ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2016, том 52, № 3, с. 114–124

ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ВОСПРОИЗВОДСТВА И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМЫХ БИОРЕСУРСОВ

© 2016 г. В.И. Струченков

(Москва)

Рассматривается задача оптимального планирования воспроизводства и использования возобновляемого биоресурса в течение заданного числа лет, в частности разведения рыбы и водных животных как в естественных, так и в искусственных условиях. Исследуются различные модели целевой функции, которая представляет собой разность дохода за полный период планирования и затрат на использование ресурса, включая его добычу. Неизвестными являются ежегодные объемы использования ресурса. Возможны ограничения на минимальные величины этих объемов, а также ограничение на минимальный объем ресурса, который должен остаться после окончания рассматриваемого периода планирования. Для простейшей линейной модели показано, что в каждом году, кроме последнего, следует использовать минимально допустимый объем ресурса, а в последний год использовать максимально допустимый объем ресурса, т.е. оставлять для дальнейшей работы заданный минимальный объем. Для квадратичной модели на основе метода динамического программирования получены расчетные формулы, что позволяет избежать перебора вариантов пошаговых решений. Для произвольной аддитивной целевой функции предлагаются новые эффективные алгоритмы решения задачи с использованием множеств Парето.

Ключевые слова: ресурс, целевая функция, множество состояний, динамическое программирование, оптимальный путь, множества Парето.

Классификация JEL: C610.

ВВЕДЕНИЕ

Объективное сравнение и выбор наиболее эффективного из проектов организации воспроизводства и использования биоресурсов на основе математического моделирования и применения методов оптимизации является актуальной задачей. Различные проекты могут существенно отличаться как капитальными затратами, так и текущими затратами на содержание хозяйства и использование ресурса, включая его добычу. Важное значение имеет поэтапный план воспроизводства и использования ресурса, так как от объема ресурса, изымаемого на каждом из этапов, зависит в конечном итоге суммарная оценка экономической эффективности проекта.

Известны негативные последствия чрезмерной добычи различных природных биоресурсов, например некоторых видов китов и других морских животных. Поскольку использование многих видов возобновляемых биоресурсов является насущно необходимым, в этой области требуется разумное планирование.

Планирование добычи ресурсов в естественной среде обитания существенно сложнее, чем при воспроизводстве биоресурсов в искусственных условиях. Однако математическое моделирование может быть полезным и в этом случае.

Для классической задачи оптимального распределения заданного количества некоторого однородного ресурса известны метод динамического программирования (Беллман, Дрейфус, 1965) и его новые реализации, усовершенствованные за счет использования множеств Парето (Струченков, 2010). При этом в классической задаче заданное начальное количество ресурса при переходе от этапа к этапу могло только уменьшаться. В рассматриваемой нами задаче имеющийся объем ресурса при переходе от этапа к этапу может как уменьшаться, так и увеличиваться за счет естественного прироста при малом объеме добычи.

Пионерные исследования по применению динамического программирования для решения рассматриваемой задачи в нашей стране были выполнены почти полвека тому назад. Однако крайне ограниченные возможности вычислительной техники того времени не позволили реализовать эти идеи (Меншуткин, Кисляков, 1967).

В дальнейшем для решения задачи применительно к построению оптимального плана вылова форели предлагалось использовать классическую схему динамического программирования (Косоруков, Мищенко, 2003). Однако из-за большого объема вычислений при подобной попытке решения задачи в лоб возникает вопрос о возможности реализации этой схемы в приемлемое время даже на современных общедоступных компьютерах.

Задача поэтапного планирования воспроизводства и использования возобновляемых ресурсов имеет свои особенности, которые позволили автору создать новые эффективные алгоритмы на основе метода динамического программирования.

Цель настоящей статьи – проанализировать некоторые модели задачи оптимального планирования воспроизводства и использования биоресурсов и изложить эффективные в вычислительном смысле алгоритмы ее решения по методу динамического программирования с использованием множеств Парето. Оптимальное планирование важно не только в рамках действующего хозяйства или одного проекта его создания и развития, но позволяет объективно сравнить различные проекты организации воспроизводства и использования возобновляемых ресурсов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача состоит в следующем: в начальный момент времени имеется заданное количество возобновляемого ресурса R_1.

Заданный период планирования T (например, $T = 10$ лет) разбивается на этапы, например на годы. Этап длится от одного изъятия ресурса до следующего. При использовании x единиц ресурса доход равен $d(x)$, а сопутствующие затраты – функция $c(x,R)$ от количества изымаемого ресурса x и количества ресурса на начало года R. К сопутствующим затратам отнесем все затраты, предшествующие получению дохода. Объем используемого ресурса – это количество ресурса изымаемого из его среды обитания. Ресурс возобновляемый, и при наличии на начало года i ($i = 1,\dots,T$) R_i единиц ресурса и использования x_i его единиц на начало следующего года будет $R_{i+1} = p(R_i - x_i)$ единиц ресурса. Коэффициент p считается известным. В начале года T при рассмотрении вариантов использования ресурса в этот последний год считается, что оставшееся к $(T + 1)$ году количество ресурса не имеет значения или должно быть не меньше заданной величины. Поэтому в начале последнего года T задача принятия решения существенно упрощается.

Требуется построить такой план воспроизводства и использования ресурса, чтобы в течение T лет суммарный количественный показатель качества плана (целевая функция) принял максимальное значение. Могут применяться различные целевые функции, например суммарная прибыль. Эта постановка задачи аналогична предложенной ранее (Косоруков, Мищенко, 2003), где конкретный вид функций $d(x)$ – доход и $c(x, R)$ – затраты не приводятся, но приводятся значения $R_1 = 10\,000$, $p = 1,2$ и $T = 10$.

Предлагалось при планировании промысла рыбы в качестве целевой функции использовать суммарный доход, а затраты на промысел не учитывать (Солдатов, 2005). Представляется более предпочтительным максимизация прибыли при соответствующих ограничениях, чем максимизация дохода.

Для начала предположим, что все виды затрат, которые не зависят от x_i ($i = 1,\dots,T$), но могут быть различными для сравниваемых проектов, вычислены отдельно. Постоянные слагаемые целевой функции, которые не влияют на положение точки оптимума, обычно исключаются из процесса оптимизации. Однако в этом случае при решении рассматриваемой задачи формальный оптимум может соответствовать решениям, при которых прибыль в некотором году будет отрицательной, хотя в целом она максимальная.

Если отрицательная годовая прибыль недопустима, то появляется ограничение на минимальный объем использования ресурса в каждом году. Это ограничение несколько усложняет алгоритм поиска. Для простоты изложения вначале допустим возможность использования любого количества имеющегося ресурса, т.е. будем рассматривать только переменную часть целевой функции. В дальнейшем внесем необходимые уточнения.

Если целевая функция – это суммарная прибыль, то без учета постоянных слагаемых задача сводится к следующему: найти вектор $\mathbf{x} = (x_1,..., x_T)$, при котором суммарная прибыль

$$\sum_{i=1}^{T}(d(x_i) - c(x_i, b_i));\ 0 \le x_i \le b_i;\ b_{i+1} = p(b_i - x_i);\ i = 1, \ldots, T$$

достигает максимума. Для простоты изложения мы намеренно опустили коэффициенты дисконтирования, так как их введение в модель означает появление коэффициентов в слагаемых целевой функции и принципиально не меняет ее вида. Каждое слагаемое целевой функции будем условно называть годовой прибылью.

Коэффициент прироста **p** принят постоянным, хотя в общем случае ничего не мешает рассматривать его как функцию имеющегося ресурса.

Ключевое для метода динамического программирования понятие “состояние системы” формализуется как количество имеющегося ресурса. Соответственно траектория (или путь) – это последовательность состояний, т.е. значений имеющегося ресурса в начале каждого года. В начале года i множество состояний составляет множество возможных значений ресурса R_i. Построить оптимальный план означает при заданном R_1 найти все x_i.

КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При реализации классической схемы динамического программирования процесс рассматривается от конца к началу, т.е. начиная с множества состояний R_T в начале последнего года (рис. 1).

Далее для каждого состояния, т.е. для всех возможных значений R_T от 0 до R_1p^{T-1}, определяется оптимальный путь до конца, т.е. оптимальное количество ресурса, используемого в последнем году (x_T^*), и вычисляется соответствующее ему значение целевой функции

$$f_T(R_T) = \max_{x_T}\{d(x_T) - c(x_T, R_T)\},\quad 0 \le x_T \le R_T.$$

Если с увеличением объема используемого ресурса прибыль возрастает, то целесообразно его максимальное использование в последнем году.

Далее рассматриваются два последних года, и для каждого состояния R_{T-1} перебором и сравнением всех возможных переходов в состояния R_T (в начало последнего года) определяется и запоминается x^*_{T-1} и соответствующее ему значение целевой функции

$$f_{T-1}(R_{T-1}) = \max_{x_{T-1}}\{d(x_{T-1}) - c(x_{T-1}, R_{T-1}) + f_T(R_T)\},\quad 0 \le x_{T-1} \le R_{T-1}.$$

И так – до тех пор, пока не будет найден x_1^* при заданном R_1. Другими словами, рекомендуется двигаться по сетке состояний в обратном направлении в предположении, что в начале очередного года возможно любое количество ресурса от нуля до максимального, получаемого при полном отсутствии использования ресурса в предшествующий период.

Далее, зная x_1^*, вычисляем соответствующее ему $R_2^* = p(R_1 - x_1^*)$. Ему соответствует x_2^* и т.д. до восстановления оптимальной траектории, т.е. построения плана использования ресурса.

Формально количество рассматриваемых вариантов только при переходе от предпоследнего года $T-1$ к последнему году T равно $0{,}5(2 + R_1p^{T-2})R_1p^{T-2}$.

При $R_1 = 10\,000$, $p = 1{,}2$ и $T = 10$ это примерно 10^9. Общее число рассматриваемых вариантов близко к 10^{10}, а при $R_1 = 50\,000$, $p = 2$ и $T = 10$ это будет число уже порядка 10^{14}. Следовательно, классическая схема динамического программирования не эффективна в вычислительном отношении и необходимо искать другие решения.

Возникает вопрос о том, нужно ли рассматривать все возможные состояния или можно существенно сократить их количество. Простое решение состоит в укрупнении единицы измерения количества ресурса. Однако это решение неприемлемо из-за больших ошибок, вызванных необходимостью округления до целых чисел, получаемых в процессе нахождения значений ресурса при нецелом коэффициенте p.

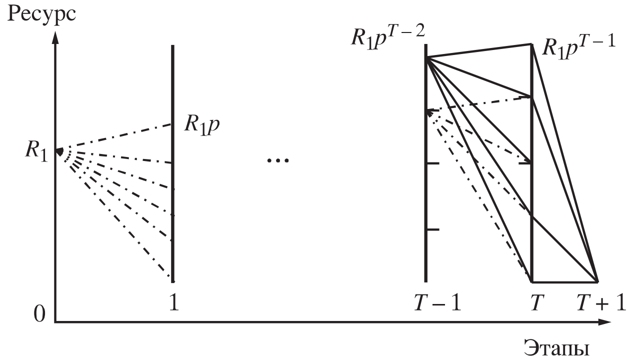

Рис. 1. Схема динамического программирования

Отметим, что в данной задаче при ее численном решении удобно и эффективно двигаться от начала к концу, а аналитические выкладки, наоборот, удобнее выполнять при рассмотрении задачи в обратном направлении, т.е. от последнего этапа к первому.

Для поиска более эффективных решений рассмотрим некоторые модели целевой функции, а потом перейдем к решению задачи в общем случае.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Для начала отметим, что для простых моделей можно, используя принцип оптимальности Р. Беллмана, получать последовательно, начиная с $i = T$, аналитические выражения оптимального количества используемого ресурса x^*_i как функции R_i, не прибегая к численным методам и вообще не перебирая пошаговые варианты. Рассмотрим две такие модели, отличающиеся функциями дохода $d(x)$ и затрат $c(x, R)$.

Линейная модель. Если годовая прибыль $f(x) = ax$, то для выбора количества используемого ресурса в предпоследнем году x^*_{T-1} из имеющегося количества R_{T-1} для максимизации прибыли за два последних года нужно найти $\max\limits_{x_{T-1}}(ax_{T-1} + ap(R_{T-1} - x_{T-1})) - k(R_{T-1} - x_{T-1})$. Максимум достигается при $x_{T-1} = 0$, так как $0 \le x_{T-1} \le R_{T-1}$.

Рассуждая аналогично применительно ко всем годам, приходим к выводу: оптимальный план состоит в том, чтобы вообще не расходовать ресурс до последнего года и только в последний год использовать его максимально возможное количество.

Если в целевую функцию включить дополнительно затраты $c_{\text{доп}} = k(R - x)$, пропорциональные остающемуся ресурсу, например затраты на корм при содержании в искусственной среде, то нужно найти $\max\limits_{x_{T-1}}(ax_{T-1} + ap(R_{T-1} - x_{T-1}) - k(R_{T-1} - x_{T-1})$. Максимум достигается при $x_{T-1} = 0$, если $a(p - 1) > k$, и при $x_{T-1} = R_{T-1}$ в противном случае, что означает полное использование ресурса. Аналогичный вывод мы получим при последовательном рассмотрении предшествующих лет.

Условие $a(p - 1) < k$ означает нецелесообразность реализации проекта вообще.

В итоге для линейной модели получаем вывод: если воспроизводство ресурса имеет смысл, то его использование целесообразно отложить до последнего года.

Если потребность в использовании ресурса не позволяет накапливать его до последнего года, следует ограничиться его минимально необходимым использованием.

Может показаться, что этот же вывод о целесообразности сохранения ресурса до последнего года справедлив не только для линейной, но и для любой монотонно возрастающей целевой функции. Но это не так, как будет ясно из дальнейшего.

Квадратическая модель. Сохраняя линейную функцию дохода, рассмотрим функцию годовых затрат $c(x, R)$ в виде $c(x, R) = c_1 x + (q/R)x^2$, где x, R имеют тот же смысл, что и ранее, а c_1 и q заданные коэффициенты. Слагаемое $(q/R)x^2$ моделирует затраты на изъятие ресурса, которые

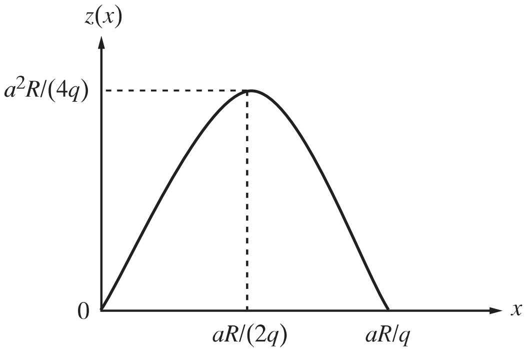

Рис. 2. Зависимость прибыли $z(x)$ от количества реализуемого ресурса x

возрастают с ростом x, а при заданном x убывают с ростом R – количества имеющегося ресурса. Действительно, при разведении форели выловить 100 форелей легче, если их много, например 10 000, чем если их всего 200 и надо оставить 100. При полном использовании ресурса ($x = R$) эта часть затрат должна возрастать с ростом R, чем объясняется появление x^2 вместо x. Величина q – это затраты на изъятие единицы ресурса в случае его полного использования. Слагаемое $c_1 x$ соответствует дополнительным (кроме изъятия) затратам на использование ресурса x. При этом $0 \le x \le R$.

Объединяя все линейные слагаемые, для переменной части прибыли получаем функцию вида $z(x, R) = ax - (q/R)x^2$ (рис. 2). В дальнейшем рассмотрим и влияние дополнительных затрат на содержание биоресурса в искусственных условиях, т.е. $c_{доп} = k(R - x)$.

Далее, годовую прибыль за год с номером i обозначим через z_i, а суммарную прибыль за все оставшиеся годы, начиная с i, – через Z_i.

График зависимости $z(x)$ показывает, что при $a/(2q) < 1$ в точке максимума $x_{max} = aR/(2q) < R$, и нет смысла рассматривать все $x > x_{max}$, так как при $x = x_{max}$ больше прибыли, но и остается больше ресурса, чем при любом $x > x_{max}$. Если же $a/(2q) \ge 1$, то нужно принять $x_{max} = R$, так как $0 \le x \le R$. Следовательно, в год T из имеющегося ресурса R_T нужно использовать $x^*_T = \gamma_T R_T$, где $\gamma_T = \min\ (1,\ a/(2q))$. Нецелесообразность максимального использования ресурса в последнем году, т.е. неравенство $a/(2q) < 1$, представляется нереальной. Однако мы будем рассматривать общий случай.

Получили результат: *за последний год оптимальный объем используемого ресурса линейно зависит от его количества в начале года*. Коэффициент пропорциональности $\gamma_T = a/(2q)$ при $a/(2q) < 1$ и $\gamma_T = 1$ в противном случае.

Прибыль z_i за *любой один* год i при $x^*_i = \gamma_i R_i$ равна

$$z^*_i = a\gamma_i R_i - q/R_i(\gamma_i R_i)^2 = \gamma_i(a - \gamma_i q)R_i = \lambda_i R_i, \quad \lambda_i = \gamma_i(a - \gamma_i q). \tag{1}$$

Другими словами, *годовая* прибыль линейно зависит от имеющегося ресурса R_i при линейной зависимости количества используемого ресурса от R_i. На этом основаны все дальнейшие построения.

Для последнего года все определено: при любом R_T надо использовать $\gamma_T R_T$ единиц ресурса и получить прибыль $\lambda_T R_T$.

За год T прибыль $z_T = a^2 R_T/(4q)$ при $\gamma_T = a/(2q)$ и $z_T = (a - q)R_T$ при $\gamma_T = 1$.

Переходим к предпоследнему году $T - 1$. Найдем x^*_{T-1}, для которого максимальна суммарная прибыль за два последних года. В терминах динамического программирования это означает: из состояния R_{T-1} найдем такой переход в новое состояние R_T, чтобы суммарная прибыль Z_{T-1} за последние два года (этапа) была максимальной. Используя формулу (1) применительно к году T, получаем для прибыли за два последних года формулу

$$Z_{T-1} = ax_{T-1} - (q/R_{T-1})x^2_{T-1} + \gamma_T(a - \gamma_T q)(R_{T-1} - x_{T-1})p,$$

так как $R_T = (R_{T-1} - x_{T-1})p$. Z_{T-1} как функция x_{T-1} – максимальная при $x^*_{T-1} = 0{,}5(a(1 - p\gamma_T) + {}$ $+ qp\gamma_T^2)R_{T-1}/q$. В силу $x_{T-1} \le R_{T-1}$ имеем $x^*_{T-1} = \gamma_{T-1}R_{T-1}$, где $\gamma_{T-1} = \min\ (1,\ 0{,}5(a(1 - p\gamma_T) + {}$ $+ qp\gamma_T^2)\ /q) = \min(1,\ 0{,}5(a - p\lambda_T)/q)$, так как $\lambda_T = \gamma_T(a - \gamma_T q)$.

Если $0{,}5a/q \le 1$, то $\gamma_T = a/(2q)$ и $(a(1 - p\gamma_T) + qp\gamma_T^2)/(2q) = a/(2q) - a^2p/(8q^2) < \gamma_T \le 1$, или $\gamma_{T-1} < \gamma_T \le 1$.

Если $0{,}5a/q > 1$, то $\gamma_T = 1$ и $(a(1 - p\gamma_T) + qp\gamma_T^2)\ /(2q) = (a(1 - p) + qp)\ /(2q)$.

Так как $p > 1$, то $(a(1 - p) + qp) /(2q) < 1$ и в этом случае $\gamma_{T-1} < \gamma_T = 1$. Действительно, предположим противное, т.е. $a(1 - p)/(2q) + p/2 > 1$. Но это неравенство равносильно неравенству $(p - 1)a/q < (p - 2)$, которое не выполняется при $p > 1$ и $a/(2q) > 1$.

Поэтому можно записать $\gamma_{T-1} = (a(1 - p\gamma_T) + qp\gamma_T^2)/(2q)$, опуская операцию взятия минимума. Полученное неравенство $\gamma_{T-1} < 1$ означает нецелесообразность полного использования ресурса в предпоследнем году, что вполне естественно. Отсюда следует и нецелесообразность полного использования ресурса и в любой предшествующий год, так как при полном использовании ресурса в следующем за ним году получаем бóльшую суммарную прибыль.

Интересно отметить, что γ_{T-1} может оказаться отрицательным. Это означает, что $x^*_{T-1} = 0$ и использование ресурса в году $T - 1$ вообще нецелесообразно.

При $a/(2q) < 1$ $\gamma_{T-1} = a/(2q)(1 - a/(2q)p/2)$. И $\gamma_{T-1} < 0$ при $2/p < a/(2q) < 1$. Если это неравенство не выполнено, то $0 < \gamma_{T-1} < 1$ и целесообразно использование ресурса при любом его количестве. Так, при $p = 2$ и $a/(2q) = 0{,}8$ имеем $\gamma_{T-1} = 0{,}16$, т.е. в году $(T - 1)$ следует использовать 16% имеющегося ресурса.

При $a/(2q) \geq 1$ $\gamma_T = 1$ и $\gamma_{T-1} = a(1 - p)/(2q) + p/2$. Условие $\gamma_{T-1} < 0$ выполнено при $a/(2q) \geq p/(2p - 2)$. При $a/(2q) \geq 1$ прибыль за один год составляет монотонно возрастающую функцию использованного в этом году ресурса, и даже в этом случае при соответствующих значениях $a/(2q)$ и p в предпоследний год целесообразно использование значительной части ресурса независимо от его количества. Например, $p = 1{,}2$ и $a/(2q) = 1{,}5$ эта часть, т.е. γ_{T-1}, составляет 30%.

Действительно, в этом варианте суммарная прибыль за последние два года составит $((0{,}3a - 0{,}09q) + 0{,}84(a - q))R_{T-1} = (1{,}14a - 0{,}93q)R_{T-1} = 2{,}49qR_{T-1}$. А при нулевом использовании ресурса в предпоследнем году и его полном использовании в последнем году прибыль за два последних года составит только $1{,}2(a - q)R_{T-1} = 2{,}40qR_{T-1}$. Далее, прибыль за год T–1 равна $\lambda_{T-1}R_{T-1}$, где $\lambda_{T-1} = \gamma_{T-1}(a - \gamma_{T-1}q)$, что следует из формулы (1) для произвольного года при подстановке $\gamma_{T-1}R_{T-1}$ вместо $\gamma_t R_t$.

Итак, мы получили, что и оптимальный годовой объем использования ресурса и прибыль за каждый год при оптимальном плане использования ресурса в расчете на максимум прибыли за два оставшихся года линейно зависят от количества ресурса в начале каждого года.

При наличии дополнительных затрат $k(R - x)$ функция годовой прибыли приобретает вид

$$z(x, R) = ax - (q/R)x^2 - k(R - x). \tag{2}$$

Рассуждая, как и ранее, получим:

$$\gamma_T = \min(1, (a + k)/(2q)),\ \lambda_T = \gamma_T(a - \gamma_T q) - k(1 - \gamma_T),$$
$$\gamma_{T-1} = \min(1, [(a + k)(1 - p\gamma_T) + qp\gamma_T^2 + k(1 + p)] /(2q)) \text{ и}$$
$$\lambda_{T-1} = \gamma_{T-1}(a - \gamma_{T-1} q) - k(1 - \gamma_{T-1}).$$

Теперь при вычислении γ_{T-1} операцию взятия min в общем случае исключить нельзя. Другими словами, возможно $\gamma_{T-1} = 1$, что означает полное использование ресурса в году T–1 (или еще раньше). Однако в любом случае при оптимальном выборе количества ресурса, реализуемого в году T–1, это количество x^*_{T-1} и прибыль года T–1 остаются линейными функциями R_{T-1}.

Используя метод математической индукции, докажем, что эта *линейная* зависимость оптимального годового количества используемого ресурса и годовой прибыли от количества ресурса в начале года сохраняется для любого числа лет при максимизации суммарной прибыли за все оставшиеся годы.

Итак, пусть это утверждение верно для лет с номерами $s, \ldots, T$. Нам нужно доказать, что это утверждение верно и для всех оставшихся лет, начиная с s–1. Тогда будет доказано, что это утверждение верно для любого года, так как для последнего (да и предпоследнего года) это утверждение уже доказано.

Наше предположение означает, что $Z_s = \lambda_s R_s + \lambda_{s+1}R_{s+1} + \ldots + \lambda_T R_T$, $x^*_i = \gamma_i R_i$ $\forall s \leq i \leq T$. Тогда суммарная прибыль за оставшиеся годы, начиная с года $s - 1$, составит

$$Z_{s-1} = ax_{s-1} - (q/R_{s-1})x_{s-1}^2 - k(R_{s-1} - x_{s-1}) + \lambda_s R_s + \ldots + \lambda_T R_T.$$

Поскольку $\forall R_i$ при $i > s - 1$ значение $R_{i+1} = p(R_i - x_i) = p(1 - \gamma_i)R_i$, то

$$Z_{s-1} = ax_{s-1} - (q/R_{s-1})x_{s-1}^2 - k(R_{s-1} - x_{s-1}) + R_s\{\lambda_s + \lambda_{s+1}p(1 - \gamma_s) + \lambda_{s+2}p^2(1 - \gamma_s)(1 - \gamma_{s+1}) + \\ + \ldots + \lambda_T p^{T-s}(1 - \gamma_s)\ldots(1 - \gamma_{T-1})\}.$$

Обозначив выражение в фигурных скобках через D_{s-1}, получим

$$D_{s-1} = \lambda_s + \lambda_{s+1}p(1 - \gamma_s) + \lambda_{s+2}p^2(1 - \gamma_s)(1 - \gamma_{s+1}) + \ldots + \lambda_T p^{T-s}(1 - \gamma_s)(1 - \gamma_{s+1})\ldots(1 - \gamma_{T-1}), \quad (3)$$

$$Z_{s-1} = ax_{s-1} - (q/R_{s-1})x_{s-1}^2 - k(R_{s-1} - x_{s-1}) + p(R_{s-1} - x_{s-1})D_{s-1}.$$

Максимум Z_{s-1} достигается при $x^*_{s-1} = (a + k - pD_{s-1})R_{s-1}/(2q)$, или $x^*_{s-1} = \gamma_{s-1}R_{s-1}$,

$$\gamma_{s-1} = (a + k - pD_{s-1})/(2q). \quad (4)$$

В соответствии с (2) $z_{s-1} = (\gamma_{s-1}(a - \gamma_{s-1}q) - k(1 - \gamma_{s-1}))R_{s-1} = \lambda_{s-1}R_{s-1}$, где

$$\lambda_{s-1} = \gamma_{s-1}(a - \gamma_{s-1}q) - k(1 - \gamma_{s-1}), \quad (5)$$

получили, что x^*_{s-1} и z^*_{s-1} также линейно зависят от R_{s-1}, что и требовалось доказать.

Из (3) следует рекуррентное соотношение

$$D_{s-1} = \lambda_s + D_s p(1 - \gamma_s),\ s = T,\ldots,2. \quad (6)$$

В итоге имеем алгоритм для построения оптимального плана реализации ресурса:

1) полагаем $D_T = 0$ и вычисляем $\gamma_T = \min(1, (a + k)/(2q))$, $\lambda_T = \gamma_T(a - \gamma_T q) - k(1 - \gamma_T)$;

2) последовательно применяя формулы (6), (4), (5), вычисляем D_{T-1}, γ_{T-1}, λ_{T-1};

3) аналогично находим все D_i, γ_i и λ_i для $1 \le i < T - 1$, начиная с $i = T - 2$. На каждом шаге запоминаем γ_i, λ_i и последнее из вычисленных D_i;

4) обратным разворотом, используя заданное R_1 и вычисленные γ_i и λ_i, последовательно определяем все x^*_i, R^*_{i+1} и z^*_i $(i = 1,\ldots, T)$.

Естественно, при получении нецелых значений x^*_i они должны округляться до целых. Суммарную прибыль получим, суммируя все z^*_i. Если сравниваемые проекты отличаются только величиной начального ресурса R_1, следует использовать найденные γ_i и λ_i и для второго проекта. После расчета переменной части прибыли можно вычислить все необходимые величины для сравнения проектов по общепринятым методикам. Определяемая по формуле (4), величина γ_s на некотором шаге s может стать меньше нуля. Если это произойдет, она заменяется нулем. Это означает, что в соответствующий год s нет использования ресурса.

Как уже отмечалось, получение $\gamma_s = 1$ означает полное использование ресурса в год s и тем самым окончание реализации проекта.

До сих пор мы допускали, что на любом этапе может оставаться любое количество ресурса. Если же требуется оставлять не менее заданной величины R_{min}, может оказаться, что начального ресурса R_1 недостаточно. Необходимое R_1 можно рассчитать, используя соотношение $R_i = R_1 p^{i-1} \prod\limits_{j=1}^{j=i-1}(1 - \gamma_j)$, где i – номер года, на котором получилось $R_i < R_{min}$. Заменяя R_i на R_{min}, из этого соотношения находим необходимое значение начального ресурса R_1.

Возвращаясь к вопросу о влиянии постоянной составляющей ежегодных затрат, отметим следующую корректировку алгоритма.

1. При обратном развороте после вычисления на очередном этапе с номером i величин R_i и $z_i = \lambda_i R_i$, соответствующих оптимальному плану, вычитаем из z_i постоянную составляющую годовых затрат.

2. Если полученная разность (годовая прибыль) положительна, переходим к следующему этапу. В противном случае можно увеличить реализацию, т.е. увеличить γ_{i-1} и, соответственно, прибыль до требуемого размера. Однако при такой корректировке оптимальной траектории возможно досрочное исчерпание ресурса, что не соответствует оптимуму. Поэтому представляется

предпочтительным при возникновении подобной ситуации с недопустимо малой прибылью уменьшить использование ресурса в предшествующие годы, рассматривая их последовательно, или вообще отказаться от использования ресурса в году i, т.е. принять $\gamma_{i-1} = 0$ и тем самым перейти в состояние следующего этапа с бо́льшим ресурсом $R_i' > R_i$.

3. После корректировки состояния R_i процесс в обратном направлении продолжается с вычисленными ранее величинами γ_j и λ_j ($j = i,\ldots, T$). Эти величины для оптимальной траектории не зависят от количества ресурса на данном шаге, они зависят только от номера шага.

В итоге рассмотрения моделей целевой функции можно констатировать:

– в данной задаче метод динамического программирования можно использовать не как метод пошагового поиска оптимальной траектории с анализом всех промежуточных состояний, но как метод анализа задачи и построения алгоритма, который сводится к последовательному вычислению оптимальных пошаговых решений по готовым формулам;

– для нелинейных целевых функций оптимальная траектория (план) может в некоторые годы диктовать отсутствие использования ресурса или, напротив, – полное использование ресурса досрочно. Все зависит от параметров модели.

Описанный прием не универсальный, но может быть полезен и для более сложных аналитических моделей целевой функции.

В общем случае приходится использовать другую реализацию метода динамического программирования.

Например:

1) начиная с первого года и имея R_1 единиц ресурса, рассматриваем все возможные количества его использования $x_{min} \le x_1 \le R_1$ или $x_1 = 0$. Для каждого из них вычисляем и запоминаем ответствующие значения целевой функции и множество состояний с $R_2 = (R_1 - x_1)p$. Переходы с недопустимо малой прибылью отбраковываются. Тем самым завершается формирование множества состояний после первого года (этапа);

2) аналогично формируем состояния каждого из последующих этапов, вычисляя суммарные значения целевой функции и оставшиеся количества ресурса. Во избежание полного перебора при достижении одного состояния разными путями в соответствии с принципом оптимальности Р. Беллмана оставляем только тот путь, по которому это состояние достигается с бо́льшим значением целевой функции, и запоминаем соответствующее состояние предыдущего этапа;

3) завершив последний этап, имеем оптимальное значение целевой функции и обратным разворотом по цепочке связей, начиная с оптимального конечного состояния R_{T+1}, восстанавливаем оптимальную последовательность состояний и соответствующие количества реализации ресурса на каждом этапе, т.е. в каждом году. В этом алгоритме легко учитывать коэффициенты дисконтирования, постоянные затраты, ограничения на минимальную годовую прибыль и на остающийся в каждом году ресурс. Однако реализация этой классической схемы неэффективна из-за отмеченных выше вычислительных трудностей при использовании общедоступных компьютеров. В этой связи рассмотрим более эффективный алгоритм.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОЖЕСТВ ПАРЕТО

Предположим, что зависимости $d(x)$ и $c(x,R)$ заданы более сложными формулами, чем линейная и квадратичная модели, рассмотренные выше, таблично или еще каким-то образом. Важно, что мы можем вычислить прибыль за год при известных x и R, т.е. для заданного состояния (R) и перехода к новому состоянию. Зададимся вопросом, может ли при различных планах использования ресурса через несколько лет от начала планирования получиться так, что для одного состояния ресурса осталось больше, чем для второго, и к тому же прибыль получена больше, чем для второго. Если это так, то, очевидно, второе состояние бесперспективно и его вообще не надо рассматривать при переходе к следующему этапу, так как наличие лишнего ресурса никак не может помешать принятию тех же решений при дальнейших переходах из первого состояния,

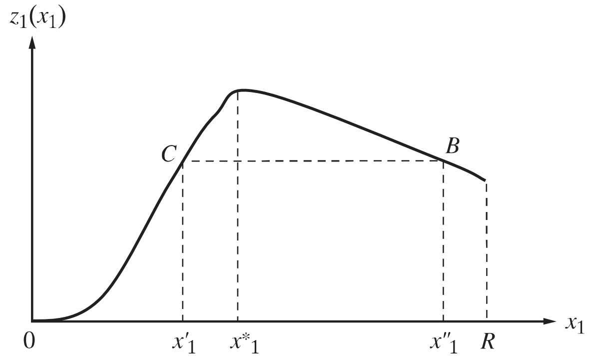

Рис. 3. Доминируемые точки первого шага ($x_1 > x^*_1$).

что и при дальнейшем продвижении из второго состояния. Получается, что второе состояние отстало навсегда. Речь идет о наличии доминируемых (непаретовских) точек во множестве пар чисел (координат точек на плоскости), из которых первое число – это количество оставшегося ресурса, а второе число – это полученная за все предыдущие годы суммарная прибыль. Множество недоминируемых точек называется множеством Парето. Характерно, что для различных функций d(x) и $c(x,R)$ доминируемые точки могут появляться уже после первого этапа, когда из начального состояния R_1 исходят несколько путей и отбраковки, по принципу Р. Беллмана, путей, приводящих в одну точку, еще нет.

Будем считать, что при заданном R_1 принимаемое на первом шаге решение x_1' доминирует над другим таким решением x'', если соответствующая ему точка с координатами $(R_2', z_1(x_1'))$ доминирует над $(R''_2, z_1(x''_1))$, т.е. $R_2' \geq R''_2$ и $z_1(x_1') \geq z_1(x''_1)$). Здесь R_2' – количество ресурса на начало второго года; $z_1(x_1')$ – прибыль, полученная при реализации x_1' единиц ресурса. Аналогичный смысл имеют величины, отмеченные двумя штрихами для значения x_1 (рис. 3).

Если $z(x) = d(x) - c(x,R)$ не является монотонно возрастающей функцией x, то точки, соответствующие участкам убывания ($x_1 > x_1^*$ на рис. 3), являются доминируемыми и соответствующие значения x можно не рассматривать ни на одном из этапов процесса построения оптимального плана.

Для монотонно возрастающей функции $z(x) = d(x) - c(x, R)$ появление доминируемых точек, соответственно, состояний на различных этапах, также вполне возможно. В общем случае можно предположить, что $c(x, R)$ является возрастающей функцией x при фиксированном R и невозрастающей функцией R при фиксированном x. Рассмотрим некоторое состояние R на некотором этапе i и переходы на два следующих этапа из этого состояния, но по разными вариантам. В каждом варианте на двух переходах суммарно реализуется одно и то же количество ресурса x, но в первом варианте при переходе на $i + 1$ этап нет реализации ресурса (сплошная линия на рис. 4), а во втором варианте нет реализации ресурса при переходе от этапа $i + 1$ к $i + 2$ (пунктирная линия).

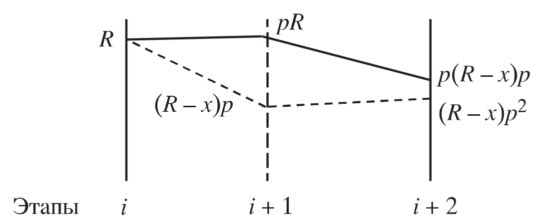

Рис. 4. Пример появления доминируемых состояний

Очевидно, что $(pR - x)p > (R - x)p^2$. Доход $d(x)$ по этим двум вариантам – один и тот же, так как он зависит только от объема используемого ресурса. Поэтому следует сравнить затраты суммарно за два этапа. Полагая, что при отсутствии изъятия ресурса затраты равны нулю, получаем по первому варианту $c_1 = (x, pR)$, а по второму варианту – $c_2 = c(x, R)$, так как по первому варианту изъятие осуществляется при наличии ресурса pR, а по второму – R. Получаем $c_2 \geq c_1$, так как функция затрат $c(x, R)$ является невозрастающей по R при заданном x.

Получается, что по первому варианту получаем бóльший ресурс и бóльшую или равную прибыль, чем по второму варианту. Другими словами, во втором варианте получаем доминируемое состояние, которое следует исключить из дальнейшего рассмотрения.

В реальных задачах следует учитывать также дополнительные условия:

1) нельзя допускать падения ресурса ниже заданного уровня;

2) добыча ресурса планируется количествами, существенно большими, чем единица.

При этих дополнительных условиях также возможно появление доминируемых состояний. Например, начальное состояние 1 тыс. единиц, коэффициент воспроизводства – 1,2, минимальный уровень – 300 единиц, дискрет использования ресурса – 100 единиц. Первый план состоит в том, что в первый и второй годы ресурс не используется, а в третий год из имеющихся 1440 единиц используются 1000 и 440 остаются, второй план состоит в том, что во второй год используются 900 единиц (больше нельзя) и далее в конце третьего года остается только 432 единицы ресурса. Это состояние (432 единицы) может далее не рассматриваться, так как состояние 440 единиц (по первому плану) ему ни в чем не уступает, если получение прибыли от реализации 1000 единиц ресурса в третьем году предпочтительнее прибыли от реализации 900 единиц ресурса во втором году.

Для реализации динамического программирования с использованием множеств Парето предстоит отказаться от ложного стереотипа разбиения регулярной сетки и решать задачу при движении от начального состояния в конечное. Отличие от описанной выше классической схемы состоит в том, что множество состояний формируется в процессе счета.

При анализе каждого перехода из каждого состояния нужно вычислить соответствующий ресурс, получаемый в результате такого перехода, и оценку нового состояния (суммарную прибыль от начала до нового состояния). Если в новое состояние приводит несколько путей, то надо оставить лучший из них (как в классической реализации метода Р. Беллмана), иначе следует проверить, не существует ли таких состояний, которые и по ресурсу, и по целевой функции не хуже полученного. Если такие состояния есть, то рассматриваемый переход исключается, если нет, то, наоборот, нужно проверить, не позволяет ли новое состояние исключить из рассмотрения некоторые из уже сформированных. Другими словами, на каждом этапе должны оставаться только такие состояния, которые образуют множество Парето для двухкритериальной задачи: максимум прибыли при максимуме оставшегося ресурса. Такие паретовские множества сформировать легко, если на каждом шаге упорядочивать состояния по одному из критериев, например по оставшемуся ресурсу. Расчеты показали, что такое динамическое программирование с использованием множеств Парето существенно эффективнее и по памяти, и по объему вычислений, чем классическая реализация метода динамического программирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для практического использования рассмотренных моделей и алгоритмов необходимо исследование реальных процессов и получение соответствующих реальных данных из практики. Речь идет прежде всего о величинах, которые в рассматриваемой постановке задачи являются исходными данными, т.е. количество ресурса на начало периода планирования R_1 и функции дохода $d(x)$ и сопутствующих затрат $c(x, R)$. Если эти функции являются аддитивными, то возможность применения динамического программирования для составления оптимальных планов реализации возобновляемых ресурсов сомнений не вызывает. Эффективные в вычислительном плане программные реализации динамического программирования могут быть получены при использовании множеств Парето на каждом этапе построения оптимального плана.

Заметим, однако, что при выборе в качестве целевой функции экономической эффективности, вычисляемой как отношение суммарной прибыли к суммарным затратам, динамическое программирование применить не удается, так как эта функция не является аддитивной, т.е. не может быть представлена в виде суммы слагаемых, каждое из которых относится к соответствующему этапу. Оптимальный в смысле экономической эффективности план, вообще говоря, не совпадает с планом, дающим максимальную суммарную прибыль. Целесообразность такого плана с меньшей суммарной прибылью неочевидна. Сравнение проектов при оптимальных в смысле суммарной прибыли планах воспроизводства и реализации возобновляемого биоресурса может осуществляться по экономической эффективности. В любом случае план, полученный методом динамического программирования из условия максимума суммарной прибыли, может служить надежной оценкой в практических расчетах и способствовать объективному количественному сравнению и выбору наилучшего проекта организации воспроизводства и реализации возобновляемых биоресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Беллман Р., Дрейфус С. (1965). Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука.

Косоруков О.А., Мищенко А.В. (2003). Исследование операций. М.: Экзамен.

Меншуткин В.В., Кисляков Ю.Я. (1967). Оптимизация режимов рыболовства методом динамического программирования // *Рыбное хозяйство*. № 7. С. 79–81.

Солдатов М.А. (2005). Экономико-математическое моделирование двухпозиционного регулирования оптимального промысла рыбных ресурсов // *Научные труды Дон НТУ. Серия: экономическая*. Вып. 100–1. Донецк. С. 184–190.

Struchenkov V.I. (2010). Dynamic Programming with Pareto Sets // *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* Vol. 4. No. 3. P. 428–430.

REFERENCES (with English translation or transliteration)

Bellman R.E., Dreyfus S.E. (1962). Applied Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press.

Kosorukov O.A., Mishchenko A.V. (2003). Operation Study. Moscow: Ekzamen (in Russian).

Mentushkin V.V., Kislakov Yu.Ya. (1967). Fish Breeding Optimization Using the Method of Dynamic Programming. *Fishery* 7, 79–81 (in Russian).

Soldatov M.A. (2005). Economic – Mathematical Modeling of Optimal Fishing off Control of Fishery Resources. *Proceedings Don NTU. Series: Economic* 100-1, 184–190 (in Russian).

Struchenkov V.I. (2010). Dynamic Programming with Pareto Sets. *Journal of Applied and Industrial Mathematics* 4, 3, 428–430.

Поступила в редакцию
21.06.2015 г.

Mathematical Models and Algorithms for Optimal Planning of Reproduction and Use of Renewable Bioresources

V.I. Struchenkov

We study the problem of optimal planning of the renewable bioresources implementation, namely the commercial breeding of fish and animals. We are studying different models of the objective function, which is the difference between income for the entire planning period and the cost of using the resource, including extraction. The unknowns are the annual volumes of resources used. There may be restrictions on the minimum size of these volumes, as well as restrictions on the minimum amount of a resource that should remain after the end of the reporting period of planning. For the simple linear model it shows that every year except the last, we should use the minimum allowable amount of resources, and in the last year to use the maximum amount of the resource, i.e. to leave for further work specified minimum volume. For the quadratic model based on dynamic programming method we derived new formulas, thus avoiding sorting options step by step solutions. For any additive objective function new efficient algorithms are offered for solving the problem using the Pareto sets.

Keywords: resource, the objective function, the set of states, dynamic programming, the optimal path, Pareto sets.

JEL Classification: C610.