ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2015, том 51, № 3, с. 54–63

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ И ЭФФЕКТИВНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИРОДНЫХ АЛМАЗОВ

© 2015 г. Л.Г. Бабат, А.А. Фридман

(Москва)

Исследуются вложения пар пересекающихся правильных n-мерных симплексов с противоположно направленными внешними нормалями. Симплекс A вложен параллельно в B, если внешние нормали A и B одинаково направлены. Их пары вложены параллельно, если симплексы одной пары параллельно вложены в симплексы другой. С парой связываются $n + 3$ параметра. Сформулирована и доказана теорема: пара A или ее зеркальное отражение параллельно вкладывается в пару B тогда и только тогда, когда параметры A не превосходят параметров B. Теорема применяется для анализа эффективности использования алмазов.

Ключевые слова: внешняя нормаль, звезда, зеркальное отражение, параллельное вложение, правильный симплекс.

Классификация JEL: C60, C69.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алмаз является стратегическим сырьем высочайшей удельной ценности: цена высококачественного алмаза весом в 1 карат (0,2 г) в 1000 раз выше цены 1 карата золота, а цена хорошего бриллианта весом в 1 карат превосходит ее уже в 5–8 тысяч раз. Поэтому важно эффективно использовать алмазы[1]. Особенно актуально это при производстве из высококачественных (наиболее ценных) алмазов круглых бриллиантов (доля круглых бриллиантов в мировом производстве около 85%). Цена алмаза и бриллианта (при прочих равных условиях) растет с увеличением веса, причем при переходе через границы фиксированных весовых интервалов этот рост имеет скачкообразный характер. Отсюда возникает задача получения из высококачественного алмаза круглого бриллианта максимального веса (размера).

При рассмотрении этой задачи удобно использовать следующую терминологию. Вложение одного n-мерного симплекса в другой назовем *параллельным*, если направления внешних нормалей $(n - 1)$-мерных граней вложенного симплекса совпадают с направлениями внешних нормалей $(n - 1)$-мерных граней объемлющего. Под *n-мерной звездой* будем понимать пару правильных n-мерных симплексов, которые имеют общую точку и расположены относительно друг друга так, что направления внешних нормалей $(n - 1)$-мерных граней одного симплекса противоположны направлениям внешних нормалей $(n - 1)$-мерных граней другого. Пересечение симплексов звезды назовем ее *ядром*. Вложение звезды $\{A; B\}$ в звезду $\{E; F\}$ договоримся считать *параллельным*, если один из симплексов A или B параллельно вложен в E, а другой – в F.

Высококачественным считается алмаз, имеющий форму восьмигранника, который можно получить из правильного октаэдра (идеального кристалла алмаза), смещая плоскости его граней параллельно самим себе. Заметим, что правильный октаэдр можно вложить в куб так, что его вершины станут центрами граней куба. При этом октаэдр будет пересечением двух симметричных относительно центра куба правильных тетраэдров, ребра которых служат диагоналями граней куба, т.е. правильный октаэдр – это ядро 3-мерной звезды. Это означает, что любой высококачественный алмаз представляет собой ядро 3-мерной звезды.

[1] Актуальность проблемы усиливается тем, что месторождения алмазов редки, в последние 30 лет не было открыто ни одного крупного месторождения алмазов (Фридман, 2011).

Если бриллиант можно получить из алмаза, то этот бриллиант вкладывается в алмаз. Представим себе, что бриллиант D вложен в высококачественный алмаз, т.е. в ядро $A \cap B$ 3-мерной звезды $\{A; B\}$, где A и B – составляющие ее симплексы. Подвинем каждую из граней симплексов A и B параллельно самой себе до касания с D. Получится меньшая звезда $\{A_D; B_D\}$, параллельно вложенная в $\{A; B\}$. Возникает задача о параллельном вложении (вложимости) одной звезды в другую. Круглый бриллиант – фигура зеркально симметричная. Поэтому с точки зрения получения из ядра звезды $\{A; B\}$ круглого бриллианта D возможности параллельного вложения в $\{A; B\}$ звезды $\{A_D; B_D\}$ или ее зеркального отражения эквивалентны друг другу. Это означает, что задача о параллельном вложении одной звезды в другую превращается в задачу о параллельном вложении с точностью до зеркального отражения.

В работе показывается, что для выяснения возможности параллельного вложения с точностью до зеркального отражения одной n-мерной звезды в другую достаточно сравнить $n + 3$ линейных параметра этих звезд. Важное свойство этих параметров состоит в следующем. В 3-мерном случае, когда ядро звезды – высококачественный алмаз (т.е. восьмигранник), параметры звезды достаточно просто найти, располагая только алмазом (Бабат, Фридман, 2008). Важность данного обстоятельства связана с тем, что на практике всегда имеется только высококачественный алмаз.

Используя линейные параметры звезд, удалось построить алгоритм, который с любой наперед заданной точностью находит для высококачественного алмаза максимальный вложимый в него круглый бриллиант, одновременно определяя возможное положение в алмазе найденного бриллианта (Бабат, 2010). Алгоритм позволяет создать технологический процесс переработки высококачественных алмазов в круглые бриллианты максимальной стоимости. На основе алгоритма удалось разработать метод оценки высококачественных алмазов с точки зрения стоимости получаемых из них бриллиантов (Бабат, 2010).

Первое исследование параметров, позволяющих судить о параллельной вложимости звезд, было проведено в (Бабат, Фридман, 2008). Оно было громоздким и трудно читаемым. Данная работа существенно короче и проще. Авторы благодарят В.П. Гришухина, советы которого позволили изменить структуру статьи, начав с общих многомерных рассмотрений, а не с частных случаев. Это позволило при сохранении идей и схем доказательств сократить объем более чем в два раза. Авторы придают большое значение сокращению и упрощению рассуждений, полагая, что использование введенных параметров займет свое место в математических подходах к алмазной тематике.

2. ПОРОЖДАЮЩИЕ НАБОРЫ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В определении звезды используются внешние нормали граней составляющих ее симплексов. Это означает, что данные симплексы по умолчанию предполагаются невырожденными (отличными от точки). Однако дальнейшие рассмотрения становятся проще и нагляднее, если такие ситуации не исключать. В связи с этим дадим более общее определение звезды, при котором звезды, заданные прежним определением, будут представлять собой частные случаи более общего понятия.

Определение 1. Векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ назовем *положительно коллинеарными* (соответственно *отрицательно коллинеарными*), если $\vec{A} = c\vec{B}$, где $c > 0$ (соответственно $c < 0$).

Напомним, что евклидовым называется линейное преобразование, сохраняющее скалярное произведение (т.е. углы и расстояния).

Определение 2. В n-мерном пространстве *н-гранью* назовем пару $\{\alpha; \vec{A}\}$, где α – $(n - 1)$-мерная гиперплоскость, а $\vec{A}$ – выходящая из точки этой гиперплоскости ее нормаль. Гиперплоскость α делит пространство на два открытых полупространства: H_{+A} (куда направлен вектор $\vec{A}$) и H_{-A} (откуда этот вектор направлен). Объединение $\alpha \cup H_{-A}$ (замыкание H_{-A}) – это *собственное полупространство* н-грани $\{\alpha; \vec{A}\}$. Результат применения евклидова преобразования E к $\{\alpha; \vec{A}\}$ – это пара $\{E(\alpha); E(\vec{A})\}$. Результат применения E к набору (упорядоченному набору) н-граней – это набор (упорядоченный) результатов применения E к н-граням этого набора.

Лемма 1. *Пусть* $\{\alpha; \vec{A}\}$ *– н-грань,* $\{\beta; \vec{B}\}$ *– ее параллельный сдвиг на вектор положительно коллинеарный вектору* $d \times (\vec{A}/|\vec{A}|)$. *Предположим, что* P_A и P_B *– собственные полупространства н-граней* $\{\alpha; \vec{A}\}$ и $\{\beta; \vec{B}\}$. *Тогда* $\vec{A}$ *и* $\vec{B}$ положительно коллинеарны, *а расстояние между* α *и* β *равно* $|d|$, *причем* $\alpha \subset P_B \setminus \beta$ *при* $d > 0$, $\alpha = \beta$ *при* $d = 0$, $\beta \subset P_A \setminus \alpha$ *при* $d < 0$.

Лемма 2. *Если* $\{\alpha; \vec{A}\}$ *и* $\{\beta; \vec{A}\}$ *– н-грани,* P_A и P_B *– их собственные полупространства, то* $P_A \subseteq P_B$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{A}$ *и* $\vec{B}$ *положительно коллинеарны, а* $\alpha \subset P_B$. *При этом* $P_A = (P_B \setminus L) \cup \alpha$, *где* L *– замкнутый слой пространства, ограниченный плоскостями* α *и* β.

Лемма 3. *Пусть* $\{\alpha; \vec{A}\}$ и $\{\beta; \vec{B}\}$ *– н-грани,* P_A *и* P_B *– их собственные полупространства. Если* $\vec{A}$ *и* $\vec{B}$ *отрицательно коллинеарны, то* $P_A \cap P_B \neq \varnothing$ *тогда и только тогда*, *когда* $\alpha \subset P_B$, *а* $\beta \subset P_A$, *причем в этом случае* $P_A \cap P_B$ *– это замкнутый слой пространства, ограниченный плоскостями* α *и* β.

Определение 3. Назовем н-грани *родственными*, если их векторы положительно коллинеарны. Скажем, что н-грани *эквивалентны*, если они родственны и их гиперплоскости совпадают.

Определение 4. Упорядоченные наборы н-граней назовем *родственными* (соответственно *эквивалентными*), если эти наборы имеют одинаковую длину и при этом н-грани одного набора родственны (соответственно эквивалентны) стоящим на тех же местах н-граням другого набора. Неупорядоченные наборы н-граней назовем *родственными* (соответственно *эквивалентными*), если их можно упорядочить так, что получившиеся упорядоченные наборы будут родственны (соответственно эквивалентны).

Определение 5. Пусть M – выпуклый n-мерный многогранник, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ – его $(n-1)$-мерные грани, а $\vec{N}_1, \ldots, \vec{N}_k$ – их внешние нормали. Предположим, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – $(n-1)$-мерные гиперплоскости, содержащие $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Наборы н-граней, эквивалентные набору $\{\{\alpha_1; \vec{N}_1\}, \ldots, \{\alpha_k; \vec{N}_k\}\}$, назовем *порождающими наборами* многогранника M.

Определение 6. Набор U н-граней назовем n-мерным *с-набором*, если: а) U родствен порождающему набору n-мерного правильного симплекса; б) пересечение собственных полупространств н-граней U непусто.

Из леммы 2 вытекает: собственные полупространства н-граней совпадают тогда и только тогда, когда н-грани эквивалентны. Ввиду основного свойства выпуклых многогранников это означает, что выпуклый многогранник является пересечением собственных полупространств н-граней своего порождающего набора. Пользуясь данным обстоятельством, обобщим приведенное во введении понятие звезды, позволив составляющим звезду симплексам быть точками.

Определение 7. Назовем *n-мерной звездой* пару $\{A; B\}$ n-мерных с-наборов, удовлетворяющую двум условиям: а) пересечение собственных полупространств н-граней из $A \cup B$ непусто; б) для каждой н-грани $\{\gamma_A; \vec{N}_A\} \in A$ имеется н-грань $\{\gamma_B; \vec{N}_B\} \in B$ такая, что $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ отрицательно коллинеарны.

Чтобы интерпретировать звезды как пары наборов н-граней, зададим понятие параллельного вложения одного набора н-граней в другой.

Определение 8. Скажем, что упорядоченный набор U н-граней n-мерного пространства *параллельно вложен* в упорядоченный набор W н-граней этого пространства (обозначение $U \Rightarrow W$), если эти наборы имеют одинаковую длину и при этом собственное полупространство любой н-грани из U принадлежит собственному полупространству стоящей на том же месте н-грани из W. Скажем, что неупорядоченный набор H н-граней n-мерного пространства *параллельно вложен* в неупорядоченный набор F н-граней этого пространства (обозначение $H \Rightarrow F$), если эти наборы можно упорядочить так, что упорядоченный набор, получившийся из H, будет параллельно вложен в упорядоченный набор, получившийся из F.

Объединяя леммы 2 и 1, видим, что невырожденный симплекс A^* параллельно вложен в невырожденный симплекс B^* тогда и только тогда, когда порождающий набор симплекса A^* параллельно вложен в порождающий набор симплекса B^*. Поэтому определение параллельного вложения звезд, рассматриваемых как пары наборов н-граней, является обобщением одноименного понятия, приведенного во введении.

Определение 9. Скажем, что звезда $\{A; B\}$ *параллельно вложена* в звезду $\{E; F\}$, если: а) эти звезды имеют одинаковую размерность; б) один из наборов A или B параллельно вложен в E, а другой – в F. Звезда $\{A; B\}$ *параллельно вкладывается* в звезду $\{E; F\}$, если имеется комбинация U поворота и параллельного переноса такая, что звезда $\{U(A); U(B)\}$ параллельно вложена в $\{E; F\}$.

Из лемм 1, 2 вытекает следующее утверждение о правильных симплексах.

Лемма 4. *Выделим в порождающем наборе U правильного n-мерного симплекса H высоты h н-грань $\{\alpha; \vec{A}\}$. Пусть V – вершина H, не лежащая на α, а $\{\beta; \vec{B}\}$ – сдвиг н-грани $\{\alpha; \vec{A}\}$ на вектор $d\ (\vec{A}/|\vec{A}|)$. Пусть F – набор, полученный из U заменой $\{\alpha; \vec{A}\}$ на $\{\beta; \vec{A}\}$, а P – пересечение собственных полупространств н-граней F.*

Тогда:

а) *F порождающий набор правильного n-мерного симплекса T высоты $h + d$, причем $U \Rightarrow F$, если $d \geq 0$;*

б) *F порождающий набор правильного n-мерного симплекса T высоты $h - d$, причем $F \Rightarrow U$, если $-h < d < 0$;*

в) *P совпадает с вершиной V, если $d = -h$;*

г) *$P = \varnothing$, если $d < -h$.*

Следствие. n-мерный с-набор либо является порождающим набором невырожденного правильного n-мерного симплекса, либо пересечение собственных полупространств его н-граней состоит из одной точки.

Опираясь на данное следствие, определим высоту с-набора.

Определение 10. Если с-набор F – порождающий набор невырожденного правильного n-мерного симплекса, то положим высоту набора F равной высоте этого симплекса. Иначе положим высоту набора F равной 0.

Пользуясь высотой, свяжем с n-мерной звездой $(n + 3)$-мерный вектор.

Определение 11. *Профилем* n-мерной звезды $\{A; B\}$ назовем вектор $(d_1; \ldots; d_{n+1}; h_1; h_2)$, где $d_1, \ldots, d_{n+1}$ – выписанные в порядке неубывания расстояния между гиперплоскостями тех н-граней из с-наборов M и N, внешние нормали которых отрицательно коллинеарны, а h_1 и h_2 – выписанные в порядке неубывания высоты этих с-наборов.

Замечание 1. Координаты профиля звезды зависимы: $d_1 + \ldots + d_4 = h_1 + h_2$. Однако несмотря на этот факт, могут выполняться некоторые из неравенств $d_i > h_j$, $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, 2$. Такие неравенства могут иметь место, когда какие-то вершины одного симплекса принадлежат другому.

Ясно, что евклидово преобразование переводит n-мерную звезду в n-мерную звезду, не меняя профиля. Это обосновывает корректность формулировки следующей теоремы, доказательство которой – цель настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $\{M_1; N_1\}$ и $\{M_2; N_2\}$ – n-мерные звезды*, а $\{M_1^*; N_1^*\}$ *– зеркальное отражение $\{M_1; N_1\}$. Чтобы, по крайней мере, одна из звезд $\{M_1; N_1\}$ или $\{M_1^*; N_1^*\}$ параллельно вкладывалась в $\{M_2; N_2\}$, необходимо и достаточно, чтобы координата k профиля $\{M_1; N_1\}$ не превосходила координату k профиля $\{M_2; N_2\}$, $k = 1, \ldots, n + 3$.*

3. ОРЗВЕЗДЫ

Если совокупность преобразований на множестве геометрических объектов включает зеркальное отражение, то введение ориентации объектов обычно упрощает рассмотрение. Поэтому введем ориентацию звезд.

Определение 1. Результат упорядочивания n-мерного с-набора высоты h назовем *n-мерным орнабором* высоты h. Учитывая определение с-набора, имеем: если $V = \langle v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\rangle$ и $W = \langle w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}\rangle$ – n-мерные орнаборы, а $V^* = \langle \vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n\rangle$ и $W^* =$

$= \langle \vec{W}_1, ..., \vec{W}_n \rangle$ наборы векторов из первых n н-граней этих орнаборов, то V^* и W^* – *базисы n-мерного пространства*. Пусть E – линейное преобразование, переводящее V^* в W^*. Скажем, что ориентации орнаборов V и W *одинаковы*, если $\det(E) > 0$. Если $\det(E) < 0$, скажем, что ориентации орнаборов V и W *различны*.

Замечание 2. Отношение параллельной вложенности для упорядоченных наборов н-граней введено в определении 8, и тем самым оно введено для орнаборов.

Определение 13. Упорядоченную пару $\langle V; W \rangle$ орнаборов назовем n-мерной *орзвездой*, если выполняются два условия: а) существует n-мерная звезда $\{A; B\}$ такая, что орнаборы V и W получаются упорядочиванием соответственно с-наборов A и B; б) векторы н-граней k орнаборов V и W отрицательно коллинеарны, $k = 1, \dots, (n + 1)$. Орзвезду $\langle V; W \rangle$ назовем при этом *наследницей* звезды $\{A; B\}$.

Замечание 3. Согласно определению звезды ее ядро непусто.

Определение 14. *Характеристикой* n-мерной орзвезды $\langle V; W \rangle$ назовем $(n + 3)$-мерный вектор $(q_1;\dots; q_{n+1}; l_V; l_W)$, где q_k – расстояние между гиперплоскостями н-граней k орнаборов V и W, $k = 1, \dots, (n + 1)$, а h_V и h_W – высоты орнаборов V и W.

Замечание 4. Подчеркнем разницу между профилем $(d_1; \dots; d_{n+1}; h_1; h_2)$ звезды $\{A; B\}$ и характеристикой $(q_1; \dots; q_{n+1}; l_V; l_W)$ орзвезды $\langle V; W \rangle$. Напомним, что $d_1; \dots; d_{n+1}$ – это упорядоченные по возрастанию расстояния между гиперплоскостями тех н-граней с-наборов A и B, векторы которых отрицательно коллинеарны. Однако $q_1; \dots; q_{n+1}$ – это расстояния между гиперплоскостями н-граней k орнаборов V и W, т.е. величины, упорядоченные отнюдь не по возрастанию. Аналогично h_1 и h_2 – упорядоченные по возрастанию высоты с-наборов A и B, а l_V и l_W – высоты орнаборов V и W, т.е. величины, опять-таки упорядоченные не по возрастанию.

Пусть E – евклидово преобразование n-мерного пространства, умножающее каждый вектор на –1. Ясно, что $\det(E) = 1$ при четном n и $\det(E) = -1$ при нечетном n. Из этого, учитывая определение орзвезды, получаем лемму.

Лемма 5. *В n-мерной орзвезде $\langle V; W \rangle$ ориентации орнаборов V и W одинаковы при четном n и различны при нечетном.*

Введем следующую операцию над векторами.

Определение 15. Скажем, что подстановка φ *монотонизирует* вектор $\vec{X} = (x_1, \dots, x_k)$, если вектор $\vec{X}_\phi = (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(k)})$ удовлетворяет условиям $x_{\varphi(1)} \le \dots \le x_{\varphi(k)}$. Назовем $\vec{X}_\phi$ *результатом монотонизации* $\vec{X}$. Назовем вектор $\vec{X}$ *монотонным*, если $\vec{X} = \vec{X}_\phi$, т.е. если $x_1 \le \dots \le x_k$.

Лемма 6. *Пусть* $\vec{X} = (x_1, \dots, x_k)$ и $\vec{Y} = (y_1, \dots, y_k)$ – *векторы одинаковой размерности, а* $\vec{X}^*$ и $\vec{Y}^*$ – *результаты их монотонизации. Если* $\vec{X} \le \vec{Y}$, *то* $\vec{X}^* \le \vec{Y}^*$.

Замечание 5. Выражение $\vec{X} \le \vec{Y}$ означает, что размерности этих векторов совпадают, и любая координата вектора $\vec{A}$ не больше стоящей на том же месте координаты вектора $\vec{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ – подстановка, монотонизирующая $\vec{X}$. Так как $\vec{X} \le \vec{Y}$, то

$$(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(k)}) \le (y_{\varphi(1)}, \dots, y_{\varphi(k)}). \tag{1}$$

Пусть p – число инверсий в векторе $(y_{\varphi(1)}, y_{\varphi(2)}, \dots, y_{\varphi(k)})$, т.е. число таких пар $(m; n)$, что $y_{\varphi(m)} > y_{\varphi(n)}$, $\varphi(m) < \varphi(n)$. Докажем лемму индукцией по p.

Если $p = 0$, то φ монотонизирует не только $\vec{X}$, но и $\vec{Y}$, т.е. доказываемое утверждение следует из (1). Если $p > 0$, то найдется m такое, что

$$y_{\varphi(m)} > y_{\varphi(m+1)}. \tag{2}$$

Подстановка φ монотонизирует $\vec{X}$, поэтому $x_{\varphi(m)} > x_{\varphi(m+1)}$. Совместно с (1) и (2) это дает $(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(m)}, x_{\varphi(m+1)}, \dots, x_{\varphi(k)}) \le (y_{\varphi(1)}, \dots, y_{\varphi(m+1)}, y_{\varphi(m)}, \dots, y_{\varphi(k)})$. Но в векторе, стоящем в данном соотношении справа, число инверсий равно $p - 1$. Индукционный переход завершен и лемма доказана. ■

Используя монотонизацию, опишем связь профилей с характеристиками.

Лемма 7. *Если* $(d_1;\ldots;d_{n+1}; h_1; h_2)$ *– профиль звезды, а* $(q_1; \ldots;q_{n+1}; l_V; l_W)$ *– характеристика ее наследницы (определение 13), то векторы* $(d_1; \ldots; d_{n+1})$ *и* $(h_1; h_2)$ *– результаты монотонизации векторов* $(q_1; \ldots; q_{n+1})$ *и* $(l_V; l_W)$.

Введем на орзвездах отношение параллельной вложенности.

Определение 16. Скажем, что орзвезда $\langle M; N\rangle$ *параллельно вложена* в орзвезду $\langle V; W\rangle$, если орнаборы M и N параллельно вложены соответственно в орнаборы V и W. Скажем, что орзвезда $\langle V; W\rangle$ *параллельно вкладывается* в орзвезду $\langle V; W\rangle$, если имеется комбинация U-поворота и параллельного переноса такая, что орзвезда $\langle U(M); U(N)\rangle$ параллельно вложена в $\langle V; W\rangle$.

Лемма 8. *У всякой звезды есть наследница, характеристика которой совпадает с профилем звезды.*

Лемма 9. *Если звезда* $\{A_1; B_1\}$ *параллельно вложена в звезду* $\{A_2; B_2\}$, *то у этих звезд имеются такие наследницы* $\langle V_1;W_1\rangle$ *и* $\langle V_2;W_2\rangle$, *что* $\langle V_1;W_1\rangle$ *параллельно вложена в* $\langle V_2;W_2\rangle$.

Покажем, что теорема 1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\vec{U}_1$ *и* $\vec{U}_2$ *– характеристики орзвезд* $\langle V_1; W_1\rangle$ *и* $\langle V_2; W_2\rangle$. *Чтобы* $\langle V_1; W_1\rangle$ *параллельно вкладывалась в* $\langle V_2; W_2\rangle$, *необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

а) $\vec{U}_1 \le \vec{U}_2$;

б) *ориентации орнаборов* V_1 *и* W_1 *совпадают с ориентациями соответственно орнаборов* V_2 *и* W_2.

Для доказательства теоремы нам потребуются две леммы.

Лемма 10. *Пусть* $\{M_1; N_1\}$ *и* $\{M_2; N_2\}$ *– звезды, а* $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ – их *профили. Если имеет место теорема 2, то возможность параллельно вложить звезду* $\{M_2; N_2\}$ *или ее зеркальное отражение* $\{M_2^*; N_2^*\}$ *в звезду* $\{M_1; N_1\}$ *влечет соотношение* $\vec{P}_2 \le \vec{P}_1$.

Доказательство. Ситуации, когда в $\{M_1; N_1\}$ можно параллельно вложить $\{M_2; N_2\}$ и когда в $\{M_1; N_1\}$ можно параллельно вложить $\{M_2^*; N_2^*\}$, рассматриваются аналогично. Поэтому ограничимся рассмотрением второй ситуации. Из того, что евклидово преобразование переводит n-мерную звезду в n-мерную звезду, не меняя профиля, следует: $\vec{P}_2$ – профиль звезды $\{M_2^*; N_2^*\}$. В силу леммы 9, у звезд $\{M_1; N_1\}$ и $\{M_2^*; N_2^*\}$ имеются наследницы $\langle V_1; W_1\rangle$ и $\langle V_2; W_2\rangle$, где $\langle V_1;W_1\rangle$ параллельно вложена в $\langle V_2;W_2\rangle$. В силу теоремы 2, характеристики $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ этих наследниц удовлетворяют неравенству $\vec{U}_1 \le \vec{U}_2$. Совместно с леммами 6 и 7 это доказывает лемму. ■

Лемма 11. *Пусть* $\{M_1; N_1\}$ *и* $\{M_2; N_2\}$ *– звезды, а* $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ *– их профили. Если верна теорема 2, то соотношение* $\vec{P}_2 \le \vec{P}_1$ *влечет возможность параллельно вложить звезду* $\{M_2; N_2\}$ *или ее зеркальное отражение* $\{M_2^*; N_2^*\}$ *в звезду* $\{M_1; N_1\}$.

Доказательство. Ввиду леммы 8 у звезд $\{M_1; N_1\}$ и $\{M_2; N_2\}$ имеются наследницы $\langle V_1; W_1\rangle$ и $\langle V_2; W_2\rangle$, характеристиками которых являются $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$. Согласно лемме 5 возможны две ситуации. Либо ориентации орнаборов V_1 и W_1 совпадают с ориентациями соответственно орнаборов V_2 и W_2, либо ориентации орнаборов V_1 и W_1 противоположны ориентациям соответственно орнаборов V_2 и W_2. Обе ситуации анализируются аналогично. Поэтому ограничимся анализом второй ситуации. Пусть ориентации орнаборов V_1 и W_1 противоположны ориентациям соответственно орнаборов V_2 и W_2. Для зеркального отражения $\{V_2^*; W_2^*\}$ орзвезды $\langle V_2; W_2\rangle$ имеем: $\{V_2^*; W_2^*\}$ – наследница $\{M_2^*; N_2^*\}$, причем $\vec{P}_2$ – ее характеристика. Зеркальное отражение меняет ориентацию, поэтому ориентации орнаборов V_1 и W_1 совпадают с ориентациями соответственно орнаборов V_2^* и W_2^*. Ввиду условия $\vec{P}_2 \le \vec{P}_1$ и теоремы 2 это означает, что $\{V_2^*; W_2^*\}$ параллельно вкладывается в $\langle V_1; W_1\rangle$. Следовательно, $\{M_2^*; N_2^*\}$ параллельно вкладывается в $\{M_1; N_1\}$. ■

Объединяя леммы 10 и 11, получаем, что теорема 1 вытекает из теоремы 2. Необходимость условий теоремы 2 следует из определения характеристики орзвезды (определение 14). Доказательству достаточности условий теоремы 2 посвящен разд. 4.

4. ДОСТАТОЧНОСТЬ УСЛОВИЙ ТЕОРЕМЫ 2

Определение 17. Пусть $A = \langle\{\alpha_1; \vec{A}_1\},\ldots,\{\alpha_{n+1}; \vec{A}_{n+1}\}\rangle$ – n-мерный орнабор, а P – точка из пересечения собственных полупространств его н-граней. *Следом* точки P в орнаборе A назовем вектор $(q_1; \ldots; q_{n+1})$, где q_j – расстояние от P до гиперплоскости α_j, $j = 1, \ldots, n + 1$.

Лемма 12. *Пусть A – n-мерный орнабор высоты h; P – точка из пересечения собственных полупространств его н-граней. Если $(q_1; \ldots; q_{n+1})$ – след точки P в орнаборе A, то $q_1 + \ldots + q_{n+1} = h$.*

Доказательство. Если $h = 0$, то лемма очевидна. Пусть $h > 0$. В этом случае P – точка правильного n-мерного симплекса T высоты h. Обозначим $(n-1)$-мерные грани симплекса T как $F_1, \ldots F_{n+1}$. Заметим, что P порождает разбиение T на $n + 1$ симплекс $T_1, \ldots, T_{n+1}$, где вершиной T_j является P, а основанием F_j, $j = 1, \ldots, n + 1$. Высота T_j равна q_j, $j = 1, \ldots, n + 1$. Пусть V – объем $(n-1)$-мерной грани T. Тогда объем W симплекса T и объем W_j симплекса T_j равны: $W = (hV)/n$, $W_j = (q_jV)/n$, $j = 1, \ldots, n + 1$. Совместно с равенством $W = W_1 + \ldots + W_{n+1}$ это дает доказываемое утверждение. ■

Распространим данное во введении понятие ядра звезды на орзвезды.

Определение 18. *Ядром* орзвезды $\langle V; W\rangle$ назовем пересечение собственных полупространств н-граней из $V \cup W$.

Из лемм 3 и 12 можно установить важное свойство ядер орзвезд.

Лемма 13. *Пусть P – точка из ядра n-мерной орзвезды $\langle V; W\rangle$, а $(v_1;\ldots; v_{n+1})$ и $(w_1;\ldots;w_{n+1})$ – следы точки P в орнаборах V и W. Если $(q_1;\ldots; q_{n+1}; h_v; h_w)$ – характеристика орзвезды $\langle V; W\rangle$, то $q_k = v_k + w_k$, $k = 1, \ldots, n + 1$, $h_v = v_1 + \ldots + v_{n+1}$, $h_w = w_1 + \ldots + w_{n+1}$.*

С помощью понятий ядра и следа сформулируем и обоснуем признак параллельной вложимости орзвезд.

Лемма 14. *Пусть в n-мерных орзвездах $\langle V_1; W_1\rangle$ и $\langle V_2; W_2\rangle$ ориентации орнаборов V_1 и W_1 совпадают с ориентациями соответственно орнаборов V_2 и W_2. Предположим, что P_j – точка из ядра орзвезды $\langle V_j; W_j\rangle$, $j = 1, 2$. Рассмотрим следы $(v_1^j; ...; v_{n+1}^j)$ и $(w_1^j; ...; w_{n+1}^j)$ точки P_j в орнаборах V_j и W_j, $j = 1, 2$. Если*

$$(v_1^1; ...; v_{n+1}^1) \le (v_1^2; ...; v_{n+1}^2), \quad (w_1^1; ...; w_{n+1}^1) \le (w_1^2; ...; w_{n+1}^2), \tag{3}$$

то существует такая комбинация E поворота и параллельного переноса, что $\langle E(V_1); E(W_1)\rangle$ – орзвезда, параллельно вложенная в орзвезду $\langle V_2; W_2\rangle$, причем $E(P_1) = P_2$.

Доказательство. Пусть $V_j = \langle\{\alpha_1^j; \overrightarrow{A_1^j}\}; ...; \{\alpha_{n+1}^j; \overrightarrow{A_{n+1}^j}\}\rangle$, $W_j = \langle\{\beta_1^j; \overrightarrow{B_1^j}\}; ...; \{\beta_{n+1}^j; \overrightarrow{B_{n+1}^j}\}\rangle$, $j = 1, 2$. Из определения орзвезды следует, что

$$\overrightarrow{A_k^j} \text{ отрицательно коллинеарен } \overrightarrow{B_k^j},\ k = 1, \ldots, n + 1, j = 1, 2. \tag{4}$$

Из определения звезды, орзвезды и с-набора (определения 13, 7 и 6) вытекает, что V_1 и V_2 родственны порождающим наборам правильных n-мерных симплексов. Причем согласно условию доказываемой леммы данные симплексы ориентированы одинаково. А один из двух одинаково ориентированных правильных симплексов всегда можно повернуть так, что его внешние нормали будут положительно коллинеарны внешним нормалям другого симплекса. Это означает, что существует такой поворот R, что

$$R(V_1) \text{ родствен } V_2. \tag{5}$$

Ввиду (4) из данного обстоятельства вытекает, что

$$R(W_1) \text{ родствен } W_2. \tag{6}$$

Рассмотрим параллельный перенос F, переводящий P_1 в P_2. Из (3), (5) и (6) следует, что орзвезда $\langle F(R(V_1)); \langle F(R(W_1))\rangle$ будет параллельно вложена в орзвезду $\langle V_2; W_2\rangle$. Это означает, что в качестве E можно взять суперпозицию $F \circ R$. ■

Замечание 6. Данная лемма сводит обоснование достаточности условий теоремы 2 к следующему: в условиях данной теоремы в ядрах орзвезд $\langle V_1; W_1\rangle$ и $\langle V_2; W_2\rangle$ имеются точки P_1 и P_2 такие, что следы P_2 в наборах V_2 и W_2 не меньше следов P_1 в наборах V_1 и W_1.

Чтобы установить наличие таких точек, потребуется доказать следующую лемму.

Лемма 15. *Пусть $(q_1;\ldots; q_{n+1}; h_v; h_w)$ – характеристика n-мерной орзвезды $\langle V; W\rangle$. Сдвинем н-грань j набора V (соответственно W) на вектор длины d, отрицательно коллинеарный вектору входящему в эту н-грань, и обозначим получившийся набор как V_j (соответственно, как W_j), $j = 1, \ldots, n + 1$. Тогда из неравенства $d \le \min(q_j; h_v)$ (соответственно $d \le \min(q_j; h_w)$) следует, что $\langle V_j; W\rangle$ (соответственно $\langle V; W_j\rangle$) – орзвезда, $j = 1, \ldots, n + 1$.*

Доказательство. Для $\langle V_j; W\rangle$ и $\langle V; W_j\rangle$ доказательства аналогичны. Поэтому ограничимся обоснованием леммы для пары $\langle V_j; W\rangle$. Пусть $V = \langle\{\alpha_1; \vec{A}_1\}, \ldots, \{\alpha_{n+1}; \overrightarrow{A_{n+1}}\}\rangle$, $W =\langle\{\beta_1; \vec{B}_1\}, \ldots, \{\beta_{n+1}; \overrightarrow{B_{n+1}}\}\rangle$. Ситуации, связанные со сдвигом различных н-граней, аналогичны. Поэтому ограничимся анализом сдвига н-грани $\{\alpha_1; \vec{A}_1\}$. Учитывая лемму 4 и условие $d \le \min(q_1; h_v)$, видим, что V_1 орнабор, родственный набору V. В соответствии с определением орзвезды это означает, что для обоснования доказываемой леммы надо установить наличие хотя бы одной точки в пересечении собственных полупространств н-граней наборов V_1 и W. Обозначим результат сдвига н-грани $\{\alpha_1; \vec{A}_1\}$ как $\{\gamma; \vec{G}\}$. Пусть Q – собственное полупространство н-грани $\{\gamma; \vec{G}\}$, а P_V^j и P_W^j – собственные полупространства н-граней $\{\alpha_j; \overrightarrow{A_j}\}$ и $\{\beta_j; \overrightarrow{B_j}\}$, $j = 1,\ldots,n + 1$. Исходя из определений орзвезды, звезды и с-набора (определения 13, 7 и 6), получаем, что V и W родственны порождающим наборам правильных n-мерных симплексов. Это означает, что имеются точки $T_V = \alpha_2 \cap\ldots\cap \alpha_{n+1}$ и $T_W = \beta_2 \cap \ldots \cap \beta_{n+1}$. Сопоставляя условия (а) в определениях орзвезды и звезды (определения 13 и 7) с леммой 3, имеем:

$$T_V \in P_W^2 \cap \ldots \cap P_W^{n+1}, \quad T_W \in P_V^2 \cap \ldots \cap P_V^{n+1}. \tag{7}$$

Возможны две ситуации:

$$T_V \in P_W^1 \text{ или } T_V \notin P_W^1. \tag{8}$$

Из условия $d \le \min(q_1; h_v)$ вытекает, что в первой ситуации $d \le h_v$. Сопоставляя данное неравенство с леммами 1 и 2, получаем, что $T_V \in Q$. Совместно с первым из условий (7) это показывает, что в первой ситуации из (8) пересечению собственных полупространств н-граней наборов V_1 и W принадлежит точка T_V.

Перейдем к анализу второй ситуации из (8). Из условия $d \le \min(q_1; h_v)$ вытекает, что в анализируемой ситуации $h \le q_1$. Совместно с леммой 3 это означает, что

$$\beta_1 \subset Q. \tag{9}$$

Согласно (7) отрезок $T_V T_W \subset (P_W^2 \cap \ldots \cap P_W^{n+1}) \cap (P_V^2 \cap \ldots \cap P_V^{n+1})$. Вместе с предположением $T_V \notin P_W^1$ и (9) это означает, что отрезок $T_V T_W$ пересекает плоскость β_1, причем точка их пересечения принадлежит пересечению собственных полупространств н-граней наборов V_1 и W. Следовательно, пересечение собственных полупространств н-граней наборов V_1 и W непусто в любой из ситуаций (9). ■

Непосредственно из определения ядра и характеристики орзвезды вытекает, что между орзвездами из условия данной леммы имеются следующие связи.

Лемма 16. *В условиях леммы 15 любая точка ядра орзвезды $\langle V_j; W\rangle$ (соответственно $\langle V; W_j\rangle$) принадлежит ядру орзвезды $\langle V; W\rangle$ и при этом ее расстояние от плоскости, входящей в н-грань j набора V (соответственно W), больше или равно d, $j = 1, \ldots, n + 1$.*

Установим наличие точек, о которых говорится в замечании 6.

Теорема 3. *Пусть $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ – характеристики орзвезд $\langle V_1;W_1\rangle$ и $\langle V_2;W_2\rangle$, причем ориентации орнаборов V_1 и W_1 совпадают с ориентациями соответственно орнаборов V_2 и W_2. Если $\vec{U}_1 \le \vec{U}_2$, то для любой точки P_1 из ядра $\langle V_1; W_1\rangle$ в ядре $\langle V_2; W_2\rangle$ найдется точка P_2, удовлетворяющая условию: следы точки P_2 в наборах V_2 и W_2 не меньше следов точки P_1 соответственно в наборах V_1 и W_1.*

Доказательство. Предположим, что в орзвезде $\langle V_j; W_j\rangle$

$V_j = \langle \{\alpha_1^j; \overrightarrow{A_1^j}\}; ...; \{\alpha_{n+1}^j; \overrightarrow{A_{n+1}^j}\} \rangle$, $W_j = \langle \{\beta_1^j; \overrightarrow{B_1^j}\}; ...; \{\beta_{n+1}^j; \overrightarrow{B_{n+1}^j}\} \rangle$, $j = 1, 2$.

Пусть характеристика орзвезды $\langle V_j;\ W_j \rangle$ имеет вид $(q_1^j; ...; q_{n+1}^j; h_v^j; h_w^j)$, $j = 1, 2$. По условию доказываемой теоремы

$$(q_1^1; ...; q_{n+1}^1; h_v^1; h_w^1) \le (q_1^2; ...; q_{n+1}^2; h_v^2; h_w^2). \tag{10}$$

Выделим в ядре орзвезды $\langle V_1;\ W_1 \rangle$ какую-либо точку P_1. Предположим, что $(p_1^v; ...; p_{n+1}^v)$ и $(p_1^w; ...; p_{n+1}^w)$ – следы точки P_1 в наборах V_1 и W_1. Из (10) и леммы 13 следует

$$q_j^2 - p_j^v \ge p_j^w, \quad j = 1, ..., n+1, \quad h_v^2 - \sum_{j=1}^{k} p_j^v \ge \sum_{j=k+1}^{n+1} p_j^v,$$

$$h_w^2 - \sum_{j=1}^{k} p_j^w \ge \sum_{j=k+1}^{n+1} p_j^w, \quad k = 1, ..., n. \tag{11}$$

Пусть $\overrightarrow{L_j^v}$ – вектор длины p_j^v, отрицательно коллинеарный вектору $\overrightarrow{A_j^2}$, а $\overrightarrow{L_j^w}$ – вектор длины p_j^w, отрицательно коллинеарный вектору $\overrightarrow{B_j^2}$, $j = 1, \dots, n + 1$. Из (11) и леммы 15 вытекает, если сначала поочередно сдвинуть плоскости $\alpha_1^2, ..., \alpha_{n+1}^2$ на векторы $\overrightarrow{L_1^v}, ..., \overrightarrow{L_{n+1}^v}$, а затем поочередно сдвинуть плоскости $\beta_1^2; ...; \beta_{n+1}^2$ на векторы $\overrightarrow{L_1^w}, ..., \overrightarrow{L_{n+1}^w}$, то полученный в результате таких сдвигов объект будет орзвездой. Обозначим эту орзвезду как $\langle V^*;\ W^* \rangle$. Согласно лемме 16 ядро орзвезды $\langle V^*;\ W^* \rangle$ принадлежит ядру орзвезды $\langle V_2;\ W_2 \rangle$, причем всякая точка этого ядра удалена от плоскостей α_j^2 и β_j^2 на расстояния не меньшие соответственно p_j^v и p_j^w, $j = 1, \dots, n + 1$. Следовательно, любую точку ядра орзвезды $\langle V^*;\ W^* \rangle$ можно взять в качестве точки P_2 из условия доказываемой теоремы. Сопоставляя это с тем, что ядро орзвезды по определению непусто, получаем требуемое утверждение. ■

Заметим, что условия теоремы 3 совпадают с условиями теоремы 2. Следовательно, в условиях теоремы 2 для любой точки P_1 из ядра орзвезды $\langle V_1;\ W_1 \rangle$ в ядре орзвезды $\langle V_2;\ W_2 \rangle$ найдется точка P_2, существование которой утверждается в теореме 3. А согласно лемме 14 существование таких точек обеспечивает возможность параллельного вложения $\langle V_1;\ W_1 \rangle$ в $\langle V_2;\ W_2 \rangle$, т.е. условия теоремы 2 достаточны.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Напомним, что высококачественным считается алмаз, имеющий форму восьмигранника, который можно получить из правильного октаэдра (идеального кристалла алмаза), смещая плоскости его граней параллельно самим себе. Овализованным высококачественным алмазом назовем алмаз, который отличается от высококачественного только тем, что некоторые его вершины и ребра могут быть скруглены (сколоты, срезаны). Опираясь на теорему 1, удалось построить алгоритм, находящий с любой, наперед заданной точностью, максимальный круглый бриллиант, вложимый в овализованный высококачественный алмаз, определяя при этом его положение в алмазе. Доля таких алмазов достаточно велика и составляет около 30% добываемых качественных ювелирных алмазов.

С помощью теоремы 1 было показано, что форма высококачественного алмаза (соотношение координат профиля) влияет на стоимость получаемых из него круглых бриллиантов не меньше, чем вес алмаза (фактор, на котором основывались вековые стереотипы оценки алмазов). Эти стереотипы оказались неверны. Более того, ситуация, когда вес октаэдрического алмаза A больше веса октаэдрического алмаза B, а вес максимального круглого бриллианта, который можно получить из B, равен (или даже больше) весу максимального круглого бриллианта, который можно получить из A, является типовой (Бабат, 2008). Данный факт поразил специалистов. Одна из причин – сложившееся представление, что обработка и оценка алмазов основаны исключительно на человеческой интуиции и передаваемом из поколения в поколение индивидуальном опыте.

Отметим, что алмазная тематика мало исследована, хотя здесь немало трудных и нерешенных задач. Например, совершенно не исследованы вопросы, связанные с учетом посторонних включений в алмазы. Одна из целей этой статьи – привлечь внимание к таким вопросам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бабат Л.Г. (2008). Исследование стереотипов стоимостной оценки алмазов. М.: ЦЭМИ РАН.

Бабат Л.Г. (2010). Октаэдрические алмазы и ε-оптимальные круглые бриллианты. М.: ЦЭМИ РАН.

Бабат Л.Г., Фридман А.А. (2008). Параллельные вложения многогранников // *Дискретная математика*. Т. 20. № 2. С. 122–159.

Фридман А.А. (2011). Проблемы эффективного использования природных алмазов: современный контекст // *Экономика и математические методы.* Т. 47. № 3. С. 41–55.

Поступила в редакцию
24.03.2014 г.

Parallel Embedding of Polyhedrons and Efficient Use of Natural Diamonds

L.G. Babat, A.A. Fridman

The embedding of pairs of intersecting proper n-dimensional simplexes is studied. Simplex A is embedded parallel in simplex B if the outer normals of A and B are unidirectional. Their pairs are said to be embedded parallel if one pair simplexes are embedded parallel into another pair simplexes. Each pair is associated with $n + 3$ parameters. Theorem: a pair A or its mirror image is embedded parallel in pair B if and only in case parameters of A do not exceed parameters of B. The theorem is used for the analysis of efficient use of raw diamonds.

Keywords: outer normal, mirror image, star, parallel embedding, regular simplex.

JEL Classification: C60, C69.