
ПРОБЛЕМЫ ПРЕДПРИЯТИЙ

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ
ПРОИЗВОДСТВА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ЗАКАЗА
К ЗАДАННОМУ СРОКУ**

© 2016 г. Е.Н. Орёл, О.Е. Орёл

(Москва)

Обсуждаются особенности применения моделей оптимального управления в экономических задачах. Акцентируется внимание на необходимости поиска глобального экстремума. Предлагается как в вариационном исчислении строить центральные поля экстремалей и исследовать их на глобальный экстремум. Центральное поле состоит из экстремалей, выходящих из одной точки и однократно покрывающих область достижимости. Поскольку строить такое поле аналитически гораздо труднее, чем находить одну экстремаль, которая может оказаться доставляющей лишь локальный экстремум, предлагается больше внимания уделять численным методам. Указанная программа реализуется на известной модельной задаче управления процессом выполнения заказа на выпуск продукции к заданному сроку с минимальными затратами. Строится центральное поле экстремалей Понтрягина. Экстремаль общего положения состоит из трех последовательно выполняемых режимов. Для этой модели приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: оптимальное управление, заказ, выпуск продукции, глобальный экстремум, центральное поле траекторий.

Классификация JEL: C61.

**1. ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ**

Модели оптимального управления необходимы для экономической практики, поскольку описывают ситуации, когда требуется выбрать управление, обеспечивающее, например, максимальную суммарную прибыль или минимальные суммарные затраты за продолжительный период. При этом экономиста (в отличие, скажем, от специалиста в области классической механики) не может устроить локальный экстремум – обязательно нужен глобальный (абсолютный) или приближение к нему по функционалу, иначе любое решение, выбранное из интуитивных соображений предпринимателя, будет не хуже локального экстремума. Значит, каждая конкретная задача оптимального управления должна решаться в полном объеме, и здесь возможны три подхода.

1. Можно найти одну экстремаль, удовлетворяющую заданным граничным условиям, а затем доказать, что она дает глобальный экстремум. Для линейных задач оптимального быстрого действия, когда требуется попасть в точку равновесия, глобальность экстремума гарантирована (Понтрягин и др., 1969). В остальных задачах чаще всего используют два возможных пути. Можно доказать достаточность экстремума. Но стандартные схемы доказательства ориентированы на локальный экстремум. Переход к глобальному экстремуму требует индивидуального подхода к каждой задаче. Другой путь состоит в доказательстве теоремы существования (Флеминг, Ришел, 1978), и тогда задача сводится к перебору всех экстремалей с заданными концами. Обычно удается доказать существование не в классе кусочно-непрерывных управлений, а в классе управлений, интегрируемых по Лебегу (Флеминг, Ришел, 1978). После этого приходится подправлять оптимальное управление на множестве меры нуль так, чтобы оно стало кусочно-постоянным, если это возможно. В целом этот подход, который Л. Янг называл наивным (в позитивном значении этого слова), не дает общего рецепта (Янг, 1974) решения задачи глобального экстремума.

2. Можно, как в задачах вариационного исчисления, строить центральные поля экстремалей (Янг, 1974; Schattler, Ledzewicz, 2012). В вариационном исчислении доказано (Янг, 1974), что гладкое центральное поле экстремалей оптимально, если выполнено условие Вейерштрасса. Для классических задач вариационного исчисления такие поля хорошо изучены. В задачах оптимального управления условие Вейерштрасса содержится в принципе максимума Понтрягина, поэтому любое гладкое центральное поле экстремалей является оптимальным (Орёл Е., Орёл О., 2013). Однако реальные поля экстремалей не только не гладки, но и разрывны. В работах (Орёл Е., Орёл О., 2013, 2014) получен критерий оптимальности, использующий понятие верхней и нижней производной, для любых центральных полей траекторий. В настоящей статье этот критерий проверяется для модельной задачи оптимального управления с экономическим содержанием. Трудности данного подхода связаны с построением вместо одной траектории целого семейства траекторий, однократно покрывающего множество достижимости, а также с проверкой критерия оптимальности.

3. Можно решить задачу численно. В простых случаях для этого достаточно использовать метод ломаных Эйлера и алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути на графе. В итоге получается дерево траекторий. Выбирая шаг сетки, можно получить сколь угодно точное приближение оптимального управления по функционалу. В работах (Орёл Е., Орёл О., 2013, 2014; Орёл, 1989, 1990) построено численное решение для некоторых задач оптимального управления и классических задач вариационного исчисления (кратчайшие кривые на плоскостях Евклида и Лобачевского; брахистохроны; минимальные поверхности вращения). Как показывают рисунки, приведенные в разд. 3 и в (Орёл Е., Орёл О., 2013, 2014), визуально дерево траекторий мало чем отличается от центрального поля оптимальных траекторий, что подчеркивает тесную связь второго и третьего подходов.

Основная цель настоящей статьи – показать, как работает второй подход для известной модельной задачи с экономическим содержанием. Строится поле экстремалей и доказывается его оптимальность. Попутно для сравнения приводится результат численного расчета на базе ломаных Эйлера.

2. МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Рассматривается экономическая модель, которая к настоящему времени получила широкое распространение (Kamien, Schwartz, 1991; Caputo, 2005; Dowling, 2000).

Предположим, что фирмой получен заказ, который надо выполнить к моменту времени T , на производство Y единиц продукции. Готовая продукция передается на склад и хранится там до тех пор, пока весь заказ не будет выполнен и будет передан заказчику, т.е. до момента T . Пусть $y(t)$ – объем продукции, изготовленной к моменту t .

Изготовление и хранение продукции сопряжены с затратами. Надо выбрать такой режим производства продукции, чтобы суммарные затраты были минимальными. Таким образом, управление процессом выполнения заказа заключается в выборе режимов (скорости) производства продукции $y'(t)$ как функции времени. С одной стороны, желательно изготавливать заранее как можно меньше продукции, чтобы не тратить средств на ее хранение. С другой – ситуация, когда выпуск продукции откладывается на последний момент, крайне нежелательна, так как резкие изменения интенсивности, возникающие на производстве по окончании аврального исполнения заказа, могут привести к большим финансовым потерям.

Если $y'(t)$ задано, то количество продукции $y(t)$, поступившей на склад ко времени $t \in [0, T]$, равно $y(t) = \int_0^t y'(\tau) d\tau$. Произведенную продукцию придется хранить на складе до момента T .

Пусть b – стоимость хранения единицы продукции в единицу времени. Чтобы держать на складе k единиц продукции в течение Δt , нужно затратить $bk\Delta t$ единиц денежных средств. Складывая

эти величины за разные отрезки времени, получаем, что суммарные затраты на хранение произ-

$$\text{веденной продукции равны } C_s = b \int_0^T y(\tau) d\tau.$$

Чем позднее будет произведена продукция, тем меньше потребуется средств на ее хранение. Но всю продукцию невозможно произвести ровно в момент T с бесконечной скоростью. К тому же изменение интенсивности (скорости) производства требует дополнительных затрат (надо арендовать помещения на какое-то время, переналадить оборудование, создать новые рабочие места или переориентировать рабочие места, занятые другим производством, и т.д.).

В данной модели выбрана линейная зависимость затрат на выпуск единицы продукции в единицу времени от скорости производства. Кроме того, дополнительно по сравнению с (Kamien, Schwartz, 1991; Caputo, 2005; Dowling, 2000), в настоящей статье установлен верхний порог скорости производства, что несколько усложняет модель, но, вероятно, лучше отвечает экономическим требованиям. При желании можно отказаться от этого ограничения, сделав верхний порог бесконечным. Разумеется, реальная зависимость затрат редко бывает линейной, но в каждой конкретной экономической задаче она является уникальной и не всегда может быть точно установлена.

Итак, предполагается, что затраты на выпуск единицы продукции пропорциональны интенсивности производства $y'(t)$ с коэффициентом пропорциональности a . Если за период Δt выпущено Δy единиц продукции со средней скоростью $\Delta y/\Delta t$, то затраты на этот выпуск составят $\Delta y \cdot a \Delta y/\Delta t$. Разделив это выражение на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим мгновенные затраты в момент t :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\Delta y \cdot a (\Delta y/\Delta t)/\Delta t] = a^2 y'^2(t).$$

Суммарные затраты на изготовление определяет интеграл от этого выражения, т.е.

$$C_p = a \int_0^T y'^2(\tau) d\tau. \text{ Складывая } C_p \text{ и } C_s, \text{ получаем полные затраты, которые предстоит минимизи-}$$

$$\text{ровать: } C_p + C_s = a \int_0^T y'^2(\tau) d\tau + b \int_0^T y(\tau) d\tau \rightarrow \min.$$

В начальный момент запас отсутствует, поэтому положим $y(0) = 0$. Ограничение на управление состоит в том, что скорость производства неотрицательна и не может превосходить некоторой константы $0 \leq y'(t) \leq W$. Не исключается случай $W = \infty$. При этом равенство $y'(t) = \infty$ на каком-либо промежутке невозможно хотя бы потому, что функционал C_p становится равным бесконечности.

Как обычно при применении принципа максимума Понтрягина, управление $y(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций. Тем не менее в данной задаче оптимальное управление фактически является непрерывной функцией времени.

3. ОБСУЖДЕНИЕ МОДЕЛИ

Данная экономико-математическая модель весьма прозрачна по содержанию и проста по описанию, поэтому она может служить таким же эталоном при анализе экономических задач оптимального управления, как, к примеру, задачи о брахистохроне и минимальной поверхности вращения в вариационном исчислении или механическая задача о попадании в точку равновесия, относящаяся к теории оптимального управления. Не случайно в монографиях (Kamien, Schwartz, 1991; Caputo, 2005) разбор описанной модели проходит красной нитью через весь материал, о чем сказано в (Kamien, Schwartz, 1991, р. 11; Caputo, 2005, р. 21). Поэтому возникает потребность проведения полного исследования и решения задачи.

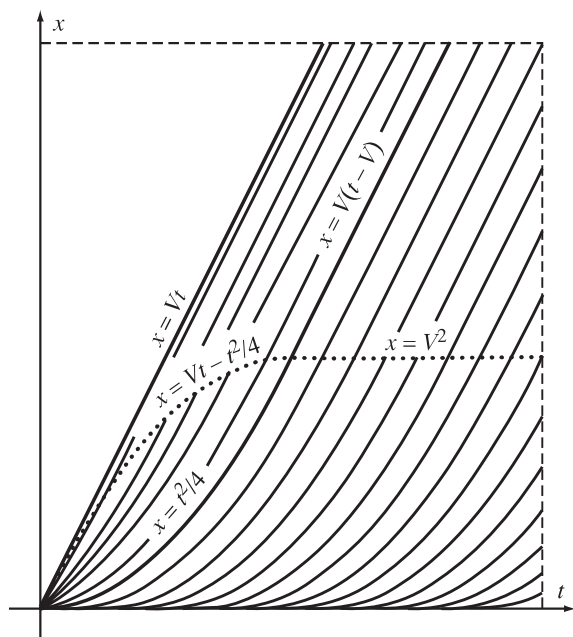


Рис. 1. Оптимальное поле экстремалей, построенное аналитически

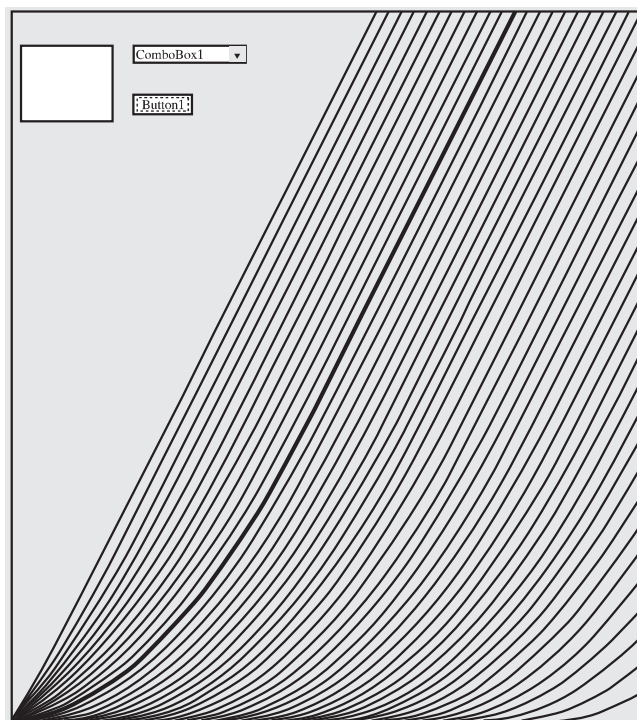


Рис. 2. Оптимальные ломаные Эйлера, построенные алгоритмом Дейкстры

Для этого нам потребуется:

- 1) добавить естественное ограничение на управление сверху $y'(t) \leq W$, которое в (Kamien, Schwartz, 1991; Caputo, 2005; Dowling, 2000) не рассматривалось;
- 2) произвести линейную замену переменных $y(t) = (b/a)x(t)$, позволяющую упростить задачу и игнорировать мешающие константы a и b ;
- 3) построить центральное поле экстремалей Понтрягина, однократно покрывающее область достижимости (рис. 1);
- 4) с помощью критериев оптимальности доказать оптимальность построенного поля (поле оптимально, если каждая его траектория доставляет глобальный экстремум в классе траекторий с теми же концами);
- 5) произвести численный расчет задачи с использованием ломаных Эйлера и алгоритма Дейкстры (рис. 2), показывающий, что задачи могут сравнительно легко решаться численно, если поиск аналитического решения затруднен.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Задачу можно упростить, убрав параметры a и b . Для этого сделаем линейную однородную замену зависимой переменной $y(t) = bx(t)/a$. Ясно, что

$$C_p + C_s = \int_0^T [a(b/a)^2 x'^2(\tau) + b(b/a)x(\tau)] d\tau = (b^2/a) \int_0^T [x'^2(\tau) + x(\tau)] d\tau.$$

Так как b^2/a – положительная константа, мы получили эквивалентную задачу, в которой подынтегральное выражение не зависит от параметров

$$J = \int_0^T [x'^2(\tau) + x(\tau)] d\tau \rightarrow \min.$$

Посмотрим, как связаны ограничения для старой и новой задачи. Имеем $y(T) = Y = (b/a)x(T)$. Поэтому функция $x(t)$ должна удовлетворять граничным условиям $x(0) = 0$, $x(T) = X$, где $X = aY/b$. Обозначим предельную скорость для $x(t)$ через $W = bV/a$, или $V = aW/b$.

Управлением является производительность (скорость), поэтому $u(t) = x'(t)$. Мы получили задачу оптимального управления (см. разд. 5).

5. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Найти абсолютный экстремум

$$J = \int_0^T [u^2(\tau) + x(\tau)] d\tau \rightarrow \min$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} &\text{уравнение движения} - dx(t)/dt = u(t); \\ &\text{ограничение на управление} - 0 \leq u(t) \leq V; \\ &\text{фазовые ограничения} - t \geq 0, x(t) \geq 0; \\ &\text{граничные условия} - x(0) = 0, x(T) = X. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что константы T , X , V неотрицательны.

Управление $u(t)$ ищется в классе кусочно-непрерывных функций. Величина V может быть, как в (Kamien, Schwartz, 1991; Caputo, 2005; Dowling, 2000), равной бесконечности. В этом случае скорость производства не ограничена сверху и задача упрощается. Заметим, что задача нелинейна, так как под интегралом стоит квадрат скорости $u^2(\tau)$.

Любопытно, что с помощью интегрирования по частям можно сделать подынтегральное выражение не зависящим от $x(t)$ и равным $u^2(\tau) - \tau u(\tau)$, но пока неясно, насколько такое преобразование перспективно.

При решении задачи зафиксируем левый конец траекторий $(0,0)$ и освободим правый. Таким образом, мы построим семейство траекторий, оканчивающееся в точках (T, X) множества достижимости. Легко убедиться, что из точки $(0,0)$ можно попасть в точку (t, x) , двигаясь по допустимой траектории тогда и только тогда, когда $x \leq Vt$. Это неравенство и определяет множество достижимости D .

6. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТЯГИНА

Заметим, что функция Лагранжа (подынтегральное выражение) $L(x, u) = u^2 + x$ не зависит от t . Поэтому и функция Понtryгина $H(x, u, p) = pu - L(x, u)$ не зависит от времени. В нашем случае $H = pu - (u^2 + x)$. Экстремаль Понtryгина (u, x) удовлетворяет системе канонических уравнений Гамильтона–Понtryгина

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

или

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dp}{dt} = 1.$$

Первое уравнение – это уравнение движения (1), а из второго находим импульс (сопряженную переменную) как функцию времени

$$p(t, a) = t - a.$$

Заметим, что импульс является линейной возрастающей функцией времени, a – постоянный параметр на экстремали. Условие максимума Понтрягина описывается формулой $H(x, u, p) = \max_{\nu} H(x, \nu, p)$ или, в нашем случае,

$$p(t)u(t) - u^2(t) - x(t) = \max_{0 \leq \nu \leq V} [p(t)\nu - \nu^2 - x(t)].$$

Это равенство следует понимать так, что выражение $p(t)\nu - \nu^2 - x(t)$ принимает максимальное значение при экстремальном управлении $\nu = u(t)$. Поэтому можно записать $u = \arg \max_{0 \leq \nu \leq V} [p(t)\nu - \nu^2 - x(t)]$. Далее из этого соотношения, следуя (Kamien, Schwartz, 1991; Caputo, 2005; Dowling, 2000), получим общую формулу для управления как функции времени.

7. ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Найдем экстремальное управление (управление вдоль экстремали Понтрягина). Для этого упростим выражение $u = \arg \max_{0 \leq \nu \leq V} [p(t)\nu - \nu^2 - x(t)]$. Сначала вынесем знак “минус”, поменяв $\max$ на $\min$: $u = \arg \min_{0 \leq \nu \leq V} (\nu^2 - p\nu + x)$. Затем выделим полный квадрат по ν :

$$u = \arg \min_{0 \leq \nu \leq V} [(\nu^2 - 2(p/2)\nu + (p/2)^2) - (p/2)^2 + x] -$$

и удалим слагаемые, не зависящие от ν , после чего выражение сильно упростится:

$$u = \arg \min_{0 \leq \nu \leq V} [(\nu - p/2)^2]. \quad (2)$$

Здесь $p(t, a)$ и $u(t, a)$ – функции времени t и постоянного параметра a .

При фиксированных (t, a) парабола $z(\nu) = (\nu - p/2)^2$ как график функции переменной ν имеет вершину в точке $\nu = p/2$. Абсцисса вершины $p(t, a)/2 = (t - a)/2$ с увеличением времени линейно растет. По отношению к отрезку $[0, V]$ вершина может находиться слева, внутри или справа. В зависимости от этого минимум в (2) будет достигаться соответственно при $\nu = 0$, $\nu = p/2$ или $\nu = V$, поскольку на промежутке $\nu \in [0, V]$ функция $z(\nu)$ в первом случае возрастает, во втором – имеет минимум при $\nu = p/2$, а в третьем – убывает. В результате экстремальное управление для этих трех случаев имеет вид соответственно

$$u(t, a) = 0, \quad u(t, a) = (t - a)/2, \quad u(t, a) = V.$$

С возрастанием времени t может происходить переход из одного случая в другой только в естественном порядке, т.е. из $u(t) = 0$ в $u(t) = (t - a)/2$, а из $u(t) = (t - a)/2$ – в $u(t) = V$. Несложно доказать, что управление является непрерывной функцией времени. Таким образом, график функции $u(t, a)$ представляет ломаную, состоящую не более чем из трех прямолинейных отрезков, два из которых, $u \equiv 0$ и $u \equiv V$, горизонтальны, а третий, промежуточный, $u = (t - a)/2$, имеет наклон $1/2$. Если считать время неограниченным, то в зависимости от знака параметра a имеется два типа экстремальных управлений.

При $a \geq 0$:

$$u(t, a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a; \\ (t - a)/2, & a \leq t \leq 2V + a; \\ V, & 2V + a \leq t. \end{cases} \quad (3)$$

С экономической точки зрения такое управление означает, что до момента $t = a$ идет период ожидания ($u \equiv 0$) и продукция не производится, чтобы не занимать складских помещений. Затем идет процесс производства с ускорением $1/2$, а после выхода на предельный режим в момент $t = 2V + a$ продукция производится с максимальной интенсивностью V .

Если $a \leq 0$: период ожидания отсутствует и сразу же начинается режим производства с начальной производительностью $-a/2$ и ускорением $1/2$, а остальное проходит по той же схеме, что и при $a \geq 0$:

$$u(t, a) = \begin{cases} (t-a)/2, & 0 \leq t \leq 2V+a, \\ V, & 2V+a \leq t. \end{cases} \quad (4)$$

Из верхней части формулы (4) ясно, что $2V+a \geq 0$. Таким образом, параметр a , определяющий конкретное экстремальное управление, удовлетворяет неравенству $a \geq -2V$.

Из графиков, представленных на рис. 3, видно, что семейство ломаных $u(t, a)$ монотонно убывает: чем больше a , тем ниже расположена ломаная $u(t, a)$. Ломаные целиком заполняют полуполосу $t \geq 0, 0 \leq u \leq V$.

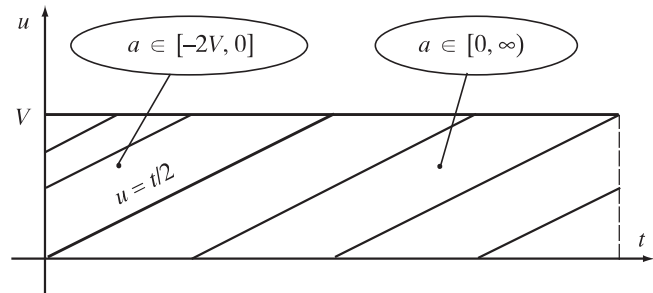


Рис. 3. Управление на экстремальных Понтрягина

8. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Интегрируя скорость $u(t, a)$, получим путь $\xi(t, a)$, который в экономической модели трактуется как количество изготовленной продукции. Поскольку путь построен из принципа максимума, он является экстремалью Понтрягина. Меняя a , будем создавать разные экстремали. Все они начинаются в точке $(0, 0)$, и свойство монотонности по a сохраняется — чем больше a , тем ниже расположена кривая $\xi(t, a)$. Таким образом, данное однопараметрическое семейство экстремалей однократно покрывает множество достижимости D . Такое семейство будем называть *центральным полем экстремалей* с центром в $(0,0)$ (Янг, 1974; Schattler, Ledzewicz, 2012). Вычислим в формулах (3) и (4) определенный интеграл от 0 до t с переменным верхним пределом:

$$\xi(t, a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a; \\ (t-a)^2/4, & a \leq t \leq 2V+a; \quad a \geq 0, \\ V(t-V-a), & 2V+a \leq t, \end{cases} \quad (5)$$

$$\xi(t, a) = \begin{cases} (t-a)^2/4 - a^2/4, & 0 \leq t \leq 2V+a; \\ V(t-V-a) - a^2/4, & 2V+a \leq t, \end{cases} \quad a \in [-2V, 0]. \quad (6)$$

При $a = 0$ обе формулы совпадают и дают

$$\xi(t, 0) = \begin{cases} t^2/4, & 0 \leq t \leq 2V, \\ V(t-V), & 2V \leq t, \end{cases}$$

а при $a = -2V$ имеем часть границы области достижимости $\xi(t, -2V) = Vt$ (см. рис. 1).

9. СТЫКОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для траектории поля $\xi(t, a)$ условимся обозначать через (k, r) точку расширенного фазового пространства, в которой траектория выходит на максимальную скорость V . Выразим a через k . Так как, согласно формулам (5) и (6), на стыке имеем $2V+a = k$ при всех a , то

$$a = k - 2V. \quad (7)$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$r = \begin{cases} V^2, & a \geq 0, \\ V(k - k^2/4), & a \in [-2V, 0]. \end{cases} \quad (8)$$

Рассматривая $r = \psi(k)$ как функцию переменной $k \in [0, \infty)$, имеем линию перехода на максимальную скорость

$$\psi(k) = \begin{cases} Vk - k^2/4, & 0 \leq k \leq 2V, \\ V^2, & 2V \leq k < \infty \end{cases} \quad (9)$$

(см. рис. 1).

Пусть теперь (t, x) – произвольная точка траектории $\xi(t, a)$, в которой скорость равна V . Подставив в (5) и (6) формулу (7), находим

$$x = \begin{cases} V - k + t, & a \geq 0, \\ Vt - k^2/4, & a \in [-2V, 0]. \end{cases}$$

Отсюда найдем k :

$$k = \begin{cases} V + t - (1/V)x, & a \geq 0, \\ 2\sqrt{Vt - x}, & a \in [-2V, 0]. \end{cases}$$

Нам понадобится полная производная $k' = \frac{d}{dt}k = k_t + k_x v$ в точке (t, x) для любого возможного вектора скорости $v \in [0, V]$. Ясно, что

$$k' = \begin{cases} (V - v)/V, & a \geq 0, \\ (V - v)/\sqrt{Vt - x}, & a \in [-2V, 0]. \end{cases}$$

10. ФОРМУЛИРОВКА КРИТЕРИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПОЛЯ

В (Орёл Е., Орёл О., 2013, 2014) получены критерии оптимальности центрального поля траекторий. Покажем, как действует в нашей задаче один из них.

Центральное поле траекторий называется оптимальным, если каждая траектория поля является оптимальной в классе траекторий, имеющих те же концы. В нашем случае поле считается оптимальным, если для каждой точки (t, x) траектория поля $\xi(\tau, a)$, такая, что $\xi(t, a) = x$ оптимальна в классе всех траекторий, начинающихся в $(0, 0)$ и оканчивающихся в (t, x) .

Определим на множестве достижимости D функцию $S(t, x)$, которую, как в вариационном исчислении, будем называть действием по Гамильтону:

$$S(t, x) = \int_0^t [u^2(\tau, a) + \xi(\tau, a)] d\tau,$$

где $\xi(\tau, a)$ – траектория поля, оканчивающаяся в точке (t, x) .

Для любого мгновенного управления (скорости) $v \in [0, V]$ запишем полную производную функции S по времени согласно формуле

$$\frac{d}{dt}S(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [(S(t + \Delta t, x + v\Delta t) - S(t, x))/\Delta t].$$

Ввиду возможной негладкости функции S в общем случае имеется в виду верхний предел, и в итоге получается верхняя производная по направлению. В нашей задаче это можно записать как $dS(t, x)/dt = S_t + S_x v$, однако на границах подобластей области достижимости следует брать максимум из двух или четырех выражений.

Критерий оптимальности центрального поля: поле оптимально тогда и только тогда, когда для любых $(t, x) \in D$ и $v \in [0, V]$ выполнено неравенство $L(t, x, v) - dS(t, x)/dt \geq 0$.

11. ПРОВЕРКА КРИТЕРИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Найдем явное выражение для $S(t, x)$ и $dS(t, x)/dt = S_t + S_x \nu$. Ввиду сложных выкладок придется рассмотреть 4 подобласти области D , а также полуось ($t \geq 0, x = 0$), по аналогии с формулами (5) и (6). Разбиение области D на подобласти показано на рис. 1.

Случай 1. $a \geq 0$.

А. На промежутке $[0, a]$ имеем $S(t, x) = 0$ и $dS(t, x)/dt = 0$. Значит, $L(t, x, \nu) - dS(t, x)/dt = \nu^2 \geq 0$.

Б. На промежутке $[a, 2V + a]$ имеем $S = 0,25 \int_a^t [(\tau - a)^2 + (\tau - a)^2] d\tau = (t - a)^3/6$. Выразим a через t и x : $x = 0,25(t - a)^2$; $2\sqrt{x} = t - a$. После подстановки $S = (4x^{3/2}/3)$ (действие по Гамильтону в этой области зависит только от x) имеем

$$\frac{d}{dt}S = 2x^{1/2}\nu, \quad L(t, x, \nu) - dS(t, x)/dt = \nu^2 + x - 2\nu\sqrt{x} = (\sqrt{x} - \nu)^2 \geq 0.$$

В. На промежутке $[2V + a; \infty)$ действие $S = S_1 + S_2$ является суммой двух интегралов: S_1 по $[a, 2V + a]$ и S_2 по $[2V + a; \infty)$. Так как $r = \xi(k, a) = V^2$, то $S_1 = 4V^3/3$. Прежде чем найти второй интеграл, выразим a из формулы $x = V(t - V - a)$. Получим $a = t - V - x/V$. Второй интеграл берется от линейной функции τ :

$$S_2 = \int_k^t [V^2 + V(\tau - V - a)] d\tau = \int_{V+t-x/V}^t (x + V\tau - Vt + V^2) d\tau,$$

или $S_2 = 0,5x^2/V + Vx - 1,5V^3$. Значит, $S = 0,5x^2/V + Vx - V^3/6$. Переходим к частным производным: $S_t = 0$, $S_x = x/V + V$. Поэтому $dS/dt = (x/V + V)\nu$. Теперь

$$L - \frac{dS}{dt} = x + \nu^2 - \frac{1}{V}\nu x - V\nu = (V - \nu) \left(\frac{x - V\nu}{V} \right).$$

Это выражение неотрицательно, так как $V - \nu \geq 0$ и $x - V^2 \geq 0$.

Таким образом, в области, по которой проходят траектории поля $\xi(t, a)$ с $a \geq 0$, критерий выполнен.

Случай 2. $a \in [-2V, 0]$.

А. На промежутке $[0, 2V + a]$ имеем $x = 0,25(t - a)^2 - 0,25a^2 = 0,25t^2 - 0,5at$, откуда $a = 0,5t - 2x/t$. Тогда $S(t, x) = 0,25 \int_0^t [(\tau - a)^2 + (\tau - a)^2 - a^2] d\tau = 0,25a^2t - 0,5at^2 + t^3/6$. Подставим выражение для a : $S(t, x) = 0,25(0,5t - 2x/t)^2t - 0,5(0,5t - 2x/t)t^2 + t^3/6$, или

$$S(t, x) = x^2/t + 0,5tx - t^3/48. \quad (10)$$

Переходим к частным производным:

$$S_t = -x^2/t^2 + 0,5x - t^2/16, \quad S_x = 2x/t + 0,5t,$$

$$L - dS/dt = \nu^2 + x - [-x^2/t^2 + 0,5x - t^2/16 + (2x/t + 0,5t)\nu].$$

После несложных преобразований получаем $L - dS/dt = ([4x - 4t\nu + t^2]/(4t))^2 \geq 0$.

Б. На промежутке $[2V + a; \infty)$ действие $S = S_1 + S_2$ является суммой двух интегралов — по промежутку $[0, 2V + a]$ (по существу, этот интеграл уже вычислен) и по $[2V + a; \infty)$. Согласно (10)

имеем $S_1 = (1/k)r^2 + 0,5kr - k^3/48$. Подставляя (8), запишем

$$S_1 = (Vk - 0,25k^2)^2/k + 0,5k(Vk - 0,25k^2) - k^3/48 = V^2k - k^3/12, \\ dS_1/dt = (V^2 - 0,25k^2)k'.$$

Теперь $S_2 = \int_k^t (V^2 + V(\tau - V - a) - 0,25a^2)d\tau$. Подставим в него соотношение (7):

$$S_2 = \int_k^t [V^2 + V(\tau - V - (k - 2V)) - 0,25(k - 2V)^2]d\tau, -$$

теперь интегрируем $S_2 = -V^2k + V^2t - 0,5Vk^2 + 0,5Vt^2 + 0,25k^3 - 0,25k^2t$ и берем полную производную по t : $dS_2/dt = (-V^2 - Vk + 0,75k^2 - 0,5kt)k' + V^2 + Vt - 0,25k^2$.

После упрощения суммирование dS_1/dt и dS_2/dt дает $dS/dt = (0,5k - V - 0,5t)kk' + Vt + V^2 - 0,25k^2$, или $dS/dt = x + 2V\sqrt{Vt - x} - 2v\sqrt{Vt - x} - Vt + 2Vv + tv - V^2$. Теперь $L - dS/dt = x + v^2 - (x + 2V\sqrt{Vt - x} - 2v\sqrt{Vt - x} - Vt + 2Vv + tv - V^2)$. Группируя, получаем $L - dS/dt = (V - v) \times [(V - v) + t - 2\sqrt{Vt - x}]$. Так как $V \geq v$, неравенство $L - dS/dt \geq 0$ справедливо, если $t \geq 2\sqrt{Vt - x}$. Возведем последнее неравенство в квадрат и выразим x : $x \geq Vt - (0,25t^2)$. Но это неравенство очевидно, поскольку показывает, что точка (t, x) лежит над линией (9) перехода на максимальную скорость (см. рис. 1).

12. ВЫВОДЫ И КОММЕНТАРИИ

Итак, мы убедились, что во всех точках множества достижимости критерий оптимальности поля выполнен. Следовательно, *каждая экстремаль является оптимальной траекторией*, т.е. действительно доставляет глобальный экстремум функционалу суммарных затрат.

Представляет интерес проверка на данной задаче альтернативных подходов, о которых говорилось в разд. 1, к доказательству того, что экстремали Понтрягина оптимальны.

В общем случае построение оптимальной траектории с полным доказательством остается весьма трудной задачей. Видимо, сложные задачи оптимального управления целесообразно решать не аналитически, а численно. Результаты работы вычислительной программы, решающей рассматриваемую задачу, показаны на рис. 2. Визуально это такое же центральное поле экстремалей. Программа составляла траектории из прямолинейных отрезков, как в методе ломаных Эйлера. В данном случае можно было построить заранее регулярную решетку на плоскости так, чтобы алгоритм двигался по узлам решетки. Возникает граф, на котором с помощью алгоритма Дейкстры ищется оптимальный путь, точнее, дерево путей с корнем в $(0,0)$. Из рис. 2 видно, что это дерево мало чем отличается от центрального поля экстремалей, построенного аналитически. Однако бывают задачи, в которых заранее решетку построить невозможно. В таких задачах можно разбить пространство состояний на классы (Орёл, 1989, 1990). Тогда модифицированный алгоритм Дейкстры будет строить путь, только не по узлам решетки, а по классам.

В будущем полезно исследовать более сложную модель, когда время T достаточно велико и возникает необходимость рассматривать затраты с учетом дисконтирования. В этом случае

минимизируемый функционал принимает вид $J = \int_0^T e^{-\rho t} [u^2(\tau) + x(\tau)] d\tau$, где ρ – ставка дискон-

тирования. Для задачи с дисконтированием на сегодняшний день доказано, что экстремали удовлетворяют достаточному условию, но только *локального* минимума (Dowling, 2000).

Приведем пример, демонстрирующий целесообразность введения ограничения сверху на скорость производства (все величины будем считать приведенными; например, количество заказанной продукции равно $X = aY/b$).

Пример. Пусть фирма через $T = 200$ дней должна выполнить заказ на $X = 2500$ единиц продукции. Требуется найти план производства $x(t)$, обеспечивающий наименьшие затраты

$$J = \int_0^T [u^2(\tau) + x(\tau)] d\tau.$$

Если не вводить ограничения сверху на скорость $x'(t)$, решение $x_0(t)$ будет следующим. Надо ничего не делать первые $a = 100$ дней, после чего производить продукцию согласно графику $x_0(t) = 0,25(t - 100)^2$. При таком графике основная нагрузка ложится на последние дни, в каждый из которых придется производить примерно $x'_0(200) = 50$ единиц товара. Несмотря на то что в функционал J входит штраф за скорость, такой график для последних дней выполнения заказа может оказаться для фирмы слишком напряженным.

Предположим, обдумав ситуацию, руководство фирмы решило, что следует производить не более $V = 20$ единиц продукции в день. После введения такого ограничения на скорость получаем следующий оптимальный план $x_1(t)$: работа над выполнением заказа начинается на $a = 55$ день. До $2V + a = 95$ дня работа должна проводиться с ускорением $x''_1(t) = 0,5$ по графику $x_1(t) = 0,25(t - 55)^2$, а в оставшийся период нужно производить продукцию с постоянной скоростью $V = 20$.

По существу, за период с 55 по 100 день будет произведено немного продукции ($400 + 5 \times 20 = 500$) и на ее хранение уйдет мало средств. Зато в результате разгрузятся последние дни, и график не будет таким напряженным.

Таким образом, чтобы избежать запредельных нагрузок на последние дни выполнения заказа, нужно, как предложено в работе, вводить ограничение сверху на скорость производства товара.

Обобщенная модель. В статье, так же как и в ряде монографий (Kamien, Schwartz, 1991; Caputo, 2005; Dowling, 2000), рассмотрена квадратичная зависимость функции Лагранжа L от скорости $u(t) = x'(t)$. Однако не исключено, что другая степень скорости будет точнее описывать конкретную экономическую систему. Покажем кратко, что идеи, развитые в статье, могут быть эффективно использованы и в случае произвольной степени $r > 0$.

Пусть для $r > 0$ решается задача

$$C_p + C_s = a \int_0^T y'^r(\tau) d\tau + b \int_0^T y(\tau) d\tau.$$

После замены переменной $y(t) = (b/a)^{1/(r-1)} x(t)$ задача упрощается:

$$J = \int_0^T (u^r(\tau) + x(\tau)) d\tau \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$dx(t)/dt = u(t), \quad 0 \leq u(t) \leq V, \quad t \geq 0, \quad x(t) \geq 0, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = X.$$

Функции Лагранжа и Гамильтона равны $L(x, u) = u^r + x$, $H = pu - (u^r + x)$ соответственно. Уравнения Гамильтона–Якоби–Понтрягина выглядят так же, как и раньше: $dx/dt = u$, $dp/dt = 1$. Из второго уравнения находим импульс как функцию времени $p(t, a) = t - a$. Условие максимума Понтрягина:

$$p(t)u(t) - u^r(t) - x(t) = \max_{0 < v \leq V} [p(t)v - v^r - x(t)],$$

откуда $u = \arg \min_{0 \leq v \leq V} (v^r - pv)$.

Можно показать, что при $r \in (0, 1]$ задача вырождается, а оптимальное управление принимает тривиальный вид:

$$u = \begin{cases} 0, & t \in [0, T - X/V), \\ V, & t \in [T - X/V, T). \end{cases}$$

Экономически это означает, что нужно ждать до последнего возможного момента, а потом производить продукцию с максимальной скоростью V . Заметим, что если бы не было ограничения $u \leq V$, то задача не имела бы решения.

В случае $r > 1$ решение будет аналогично рассмотренному в статье случаю $r = 2$, только потребуются более сложные выкладки вместо исследования расположения вершины параболы. Функция двух переменных $g(v, p) = v^r - pv$ определена при $v \geq 0$ и выпукла по v . Она имеет минимум в точке $v_* = (p/r)^{1/(r-1)}$ но лишь при условии, что $p \geq 0$. Напомним, что функция $p = t - a$ возрастает со временем.

Теперь возникают три варианта для оптимального управления u и, соответственно, три стадии эволюции системы:

- 1) $p < 0$, тогда g как функция v только возрастает, поэтому $u = v_{\min} = 0$ (ожидание);
- 2) $0 < v_* < V$, тогда $u = v_* = (p/r)^{1/(r-1)}$ и производство постепенно разворачивается, так как, ввиду равенства $p = t - a$, скорость со временем растёт;
- 3) $v_* \geq V$, тогда $u = V$, и процесс производства идет с максимальной скоростью.

Система при каждом значении параметра a проходит эти три стадии в естественном порядке, хотя при некоторых значениях a одна или две стадии могут отсутствовать.

После этого остается только определить зависимость оптимального управления от параметра a и проверить во всех случаях выполнение критерия оптимальности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Орёл Е.Н. (1989). Метод решения задач оптимального управления // *Доклады Академии наук СССР*. Т. 306. № 6. С. 1301–1304.
- Орёл Е.Н. (1990). Алгоритмы поиска квазиоптимального управления, использующие разбиение пространства состояний // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. Т. 29. № 9. С. 1283–1293.
- Орёл Е.Н., Орёл О.Е. (2013). Абсолютный экстремум в задачах оптимального управления // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. № 3. С. 60–73.
- Орёл Е.Н., Орёл О.Е. (2014). Центральные поля оптимальных траекторий // *Доклады Академии наук*. Т. 458. № 4. С. 1–4.
- Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. (1969). Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука.
- Флеминг У., Ришел Р. (1978). Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир.
- Янг Л. (1974). Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир.
- Caputo M.R. (2005). *Foundations of Dynamic Economic Analysis: Optimal Control Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dowling E.T. (2000). *Introduction to Mathematical Economics*. Schaum's Outline Series. N.Y.: McGraw Hill.
- Kamien N., Schwartz N. (1991). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. N.Y.: Elsevier Science Publishing Co.
- Schattler H., Ledzewicz U. (2012). *Geometric Optimal Control: Theory, Methods and Examples*. N.Y.: Springer.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

- Caputo M.R.** (2005). *Foundations of Dynamic Economic Analysis: Optimal Control Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Dowling E.T.** (2000). *Introduction to Mathematical Economics*. Schaum's Outline Series. N.Y.: McGraw Hill.
- Fleming U., Rishel R.** (1978). *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Moscow: Mir (in Russian). [**Fleming U., Rishel R.** (1975). *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. N.Y.: Springer-Verlag.]
- Kamien N., Schwartz N.** (1991). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. N.Y.: Elsevier Science Publishing Co.
- Orel E.N.** (1989). A Method for Numerical Solution of Optimal Control Problems. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences* 306, 1301–1304 (in Russian).
- Orel E.N., Orel O.E.** (2013). Global Extremum in Autonomous Problems of Optimal Control. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya* 3, 60–73 (in Russian). [**Orel E.N., Orel O.E.** (2013). Global Extremum in Autonomous Problems of Optimal Control. *Journal of Computer and Systems Sciences International* 52, 3, 386–399.]
- Orel E.N., Orel O.E.** (2014). Central Fields of Optimal Trajectories. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences* 457, 4, 402–405. [**Orel E.N., Orel O.E.** (2014). Central Fields of Optimal Trajectories. *Doklady Mathematics* 90, 2, 651–653.] (in Russian).
- Orel E.H.** (1990). Algorithms for Searching of Quasy-Optimal Control Using a Partition of the State Space. *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 29 (9), 1283–1293 (in Russian).
- Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.** (1969). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Moscow: Nauka (in Russian). [**Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.** (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. N.Y.: Wiley.]
- Schattler H., Ledzewicz U.** (2012). *Geometric Optimal Control: Theory, Methods and Examples*. N.Y.: Springer.
- Young L.** (1974). *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. Moscow: Mir (in Russian). [**Young L.** (1969). *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. London: W.B. Saunders Company.]

Поступила в редакцию
30.01.2015 г.

Optimal Production Control of Order Performing by Delivery Date

E.N. Orel, O.E. Orel

The application peculiarities of optimal control models in economic problems are discussed. Attention is stressed in the need to find the global extremum. To this end it is proposed, as in the calculus of variations, to build central fields of extremals and examine them for global extremum. The central field consists of extremals emanating from the initial point and once covering the reachable area. Since building such a field is analytically much harder than finding one extremal, which may be interpreted only as a local extremum, paying more attention to numerical methods is recommended. This program is being implemented at a known problem that is to perform an order for a production by given time at minimum cost. The central field of Pontryagin's extremals is built. An extremal of general position consists of three stages. First, there is a waiting period, then – the gradual deployment of incremental production rate, and at the last stage – the production at maximum speed. It is proved that the field is smooth, so that each trajectory is optimal in the usual sense. For this model numerical experiments were conducted. The family of trajectories constructed numerically is almost indistinguishable visually from the analytical constructed field of extremals. This emphasizes the closeness and adequacy of both approaches.

Keywords: optimal control, order, production output, global extremum, central field of trajectories.

JEL Classification: C61.