Блок “Эволюция”**. При фиксированной функции вылова  $u(x, y)$  реализуется конкурентное взаимодействие исходной популяции (с матрицей миграции  $M$ ) с несколькими мутантами (с матрицами, близкими к  $M$ ). Когда в результате отбора выявляется сильный мутант, тогда согласно (5) производим некоторую деформацию  $M$  до некоторой матрицы  $M_1$ . Поэтому реализуется отображение

$$u(x, y) \rightarrow M_1. \quad (14)$$

Если в результате многократного повторения этапов 1 и 2 этот процесс сходится, то определяется эволюционно-устойчивая матрица  $M^*$  и вылов  $u^*$  при заданном значении корма в районах  $U$  и  $Z$ .



**Методология расчетов.** Рассматривалось несколько типов заповедника  $Z$ : от самого малого (10% водоема) до большого (90%). В каждом случае произведены соответствующие расчеты при вариации начальных значений  $(x, y)$  на некоторой сетке. В качестве итоговых значений определялись средние значения  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  и  $\bar{u} = u(x, y)$ .

Вычисления показали, что финальные значения матрицы миграции могут зависеть от выбора начального маршрута рыбной популяции. Это явление множественности ЭУ-состояний характерно для многих проблем эволюционной экологии (Ильичев, Ильичева, 2018).

Установление эволюционной устойчивости иногда противоречит наивным представлениям об адаптации маршрутов популяции. Так, например, рассмотрим ситуацию, когда  $M_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$  и  $\lambda = 0,5$ , а в качестве промысла используется хищная функция  $u(x, y) = x$ . Казалось бы, полный вылов в зоне  $U$  должен заставить популяцию полностью покинуть этот район. Однако расчеты показали, что  $M^* = \begin{pmatrix} 0,53 & 0,26 \\ 0,47 & 0,74 \end{pmatrix}$  — финальная матрица,  $\bar{x} = 1,8$  и  $\bar{y} = 4,6$ .

Напомним, что  $m_{ij}$  — это вероятность перехода рыбных особей из района  $j$  в  $i$ . В данной матрице имеет место неравенство  $0,26 < 0,47$ . Значит, район  $U$  менее предпочтителен, чем  $Z$ , но все же не настолько, чтобы его окончательно оставить.

В целом, ЭУ-матрицы имеют скорее оборонное значение и обеспечивают исходной популяции устойчивое сосуществование со своими мутантами. Здесь во многих случаях достигается и максимум численности популяции.

## 5. ВОДОЕМ С ЗАПОВЕДНИКОМ. ЭВОЛЮЦИЯ И ЭКОНОМИКА ПРОМЫСЛА

Пусть кормовой ресурс промысловой зоны характеризуется параметром  $\lambda$ , который принимает дискретные значения от 0,1 до 0,9. Этот коэффициент является долей промысловой зоны в общей акватории водоема. Представляет интерес анализ поведения экономических и экологических элементов при вариации  $\lambda$ . Основные результаты компьютерных расчетов представлены в таблице.

**Таблица.** Динамика эколого-экономической системы с заповедником

| $\lambda$   | 0,1                                          | 0,2                                          | 0,3                                          | 0,4                                          | 0,5                                        | 0,6                                        | 0,7                                        | 0,8                                        | 0,9                                          |
|-------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Параметры   |                                              |                                              |                                              |                                              |                                            |                                            |                                            |                                            |                                              |
| $\bar{x}$   | 0,6                                          | 0,6                                          | 0,6                                          | 0,6                                          | 0,6                                        | 1,9                                        | 3,0                                        | 4,8                                        | 5,2                                          |
| $\bar{y}$   | 10,1                                         | 8,9                                          | 7,8                                          | 6,8                                          | 5,4                                        | 4,6                                        | 3,0                                        | 2,1                                        | 0,9                                          |
| $\bar{u}$   | 0,5                                          | 0,5                                          | 0,5                                          | 0,5                                          | 0,5                                        | 1,2                                        | 1,9                                        | 2,5                                        | 2,7                                          |
| $\bar{c}_1$ | 5                                            | 5                                            | 5                                            | 5                                            | 5                                          | 2,1                                        | 1,3                                        | 0,9                                        | 0,7                                          |
| $\bar{c}_2$ | 0,7                                          | 0,7                                          | 0,7                                          | 0                                            | 0,2                                        | 0,9                                        | 0,4                                        | 0,4                                        | 0,3                                          |
| $\pi$       | $\begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,94 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,94 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,93 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,08 \\ 0,92 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,85 \\ 0,15 \end{pmatrix}$ |

**Примечание.** В таблице выделено критическое значение  $\lambda$ , для которого слева стоят низкопродуктивные зоны вылова, а справа — высокопродуктивные.

Обсудим поведение данных в табл. 1 в свете роста параметра  $\lambda$ . Для него имеют место следующие ясные закономерности.

1. Численность рыбной популяции  $x$  в промысловой зоне мала и слабо изменяется при  $\lambda < 0,6$ . Поэтому величина вылова почти совпадает с численностью рыбы в данном районе. Здесь промысловая зона существует только за счет дотаций заповедника. Однако при  $\lambda \geq 0,6$  численность рыбы и ее вылов в промысловой зоне значительно возрастают, и этот район становится самодостаточным.

2. В заповеднике численность рыбной популяции  $x$  равномерно уменьшается без особых скачков.

3. Напомним,  $\pi$ -перроновский вектор финальной матрицы миграции. С ростом  $\lambda$  увеличивается кормовой ресурс промысловой зоны, и, несмотря на вылов, растет и время пребывания рыбной популяции в ней.

4. При  $\lambda < 0,6$  запасы рыбы в промысловой зоне незначительны, поэтому цена на дефицитную рыбу  $\bar{c}_1$  будет довольно высока. Но после критического значения  $\lambda$  численность рыбы здесь возрастает, и происходит снижение цены  $c_1$ .

Для цены рыбы  $\bar{c}_2$  в заповеднике не обнаружено явных закономерностей. Вероятно, здесь требуются расчеты на более мелкой сетке. Однако можно утверждать: в рамках данной модели рыбной популяции цена  $\bar{c}_2$  существенно меньше  $\bar{c}_1$ . Представляет интерес построение аналога формулы (10), связывающего оптимальный вылов с внутренней ценой заповедной рыбы. Интуитивно ясно, что заповедник — это резерв будущей промысловой рыбы.

Приведем один из таких вариантов. При условии, что  $u_t > 0$  и  $u_{t+1} > 0$ , цена  $B'_y(x, y)$  является линейной комбинацией величин  $p'(u_t)$  и  $p'(u_{t+1})$  с коэффициентами, зависящими от фазовых переменных. Это выражение весьма сложно, но при  $\alpha + \beta = 1$  один из коэффициентов обращается в нуль и данная формула приобретает простой вид:

$$B'_y(x_t, y_t) = \frac{p'(u_t)f'_2(y_t)}{f'_1(x_t - u_t)}.$$

Обоснование этой формулы громоздко и опускается.

## 6. ВОДОЕМ БЕЗ ЗАПОВЕДНИКА. ЭКОНОМИКА ПРОМЫСЛОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Рассмотрим задачу, когда акватория поделена на две зоны и в каждой из них ведет промысел свой собственник. Такими участниками конкурентного промыслового процесса могут являться, в частности, два соседних государства.

Перейдем к формализации данной задачи. Пусть  $x, y$  — численности рыбной популяции в первой и второй зонах водоемов в момент времени  $t$ ;  $u$  и  $v$  — соответствующие этому состоянию выловы:

$$0 \leq u \leq x, \quad 0 \leq v \leq y; \quad (15)$$

$p$  и  $q$  — функции полезности для первой и второй зон соответственно. Будем считать, что конкуренция не злонамерена, поэтому возможна общая целевая функция, например максимизация суммарной полезности. Тогда рекурсия Беллмана приобретает вид

$$B_{T+1}(x, y) = \max[p(u) + q(v) + \gamma B_T(\tilde{x}, \tilde{y})] \quad \forall (u, v) \quad (16)$$

с условием (15). Разумеется,  $B_0(x, y) = p(x) + q(y)$  (обычно полагают  $q = p$ ); с учетом вылова реализуются соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (1 - \alpha)f_1(x - u) + \beta f_2(y - v), \\ \tilde{y} &= \alpha f_1(x - u) + (1 - \beta)f_2(y - v). \end{aligned} \quad (17)$$

Итерационный процесс (16) сходится к некоторой непрерывной функции  $B(x, y)$ , которая, по сути, является большой функцией полезности для всей популяции. Она наследует основные свойства малых функций полезности  $p$  и  $q$ : монотонность, вогнутость и др.

Пусть, например, значение переменной  $\hat{y}$  фиксировано, тогда функция  $B(x, \hat{y})$  является монотонно возрастающей и, следовательно, по теореме Лебега оказывается дифференцируемой почти для всех  $x$ . Здесь имеются веские основания полагать, что  $B(x, y)$  является дифференцируемой всюду (Ильичев и др., 2000). Поэтому, как и ранее, в дальнейшем слово *почти* будем опускать. Далее, в силу вогнутости производная одноместной функции  $B(x, \hat{y})$  по  $x$  убывает. Разумеется, аналогичные результаты справедливы и для относительно переменной  $y$ .

Зададим внутренние цены единицы рыбной популяции в районах:

$$c_1 = B'_x(x, y), \quad c_2 = B'_y(x, y). \quad (18)$$

Такие цены зависят от значений фазовых переменных. Здесь имеют место результаты исследования связи оптимальных выловов с функцией Беллмана.

**Утверждение 3.** Пусть  $u = u(x, y) > 0$ , тогда выполняется равенство

$$B'_x(x, y) = p'(u), \quad (19)$$

поэтому имеет место  $B'_x(x, y) < p'(0) = 10$ .

И обратно, пусть выполняется неравенство  $B'_x(x, y) \geq 10$ , тогда обязательно должно быть  $u(x, y) = 0$ . Иначе, согласно (19), получаем  $B'_x(x, y) < 10$ .

**Утверждение 4.** Пусть  $v = v(x, y) > 0$ , тогда выполняется равенство

$$B'_y(x, y) = q'(v). \quad (20)$$

И неравенство  $B'_y(x, y) < 10$  является критерием условия  $v(x, y) > 0$ .

На данных соотношениях основаны простые экономические механизмы построения оптимальных выловов. Так, пусть в состоянии  $(x, y)$  задана цена рыбы  $c_1 = B'_x(x, y)$ , которую будем использовать в качестве налога на единицу выловленной рыбы в первом районе. В этом случае максимизация ежегодной прибыли для собственника данного района сводится к решению задачи

$$[p(u) - uc_1] \rightarrow \max \text{ по всем } u \in [0, x]. \quad (21)$$

Обсудим решение (21). Для этого рассмотрим вспомогательную (целевую) функцию  $H(u) = p(u) - uc_1$ . Она является строго вогнутой, и  $H(0) = 0$ .

При  $c_1 \geq 10$  имеет место  $H'(u) < 0$  для всех  $u > 0$ . Значит, аргумент  $u = 0$  доставляет максимум убывающей функции  $H$ . При  $c_1 < 10$  имеем  $H'(0) = p'(0) - c_1 > 0$ . Несколько сложнее оценить знак  $H'(x)$ . Здесь согласно формуле (19) существует  $\bar{u}$  из промежутка  $J = (0, x]$ , при котором  $c_1 = p'(\bar{u})$ , поэтому, в силу убывания  $p'$ , получаем  $H'(x) = p'(x) - p'(\bar{u}) \leq 0$ . Значит, в точке максимума функции  $H$  на  $J$  выполняется условие  $H'(u) = 0$ , т.е.  $p(u) = c_1$ . Следовательно, решение одношаговой задачи (21) совпадает с решением многошаговой задачи оптимизации (16) при  $T = \infty$ .

Аналогичная конструкция налогообложения применима и к поиску оптимального вылова во втором районе. Здесь при  $c_2 = B'_y(x, y)$  следует рассмотреть одношаговую задачу  $[q(v) - vc_2] \rightarrow \max$  по всем  $v \in [0, y]$ .

Разумеется,  $c_1$  и  $c_2$  — локальные цены, зависящие от конкретного состояния  $(x, y)$ . Представляет интерес построение глобальных экономических показателей. Так, обозначим через  $T$  достаточно большой период оптимального промысла (16). Зададим некоторое множество возможных начальных значений  $(x_0, y_0)$ . Например, такой естественной областью является дискретная решетка в достаточно большом прямоугольнике вида  $[0, M] \times [0, M]$ . Под действием динамической системы (17) образуется соответствующее множество конечных значений  $(x_T, y_T)$ . Пусть  $(\bar{x}, \bar{y})$  — осреднение семейства финальных векторов. Отметим, что переменные  $x, y$  в системе (17) при оптимальных выловах стремятся к некоторому равновесию, которое не зависит от выбора начальных условий. Поэтому точка  $(\bar{x}, \bar{y})$  является таким равновесным состоянием.

Теперь положим  $\bar{c}_1 = B'_x(\bar{x}, \bar{y})$  и  $\bar{c}_2 = B'_y(\bar{x}, \bar{y})$ . Это глобальные ценовые характеристики отдельных районов водоема в зависимости, например, от величины кормовых ресурсов (рис. 1). Графики локальных цен представляются вполне естественными. В частности, при  $\lambda = 0,1$  первый район располагает малым кормом, поэтому здесь численность рыбы мала. И значит, ее цена будет велика. Отметим, что, например, при  $\bar{c}_1 > \bar{c}_2$  возможна выгодная продажа дешевой рыбы (собственника второго района) собственнику первого района.



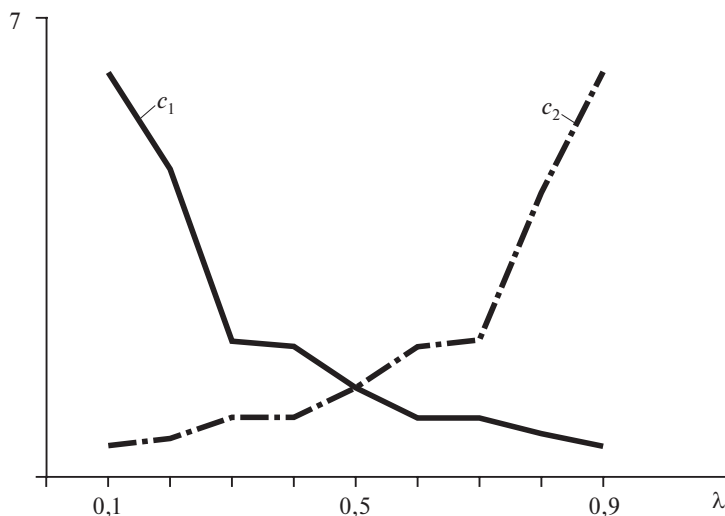


Рис. 1. Динамика средних внутренних цен  $c_1$  и  $c_2$  в зависимости от параметра  $\lambda$

## 7. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОМЫСЕЛ КАК ИГРА В ПОДДАВКИ

В рамках предыдущей задачи о конкурентном промысле двух государств обсудим возможность увеличения дохода, например, страны 1 путем *временного добровольного* уменьшения ее величины вылова. Будем действовать в духе иерархического управления с уточненными прежними соглашениями о стратегиях вылова. Считаем, что центр на основе решения задачи (16) выдает рекомендации этим государствам о квоте вылова, которая не должна превышать величин  $u$  и  $v$ , зависящих от состояния рыбных запасов  $(x, y)$ . Разумеется, можно в какие-то годы вылавливать и меньше (т.е. держать свою акваторию “под паром”).

Рассмотрим следующую симметричную ситуацию. Пусть в начальный момент времени матрица миграции имеет вид  $M_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ , и кормовые ресурсы акваторий данных стран одинаковы, т.е.  $\lambda = 0,5$ .

Если страны действуют согласно рекомендациям центра (с учетом вида  $M_0$  и решения задачи (16)), матрица миграции сохраняется и устанавливаются значения:

$$\bar{u} = \bar{v} = 1,85; \quad \bar{x} = \bar{y} = 4,66; \quad \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 1,4. \quad (22)$$

Пусть теперь страна 1 не вылавливает рыбу ( $u = 0$ ), а страна 2 ведет промысел в прежнем объеме  $v = 1,85$ . Таким образом, происходит своеобразное заманивание рыбной популяции в акваторию 1. В итоге матрица миграции преобразуется к виду  $M_1 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$ . Иными словами, акватория 1 стала более предпочтительной, чем акватория 2 (в соотношении 3: 2). С учетом вида матрицы  $M_1$  центр согласно решению задачи (16) выдает новые рекомендации оптимального вылова:

$$\bar{u} = 1,94; \quad \bar{v} = 1,61; \quad \bar{x} = 5,31; \quad \bar{y} = 3,6; \quad \bar{c}_1 = 1,2; \quad \bar{c}_2 = 1,5. \quad (23)$$

Теперь ситуация в акватории 1 улучшилась. Более того, если страны станут придерживаться вылова (23), то матрица  $M_1$  не портится. Следовательно,  $M_1$  является эволюционно-устойчивой при управлениях (23).

После процедуры заманивания вылов в стране 1 всегда будет больше, чем в стране 2. Эффективность этой процедуры обнаружена для других начальных матриц миграции:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

А поскольку  $\bar{c}_1 < \bar{c}_2$ , у коммерческих структур страны 1 возникает возможность дополнительной торговой выгоды: продать стране 2 свою дешевую рыбу (в смысле, что ее цена стала ниже, чем в другой стране). Вероятно, чтобы восстановить прежний статус-кво, страна 2 должна, в свою очередь, применить процедуру заманивания.

Отметим, что процедура заманивания является эффективной и при незначительном уменьшении вылова (75% от рекомендуемого).

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты, полученные в данной статье.

1. Сравнительные расчеты показали, что с учетом поведенческой адаптации рыб их вылов снижается. По сути, данный процесс адаптации — это поиск компромисса между наличием корма и интенсивностью вылова.

2. В случае когда водоем разделен на две зоны (промысловую и заповедник) и промысловая зона невелика, она становится дотационной от рыбных запасов заповедника, и тогда оптимальный вылов заключается в практически полном изъятии рыбы. А если данная зона велика, она становится самодостаточной, и здесь вылов не превышает половины рыбных запасов.

3. В случае двух промысловых зон, каждая из которых облавливается своим собственником, возможна парадоксальная стратегия долгосрочного вылова. А именно первый собственник может на некоторое время сильно сократить свой вылов, что приведет к эволюционной деформации маршрута миграции рыб с предпочтением первой зоны. После этого он может перейти к стратегии оптимального вылова, который будет превышать оптимальный вылов второго собственника.

4. В статье введено естественное понятие внутренних цен для рыбных запасов в том или ином районе. Внутренние цены могут быть использованы в качестве налога на единицу выловленной рыбы. В этом случае проблема многолетней оптимизации сводится к решению задачи максимизации одногодичного вылова. Пространственная неоднородность внутренних цен позволяет конструировать разнообразные торговые механизмы обмена выловленной рыбой.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### 1. Доказательство утверждения 1.

На точках фазового пространства (7) определим отношение частичного порядка. А именно для точек  $W_1 = (x_1, y_1)$  и  $W_2 = (x_2, y_2)$  положим  $W_1 \prec W_2$ , если одновременно выполняются неравенства  $x_1 < x_2$  и  $y_1 < y_2$ .

В функциональном анализе принято считать (Опойцев, 1986), что данное отношение порождено конусом  $E_+^2$  (положительный квадрант).

Обозначим через  $r = (\bar{x}, \bar{y})$  — равновесие (7). Пусть выбран некоторый параметр  $\lambda \in (0, 1]$ . Зададим точки  $A_\lambda = r\lambda$  (слабая точка) и  $B_\lambda = r/\lambda$  (сильная точка). Очевидно, что  $A_\lambda \prec B_\lambda$ . Теперь построим  $\lambda$ -параметрическое семейство вложенных прямоугольников  $\{R_\lambda\}$ , окружающих равновесие  $r$ :  $R_\lambda = \{W : A_\lambda \prec W \prec B_\lambda\}$ . Внутренность  $R_\lambda$  можно трактовать как промежуточное множество (конусный отрезок) между слабой точкой  $A_\lambda$  и сильной точкой  $B_\lambda$ .

Разумеется,  $R_1$  совпадает с равновесием  $r$ , а при допустимой вариации  $\lambda$  эти прямоугольники полностью заполняют положительный ортант.

Обозначим через  $\pi$  отображение (за единицу времени), задаваемое моделью (7). В силу строгого роста правых частей (7) выполняется свойство  $\pi(A_\lambda) \prec \pi(B_\lambda)$ . И более того, из  $A_\lambda \prec W \prec B_\lambda$  вытекает  $\pi(A_\lambda) \prec \pi(W) \prec \pi(B_\lambda)$ .

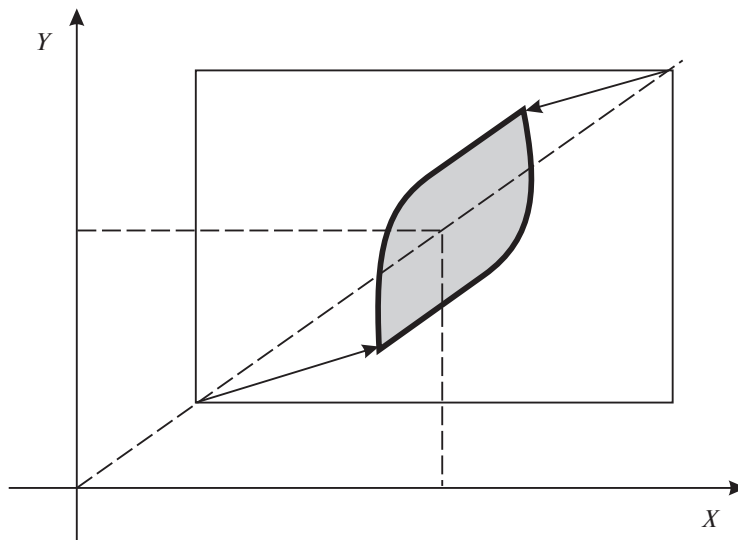


Рис. 2. Образ (выделен фоном) куба  $R_\lambda$  под действием отображения  $\pi$

Покажем, что образ  $\pi(R_\lambda)$  строго вложен в  $R_\lambda$  (рис. 2). Здесь достаточно установить два строгих предпочтения:

$A_\lambda \prec \pi(A_\lambda)$  — слабая точка идет вперед;

$\pi(B_\lambda) \prec B_\lambda$  — сильная точка идет назад.

Ниже при всех  $i$  решающее значение имеет следующая лемма.

**Лемма 1.** Для всех  $x > 0$ ,  $y > 0$  и  $0 < \lambda < 1$  справедливы неравенства:

$$\lambda f_i(x) < f_i(\lambda x), \quad (\text{П1})$$

$$f_i(y/\lambda) < f_i(y)/\lambda. \quad (\text{П2})$$

**Доказательство.** Исходя из строгой вогнутости  $f_i$ , при  $0 < \lambda < 1$  получаем  $(1-\lambda)f_i(0) + \lambda f_i(x) < f_i(0 \times (1-\lambda) + x\lambda)$ . Поскольку  $f_i(0) = 0$ , то последнее соотношение равносильно (П1). Положим  $y = \lambda x$ , тогда из неравенства (П1) вытекает (П2). ■

Теперь подставим слабую точку  $A_\lambda$  в уравнения расширенной модели. С учетом леммы 1 получаем оценки для новой точки  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ :

$$\tilde{x} = (1-\alpha)f_1(\lambda\bar{x}) + \beta f_2(\lambda\bar{y}) > \lambda[(1-\alpha)f_1(\bar{x}) + \beta f_2(\bar{y})] = \lambda\bar{x}.$$

Аналогично устанавливается соотношение  $\tilde{y} = \alpha f_1(\lambda\bar{y}) + (1-\beta)f_2(\lambda\bar{x}) > \lambda\bar{y}$ . Следовательно, слабая точка идет вперед. Также показываем, что сильная точка  $B_\lambda$  идет назад. Отсюда сразу вытекает глобальная в  $E_+^2$  устойчивость и единственность равновесия  $r$ .

## 2. Доказательство сходимости рекурсии (9) к непрерывной функции

**Лемма 2.** При достаточно большом  $S$  на границе прямоугольника  $\Pi = \{(x, y): 0 \leq x \leq \beta S, 0 \leq y \leq \alpha S\}$  векторное поле (7) не направлено наружу.

**Доказательство.** Обозначим через  $A = (0, 0)$  и  $B = (\beta S, \alpha S)$  две точки из  $\Pi$ . Разумеется,  $\Pi$  можно трактовать как промежуточное семейство точек для этих вершин. Поэтому достаточно установить, что точки  $\pi(A)$  и  $\pi(B)$  не покидают  $\Pi$ . Действительно, сначала имеем  $\pi(A) = A$ .

Далее, для  $x$ -компоненты точки  $\pi(B)$  с учетом допущения о медленном росте получаем оценку  $\pi_x(B) = (1-\alpha)f_1(\beta S) + \beta f_2(\alpha S) \leq \omega S[(1-\alpha)\beta + \beta\alpha] < \beta S$ . Теперь для  $y$ -компоненты точки  $\pi(B)$  аналогично получаем  $\pi_y(B) = \alpha f_1(\beta S) + (1-\beta)f_2(\alpha S) \leq \omega S[\alpha\beta + (1-\beta)\alpha] < \alpha S$ . ■

Обозначим через  $C(\Pi)$  семейство всех непрерывных функций от двух переменных с чебышовой метрикой  $\|w - v\| = \max |w(x, y) - v(x, y)|$  по всем  $(x, y)$  из  $\Pi$ . Известно, что это пространство является полным (Колмогоров, Фомин, 1972).

С учетом обозначений (8) на  $C(\Pi)$  определим оператор  $\Omega$ :  $\hat{H}(x, y) = \Omega[H] = \max[p(u) + \gamma H(\tilde{x}, \tilde{y})]$  по всем  $0 \leq u \leq x$ . Согласно (Ланкастер, 1972) и лемме 2 функция  $\hat{H}(x, y)$  непрерывна, и поэтому  $\Omega$  отображает  $C(\Pi)$  в себя. Более того, покажем, что  $\Omega$  — сжатие.

Так, пусть  $H_1$  и  $H_2$  — две функции из данного пространства. Формально имеем  $\hat{H}_1(x, y) = p(u_1) + \gamma H_1(\tilde{x}, \tilde{y})$  при своем оптимальном  $u_1 = u_1(x, y)$ .

В рамках предыдущих обозначений справедлива оценка  $\hat{H}_2(x, y) \geq p(u_1) + \gamma H_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ . После вычитания последних соотношений находим  $\hat{H}_1(x, y) - \hat{H}_2(x, y) \leq \gamma[H_1(\tilde{x}, \tilde{y}) - H_2(\tilde{x}, \tilde{y})] \leq \gamma\|H_1 - H_2\|$ . Подобным образом, используя управление  $u_2$ , устанавливаем  $\hat{H}_2(x, y) - \hat{H}_1(x, y) \leq \gamma\|H_2 - H_1\|$ . Окончательно находим  $\|\hat{H}_1 - \hat{H}_2\| \leq \gamma\|H_2 - H_1\|$ .

Поскольку  $0 < \gamma < 1$ , оператор  $\Omega$  является сжатием. И следовательно, для него существует единственная неподвижная точка (непрерывная функция двух переменных). Она является решением уравнения Беллмана с бесконечным горизонтом управления.

### 3. Доказательство утверждения 2

В данной точке  $(x, y)$  согласно обозначениям (8) и (9) имеет место соотношение

$$B(x, y) = p(u) + \gamma B(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (\text{П3})$$

Пусть  $\varepsilon$  достаточно малое число, тогда в точке  $(x + \varepsilon, y)$  вылов  $u + \varepsilon$  является допустимым независимо от знака  $\varepsilon$ . Поскольку он не может быть лучше оптимального, то справедливо неравенство

$$B(x + \varepsilon, y) \geq p(u + \varepsilon) + \gamma B(\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (\text{П4})$$

Вычитая из (П4) равенство (П3), находим  $B(x + \varepsilon, y) - B(x, y) \geq p(u + \varepsilon) - p(u)$ . Отсюда при  $\varepsilon > 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место

$$B'_x(x + 0, y) \geq p'(u), \quad (\text{П5})$$

а при  $\varepsilon < 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  —

$$B'_x(x - 0, y) \leq p'(u). \quad (\text{П6})$$

Поскольку для вогнутой по переменной  $x$  функции  $B(x, y)$  всегда имеет место неравенство  $B'_x(x - 0, y) \geq B'_x(x + 0, y)$ , существует  $B'_x(x, y)$ , а с учетом (П5) и (П6) выполняется требуемое равенство  $B'_x(x, y) = p'(u)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Абакумов А.И., Израильский Ю.Г. (2017). Стабилизирующая роль структуры рыбной популяции в условиях промысла при случайных воздействиях среды обитания // *Компьютерные исследования и моделирование*. Т. 9. № 4. С. 609—620.
- Беллман Р. (1960). Динамическое программирование. М.: Издательство иностранной литературы [Пер. Bellman R. (1957). *Dynamic Programming*. New Jersey: Princeton University Press.]
- Ильичев В.Г., Рохлин Д.Б., Угольников Г.А. (2000). Об экономических механизмах управления биоресурсами // *Известия РАН. Теория и системы управления*. № 4. С. 104—110.
- Ильичев В.Г., Ильичева В.В. (2014). Пространственная адаптация и оптимальный промысел рыбных популяций // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 3. С. 119—129.
- Ильичев В.Г., Ильичева О.А. (2018). Пространственная адаптация популяций в моделях экологии // *Биофизика*. Т. 63. Вып. 2. С. 373—381.
- Колмогоров А.Н., Фомин С.В. (1972). Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука.
- Ланкастер К. (1972). Математическая экономика. М.: Советское радио.

- Опойцев В.И.** (1986). Нелинейная системостатика. М.: Наука.
- Робертс Ф.С.** (1986). Дискретные математические модели с приложением к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука.
- Рохлин Д.Б.** (2000). Производная решения функционального уравнения Беллмана и цена биоресурсов // *Сибирский журнал индустриальной математики*. Т. 3. № 1. С. 169—181.
- Свирижев Ю.М., Пасеков В.П.** (1982). Основы математической генетики. М.: Наука.
- Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П.** (1979). Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. М.: Наука.
- Экономическая трансформация и эволюционная теория Й. Шумперта (2004). В сб. статей V международного симпозиума по эволюционной экономике. Россия, г. Пушкино, 25—27 сентября 2003 г. М.: Институт экономики РАН.
- Якобсон М.В.** (1976). О свойствах однопараметрического семейства динамических систем  $x \mapsto A \cdot x \cdot e^{-x}$  // *Успехи математических наук*. Т. 31. № 2 (188). С. 239—240.
- Clark C.W.** (2010). *Mathematical Bioeconomics. The Mathematics of Conservation*. New Jersey: J. Wiley and Sons Publ.
- Contois D.E.** (1959). Kinetics of Bacterial Growth Relationship between Population Density and Specific Growth Rate of Continuous Culture // *Journal of General Microbiology*. No. 1—2. P. 40—50.
- Mazalov V.V., Rettieva A.N.** (2004). A Fishery Game Model with Migration Reserved Territory Approach // *Game Theory and Applications*. Vol. 10. P. 97—108.
- Ricker W.E.** (1954). Stock and Recruitment // *Journal Fisheries Research Board of Canada*. Vol. 11. No. 5. P. 569—623.

#### REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Abakumov A.I., Israeli Yu.G.** (2017). The Stabilizing Role of Structure of Fish Population in the Conditions of Trade at Accidental Influences of the Habitat. *Computer Researches and Modeling*, 9, 4, 609—620 (in Russian).
- Bellman R.** (1960). *Dynamic Programming*. Moscow: Izdatel'stvo Inostrannoi Literatury (in Russian) [Transl. from Bellman R. (1957). *Dynamic Programming*. New Jersey: Princeton University Press.].
- Clark C.W.** (2010). *Mathematical Bioeconomics. The Mathematics of Conservation*. New Jersey: J. Wiley and Sons Publ.
- Contois D.E.** (1959). Kinetics of Bacterial Growth Relationship between Population Density and Specific Growth Rate of Continuous Culture. *Journal of General Microbiology*, 1—2, 40—50.
- Economic Transformation and Evolutionary Theory of Y. Shumpert (2004). In the Collection of Articles of the V International Symposium on Evolutionary Economy. Russia. Pushchino, on September 25—27, 2003. Moscow: Institute of Economics of RAS (in Russian)
- Il'ichev V.G., Il'icheva O.A.** (2018). Spatial Adaptation of Populations in Ecology Models. *Biophysics*, 63, 2, 373—381 (in Russian).
- Il'ichev V.G., Il'icheva V.V.** (2014). Spatial Adaptation and Optimum Trade of Fish Populations. *Economics and Mathematical Methods*, 50, 3, 119—129 (in Russian).
- Il'ichev V.G., Rokhlin D.B., Ugolnitsky G.A.** (2000). About Economic Mechanisms of Management of Bioresources. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 4, 104—110 (in Russian).
- Jacobson M.V.** (1976). The Properties of One-Parametrical Family of Dynamical Systems  $x \mapsto A \cdot x \cdot e^{-x}$ . *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 31, 2 (188), 239—240 (in Russian).
- Kolmogorov A.N., Fomin S.V.** (1972). *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Moscow: Nauka (in Russian).
- Lancaster K.** (1972). *Mathematical Economics*. Moscow: Sovetskoe radio (in Russian) [Trans. from Lancaster K. (1968). *The Mathematical Economics*. New York: The Macmilan Company.].
- Mazalov V.V., Rettieva A.N.** (2004). A Fishery Game Model with Migration Reserved Territory Approach. *Game Theory and Applications*, 10, 97—108 (in Russian).
- Opoytsev V.I.** (1986). *Nonlinear Sistemostatika*. Moscow: Nauka (in Russian).
- Ricker W.E.** (1954). Stock and Recruitment. *Journal Fisheries Research Board of Canada*, 11, 5, 569—623.



- Roberts F.S.** (1986). Discrete Mathematical Models with the Annex to Social, Biological and Ecological Tasks. Moscow: Nauka (in Russian). [Trans. from Roberts F.S. (1976). Discrete Mathematical Models with Application to Social, Biological and Environmental Problems. New Jersey: Rutgers University.]
- Rokhlin D.B.** (2000). Derivative of the Solution of the Functional Equation of Bellman and Price of Bioresources. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 3, 1, 169—181 (in Russian).
- Skaletskaya E.I., Frisman E. Ya., Shapiro A.P.** (1979). Discrete Models of Dynamics of Number of Populations and Optimization of Trade. Moscow: Nauka (in Russian).
- Svirezhev Yu.M., Pasekov V.P.** (1982). Fundamentals of Mathematical Genetics. Moscow: Nauka (in Russian).

## Economic and Evolutionary Aspects of Optimum Fishing

© 2019 V.G. Il'ichev

*South Scientific Center (SSC) RAS, Rostov-on-Don, Russia  
E-mail: vitya369@yandex.ru*

Received 25.02.2019

The publication is prepared as realization of GZ SSC RAS (project AAAA-A18-118122790121-5) and also of a grant of the Russian Foundation for Basic Research (project 18-01-00453).

Within discrete ecology-evolutionary models the problem of collecting long-term fish catch in the two-zone reservoir is investigated. It is shown that taking into account behavioral adaptation of fish population its catch decreases. When the reservoir is divided into two zones (market fishing and the reserve), optimal catch significantly depends on a ratio of ecological capacities of these water areas that is of fodder resources. To solve theoretical and practical problems we used methods of non-linear analysis and dynamic programming, where Bellman function determined maximum catch income. The novelty of our work is a disclosure of unexpected economic and biological effects caused by the adaptation of fish population behavior to the catching processes. If both zones are fishing, then the paradox strategy of catch of one of the competing fishermen connected with temporary reduction of the catch is possible. It will lead to deformation of a fish migration routes with the preference of the first, non-fishing, zone. It is strange that after optimal catch in the area, this area becomes still more attractive to the fish population. The concept of interior prices for fish stocks in some or that area is introduced Interior prices can be used as a tax on unit of the caught fish. In this case the problem of long-term optimization comes down to the solution of a problem of maximizing one-year catch. Spatial heterogeneity of interior prices allows designing various speculative mechanisms of exchange of the consumed resources.

**Keywords:** long-term fishing, optimization, spatial adaptation, interior prices.

**JEL Classification:** Q57.

**DOI:** 10.31857/S042473880005778-4