
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

**АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ЗАМКНУТОГО
ОДНОТОВАРНОГО РЫНКА ПРИ РАЦИОНАЛЬНОМ
ПРЕДПОЧТЕНИИ УЧАСТНИКОВ***

© 2015 г. М.М. Вороновицкий

(Москва)

В работе сформулирована и исследована модель однотоварного рынка с неизменными количеством денег и товара. В каждый момент времени каждый участник может иметь только один из трех статусов: продавец, покупатель или не участвовать в торговле. Используя лишь информацию о результатах своей торговли в предыдущий момент времени, участники меняют статусы и назначают новые цены. В данной модели рассматривается только рациональное поведение участников и принят более реалистичный механизм рыночной торговли, чем в (Вороновицкий, 2014). Цель исследования – выделить эффекты рационального поведения участников рынка. Основным результатом является сходимость траектории системы к стационарному множеству состояний равновесных, в среднем за некоторый промежуток времени, со средней ценой торговли, близкой к некоторой константе.

Ключевые слова: математическая модель, замкнутый рынок, однотоварный рынок, динамика цен, траектория, стационарное множество, стационарное состояние, рациональный выбор.

Классификация JEL: C51, D01.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современном механизме экономического регулирования огромную роль играют рынки, участники которых могут быть в одни моменты времени покупателями, а в другие – продавцами этого же товара или совсем не участвовать в торговле. Примером подобных рынков являются фондовые биржи. Решения, принимаемые их участниками, определяют несколько логически связанных обменов, направленных на извлечение прибыли за счет разницы в ценах в разные моменты времени. Важная роль таких рынков в функционировании экономики является причиной большого интереса к их исследованию. Особенно большой интерес представляет исследование динамики подобных систем и описание окрестностей равновесных или стационарных состояний.

Скорее всего, первой работой, в которой поведение автономных участников рынка активов моделируется случайным процессом, является статья Ричарда Тополя (Topol, 1991). В ней рассматривается модель финансового рынка, на котором предлагается лишь один актив. Взаимодействие между участниками осуществляется посредством торговли, причем в зависимости от своего положения на рынке каждый участник может быть продавцом или покупателем, характеризующимся в данный момент времени собственной ценой (продажи и покупки), основанной, кроме информации о предыдущей торговле, также на оценке данным агентом фундаментальной ценности (fundamental value) – “агент-эффективной цене”. В каждый момент времени, согласно предположению автора, встречаются какие-то два участника, торгуются, и, если они согласны на некоторую цену, имеет место торговля по этой цене. Правила корректировки агентом своих цен с использованием результатов сделок составляют алгоритм перехода от состояния в данный

* Работа выполнена в Институте проблем рынка РАН и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-06-00110).

момент времени к состоянию в следующий момент времени. Вследствие неопределенности при выборе решения участниками и из-за случайного характера их встреч и торговли поведение участников биржевых торгов моделируется непростым случайным процессом. Анализ модели показывает, что некоторое распределение вероятностей, при котором стадное поведение (подражание, увлечение) оказывается наиболее вероятным, является стационарным для случайного процесса, представляющего динамику этой модели. Главный результат работы Р. Тополя состоит в том, что он показал возможность стадного поведения на бирже, т.е. поведения, когда выбор участников определяется не собственной информацией, а известной каждому участнику информацией о поведении других участников. Немало работ, связанных с исследованием поведения участников биржи, посвящено изучению стадного поведения. Работы (Bikhandany, Hirsheifer, Welch 1992; Banerjee, 1992), в которых была предложена теория информационных каскадов (BHW-модель), стали стимулом для многих попыток использовать эту теорию для изучения финансового рынка (например, работа (Avery, Zemsky, 1998)) и моделирования работы биржи (например, работы Киприани и Гуарино (Cipriani, Guarino, 2001; Cipriani, Gale, Guarino, 2006; Hunter, Wu, 2014)).

В последние годы предпринимались попытки использовать методы теоретической физики для объяснения особенностей процессов, протекающих на биржах (см., например, работы (Kim K., Yoon, Kim Y., 2004; Chen, Liao, 2005; Wei, Huang, Hui, 2013)).

По нашему мнению, наиболее перспективным является подход к исследованию динамики рынка, основанный на формальном описании алгоритма выбора решения отдельным его участником и правил взаимодействия участников, при последующем изучении траектории системы, а также стационарных состояний или стационарных множеств. Этот подход находится в рамках более общей теории агент-ориентированных моделей, представленной в работах (Макаров, 2012; Бахтизин, 2008; Kirman, 2011).

В работе ЛеБарона, Брайена Артура и Ричарда Палмера (LeBaron, Brian, Palmer, 1999) была разработана и исследована агент-ориентированная модель, известная под названием модель “искусственной биржи Санта Фе” (Santa Fe Artificial Stock Market), которая демонстрирует динамику рынка, связанную с процессом обучения участников и индивидуальной оценкой агентами текущего состояния рынка. К сожалению, эта модель трудно поддается аналитическому исследованию, поскольку алгоритмы выбора поведения и взаимодействия участников рынка, может быть, излишне полно имитируют черты реального поведения участников биржи.

Подходу, заключающемуся в исследовании агент-ориентированных моделей, соответствует исследование последовательно усложняющихся моделей, начиная с тех, которые отражают только основные, по нашему мнению, черты рыночного механизма и поведения участников. Изучение таких агент-ориентированных моделей позволяет отразить в модели основные логически оправданные черты взаимодействия агентов и принятия ими решений. Более ранним источником нашего подхода к изучению моделей рынка являются работы И.М. Гельфанда, М.Л. Цетлина и их сотрудников (Цетлин, 1969), в которых изучалось коллективное поведение автоматов. Идеи этих работ были использованы в формулировке и исследовании моделей незамкнутого однотоварного рынка, где рынок представлен как система взаимодействующих автоматов (Вороновицкий, 1974). На незамкнутом рынке на протяжении всего рассматриваемого времени каждый участник является либо только продавцом, либо только покупателем. Цены, запрашиваемые продавцами, или цены, предлагаемые покупателями, как и запасы товара или денег в каждый момент времени, являются переменными модели. Обмены происходят в результате договоренности между каждой парой встретившихся продавцов и покупателей.

Автор доказал, что траектория при любом начальном состоянии за конечное время приходит в окрестность стационарного состояния системы, характеризующегося равновесием спроса и предложения на рынке. Исследованный с помощью этой модели рынок не был замкнутым – в каждую единицу времени на него поступало и с него уходило некоторое количество товара и денег. К сожалению, построить модель замкнутого рынка, отражающего, может быть, краткосрочную, но реальную ситуацию на бирже, оказалось непросто. Тем не менее, в конце концов, удалось сформулировать агент-ориентированную модель замкнутого рынка, т.е. однотоварного рынка, на котором в каждый момент времени имеется не изменяющееся со временем количество товара и также постоянное количество денег (Вороновицкий, 2014).

Участники этого рынка в каждый момент времени могут быть продавцами, покупателями товара или не участвовать в торговле. При этом в следующий момент покупатель может стать или продавцом, или не участвовать в торговле (стать ожидающим). То же относится к продавцам и ожидающим. Используя только собственную информацию о результатах торговли в предыдущий момент времени, участники торговли меняют свой статус и назначают новые цены. Механизм взаимодействия участников в этой модели – тот же, что и в модели незамкнутого однотоварного рынка (Вороновицкий, 1974): в каждое мгновение продавец, согласный продать по наибольшей цене, торгует с покупателем, требующим за товар наименьшую цену. Но выбор требуемой цены продавцами и покупателями здесь, естественно, иной. Кроме того, прогноз средней цены на рынке в следующий момент побуждает покупателей иногда менять свой статус, т.е. становиться в следующий момент продавцами или в течение нескольких моментов времени вообще отказаться от участия в торговле. То же самое относится и к покупателю.

В работе сформулирован простой алгоритм выбора участником в следующий момент времени своей цены и своего статуса (продавец, покупатель, ожидающий). При этом агент использует только собственную информацию о результате торговли в данный момент времени и лишь незначительную часть информации о состоянии рынка в целом, а именно – средние цены товара за несколько предшествовавших моментов времени.

Существуют различные варианты этого алгоритма: рациональный, рискованный и противоположный рациональному выбор статуса и цены (таким, например, является выбор, осуществляемый при стадном поведении участника). Рискованное решение участника включает в себя отклонение от рационального выбора, при котором положение участника может оказаться в следующий момент как лучше, так и хуже, чем при рациональном выборе. Иррациональное решение включает в себя алогичный выбор. В статье высказаны лишь некоторые гипотезы о характере поведения траектории системы, поскольку аналитического изучения хотя бы некоторых свойств траектории модели провести не удалось. Математическая модель была реализована в виде компьютерной программы, с помощью которой исследованы некоторые свойства представленного в таком виде простейшего замкнутого рынка. Основным результатом этой работы – построена формализованная модель взаимодействия между участниками и механизмом принятия индивидуально-го решения участником, что не удавалось сделать в течение долгого времени.

Вероятно, в реальном механизме выбора решений имеют место элементы как рационального, рискованного и иррационального поведения. Исследованию рискованного и иррационального индивидуального выбора участников рынка посвящено немало исследований, выполненных к настоящему времени. Но на пути изучения влияния риска и иррационального индивидуального выбора на поведение коллектива участников сделаны разве что самые первые шаги. Один из путей такого исследования состоит в том, чтобы изучить поведение системы при только рациональном выборе участников, а затем рассмотреть изменения в развитии системы, возникающие вследствие добавления некоторого влияния желания рисковать или иррациональности на индивидуальный выбор. Изучению траектории замкнутого однотоварного рынка при простом рациональном поведении участников и посвящена предлагаемая работа. При этом за основу взята предложенная в предыдущей работе (Вороновицкий, 2014) модель однотоварного замкнутого рынка. Но в данной статье рассматривается самый простой прогноз участника средней цены торговли: он предполагает, что в следующий момент она будет близка к той, что была в прошедший момент времени. Кроме этого, алгоритм принятия участником в данный момент времени решения включает только логически оправданное назначение статуса и цены в следующий момент времени с учетом предположения реализации прогноза средней цены обмена. Наконец, механизм рациионирования товара или денег в случае, если, например, у нескольких продавцов с данной ценой не хватает товара, чтобы удовлетворить всех обратившихся к ним покупателей (тоже с одинаковой ценой), является более реалистичным, чем система рациионирования, заложенная в предыдущей модели (Вороновицкий, 2014). В предшествовавшей работе в подобном случае была принята пропорциональная система рациионирования товара или денег, и, следовательно, все участники с одинаковой ценой демонстрировали один и тот же выбор. В отличие от этого в настоящей работе в подобном случае продавцы, имеющие меньше некоторого количества товара, продают весь свой товар, остальные продают часть своего товара, и выбор решения о статусе и цене в следующий момент времени участниками с одинаковой ценой оказывается различным.

Во втором разделе статьи сформулирована простая модель однотоварного рынка.

В каждый момент времени участника рынка характеризует имеющееся у него количество товара и денег, цена и его статус (продавец, покупатель, ожидающий). При этом, если агент является продавцом, то его цена означает цену, ниже которой он не согласится продать свой товар, а если агент в этот момент является покупателем, его цена соответствует той цене, больше которой он не согласен заплатить за товар. Наконец, если продавец не участвует в торговле на этом рынке, то его цена используется как ориентир для смены состояния, т.е. сравнивая свою цену и прогноз средней цены рынка, он решает, перейти ли ему в состояние продавца или покупателя или остаться ожидать подходящей для такого перехода ситуации.

Предполагается, что каждый момент времени состоит из двух тактов. В первый такт действует механизм обмена товара на деньги. При этом полагается, что каждый продавец знает все цены, предлагаемые в данный момент покупателями, а каждый покупатель знает все цены, запрашиваемые продавцами. Каждый продавец предлагает весь имеющийся у него товар, а продавец предназначает для покупки товара все имеющиеся у него деньги. Порядок сделок определяется соотношением цен. Продавцы, запрашивающие самую низкую цену, сначала продают товар покупателям, предлагающим самую высокую цену. Обмен товара на деньги происходит по цене, равной полусумме этих цен (влияние торгующихся продавца и покупателя равно). При этом возможен один из двух вариантов исходов: либо продавцы продали весь свой товар, либо покупатели истратили все свои деньги. В первом случае покупатели, у которых после этой торговли еще остались деньги, обращаются к продавцам со следующей величиной запрашиваемой цены. Во втором случае продавцы, у которых еще остался товар, предлагают его покупателям с наибольшей ценой из тех покупателей, у которых еще остались деньги. Процесс заканчивается тогда, когда уже нет предлагаемой потенциальными покупателями цены, которая была бы выше цен, запрашиваемых оставшимися с товаром продавцами, или тогда, когда уже нет запрашиваемой продавцами цены, которая оказалась бы ниже цены, предлагаемой покупателями, еще не истратившими все свои деньги.

После завершения обмена каждый его участник получает собственную информацию о результатах: количество проданного товара и вырученных за него денег (продавец) и количество купленного товара и истраченных денег (покупатель). Происходящие сделки условно регистрируются, и в результате всем участникам сообщается средняя (по всем проведенным сделкам) цена сделки за предшествующий момент. Чтобы максимально упростить модель (условно – устранить эффект механизма прогноза), будем считать, что средняя по рынку цена сделки в данный момент является ориентиром при принятии решений участниками, включая ожидающих. И что участники предполагают среднюю цену в следующий момент очень близкой к средней цене в данный момент. Мы не оспариваем неадекватность этого предположения и используем его с единственной целью – упростить модель на начальном этапе ее изучения. Исходя из этой информации, на следующем такте данного момента времени каждый участник обмена решает, каким будет его статус в следующий момент времени и в соответствии с этим решением меняет свои цены.

Алгоритм выбора максимально прост, и выбор является логически оправданным и согласованным с прогнозом средней цены рынка. В том случае, если на первом такте продавец продал весь товар или покупатель истратил все свои деньги, то этот выбор производится на основе его личной информации о соотношении средней цены всех его сделок и прогноза средней цены на рынке. Если продавцом реализована только часть его товара или покупатель истратил только часть своих денег или вследствие соотношения цен продавец (покупатель) не мог участвовать в торговле на первом такте этого момента времени или был ожидающим, то он определяет свой статус и свою цену в следующий момент, исходя из своей цены и прогноза средней цены рынка (одной и той же для всех участников). Исходя из результатов торговли в этот момент времени, такой же процесс повторяется и в следующий момент времени.

В третьем разделе исследуется характер динамики множества цен участников, названного нами спектром цен. В работе доказано, что, начиная с некоторого момента, структура спектра цен становится доступной адекватному описанию посредством всего нескольких величин. К таким величинам относятся: расхождение спектра цен, т.е. разница между наименьшей ценой покупателей и наибольшей ценой продавцов, и ширина спектра цен, т.е. разница между наи-

большей предлагаемой покупателями ценой и наименьшей запрашиваемой продавцами ценой, а также разности между максимальной и минимальной ценами отдельно для множеств цен покупателей, продавцов и ожидающих. Доказано, что эти величины со временем становятся ограниченными. При этом расхождение спектра цен будет положительным, а его ширина – не более фиксированной величины.

В четвертом разделе приведены результаты исследования динамики системы средствами компьютерного моделирования. Главным результатом этого исследования является следующий вывод: при начальном состоянии системы, соответствующем близкому к равномерному распределению денег, товаров и цен участников, состояние системы после некоторого момента времени находится в некотором финальном множестве состояний. Первое свойство этого множества состояний состоит в том, что средняя цена торговли будет мало отличаться от некоторой константы, одной и той же для всех экспериментов. Но состояния, принадлежащие этому множеству, не являются равновесными в привычном понимании равновесия. Второе важное свойство этого множества состоит в следующем: для части траектории системы, находящейся в финальном множестве, оказывается, что предложение товара и спрос на него, усредненные за некоторое фиксированное число моментов, почти равны. К сожалению, нам не удалось аналитически доказать эти свойства нашего стационарного множества, как не удалось аналитически доказать, что, попав однажды в это множество, траектория системы будет находиться в нем все остальное время.

Это совсем не означает, что аналитическое доказательство невозможно или ненужно. Близость к некоторой константе средней цены торговли, которая характеризует состояния из финального множества, вероятно, отличает модельную ситуацию от реальной, поскольку даже в короткие промежутки времени на биржах часто наблюдаются значительные колебания цены. Может быть, такое свойство нашей модели связано с отсутствием в ней элементов нелогичного выбора участников, а может быть, – в ней принято слишком простое поведение участников. Вероятно, возможны оба варианта, – наверное, существует и третий. Цель этой работы – понять характер поведения замкнутого рынка при простом и логически оправданном механизме выбора, чтобы иметь возможность в дальнейшем проверить на подобной модели роль алогичного поведения участников рынка.

В заключении обсуждается значение полученных результатов и перспективы дальнейшего исследования поведения замкнутого рынка при включении элементов иррационального выбора в механизм индивидуального поведения некоторых.

2. МОДЕЛЬ

Рассматривается динамическая модель однотоварного замкнутого рынка с N взаимодействующими участниками. Замкнутость рынка предполагает, что в каждый момент времени количества товара и денег, обращающихся на рынке, неизменны, и для определенности каждое такое количество равно единице. Это означает, что в каждый момент времени сумма всех денег, которыми обладают участники, равна единице, и сумма количеств товаров, имеющих у участников рынка, также равна единице. Предположим, что время – дискретное ($t = 0, 1, \dots$). На рынке имеется N участников. Каждый участник рынка в данный момент времени характеризуется своим статусом, т.е. числом $\alpha_i(t)$, которое принимает одно из трех значений $\{1, 0, -1\}$. В каждый момент времени каждый агент может иметь один из трех статусов: быть продавцом ($\alpha_i(t) = 1$), покупателем ($\alpha_i(t) = -1$) или не участвовать в торговле ($\alpha_i(t) = 0$). В отличие от модели незамкнутого рынка в этой модели каждый участник, вообще говоря, может обладать одновременно и товаром, и деньгами. Пусть в момент времени t агент i обладает количеством товара $x_i(t)$ и количеством денег $y_i(t)$. Состояние участника i характеризует цена $v_i(t)$. В случае $\alpha_i(t) = 1$ (продавец), $v_i(t)$ – цена, ниже которой он не согласен продать имеющийся у него товар, в случае $\alpha_i(t) = -1$ (покупатель) – цена, выше которой он не согласен платить за данный товар. Если $\alpha_i(t) = 0$ (ожидающий), то $v_i(t)$ имеет смысл ориентира при выборе решения о переходе в другой статус (продавца или покупателя). При этом в каждый момент времени, когда участник рынка

находится в статусе ожидающего, он может изменить свою цену в зависимости от ее соотношения с величиной средней цены на рынке, назначив в момент $t + 1$ цену, отличную от $v_i(t)$.

Набор $4N$ величин $\alpha_i(t)$, $x_i(t)$, $y_i(t)$, $v_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) описывает состояние рынка в момент времени t . Каждый момент времени разделен на два такта. В ходе первого такта происходит следующее: каждый продавец предлагает покупателям весь свой товар, и каждый покупатель готов потратить на покупку все свои деньги. Обмен состоит из сделок, последовательность которых определяется соотношением цен продавцов и покупателей. Пусть участники $i = i_1, \dots, i_k$ будут продавцами и для них выполняется $v_{i_1}(t) \leq v_{i_2}(t) \leq \dots \leq v_{i_k}(t)$, а участники $j = j_1, \dots, j_l$ покупателями и $v_{j_1}(t) \geq \dots \geq v_{j_l}(t)$. Тогда первая сделка происходит между продавцом с номером i_1 и покупателем с номером j_1 , причем цена торговли равна $(v_{i_1}(t) + v_{j_1}(t))/2$. Для определенности предположим, что покупатель с номером j_1 истратил все свои деньги на покупку товара у продавца с номером i_1 . Но у продавца еще остался товар, и тогда он предлагает оставшийся товар покупателю с номером j_2 . Торговля между ними осуществляется так же, как было описано выше. Сделка между ними будет проходить по цене $(v_{i_1}(t) + v_{j_2}(t))/2$. Если же у продавца i_1 не осталось товара, а у покупателя j_1 еще остались деньги, то последний обращается за товаром к продавцу с номером i_2 , и сделка между ними будет происходить по цене $(v_{i_2}(t) + v_{j_1}(t))/2$. Далее, в зависимости от результата этой второй сделки, заключатся третья сделка между продавцом i_1 и покупателем j_3 или между продавцом i_2 и покупателем j_2 (аналогично: между покупателем j_1 и продавцом i_3 или покупателем j_2 и продавцом i_2). При каждой сделке количество товара у продавца уменьшается, но возрастает запас денег, и наоборот – у покупателя при каждой сделке становится меньше денег и больше товара (изменяются их величины $x_i(t)$, $y_i(t)$).

Такой процесс последовательного заключения сделок будет продолжаться до тех пор, пока не окажется следующая ситуация: либо у продавцов больше не осталось товара, либо у покупателей больше не осталось денег, либо цена продавца, у которого еще есть товар, больше цены покупателя, у которого еще остаются деньги.

До сих пор мы не рассмотрели случай, когда несколько продавцов имеют в данный момент одинаковые цены, а также случай, когда у нескольких покупателей цены одинаковые, причем возможны обе ситуации одновременно. В этих случаях обмен происходит между одним обобщенным покупателем с данной ценой покупки и одним обобщенным продавцом с данной ценой продажи. После этого выручка обобщенного продавца (если он продал не весь свой товар) или купленный обобщенным покупателем товар (если он истратил только часть своих денег) делится между всеми продавцами с рассматриваемой ценой или всеми покупателями с данной ценой. Один из вариантов такого процесса – распределение выручки пропорционально вкладу, т.е. пропорционально доле товара, предлагаемого конкретным продавцом, в общей сумме товара обобщенного продавца или пропорционально количеству денег у конкретного покупателя в общей сумме денег у обобщенного покупателя. Такое распределение было принято в работе (Вороновицкий, 2014). К сожалению, при этом все продавцы, составляющие обобщенного продавца (или покупатели, составляющие обобщенного покупателя), оказываются не различимы для рассматриваемого нами механизма индивидуального выбора – все они продают лишь часть своего товара (тратят лишь часть своих денег) и вследствие этого снова имеют одинаковые цены в последующий момент времени.

В данной работе, чтобы избежать такой ситуации, мы используем другой принцип распределения: продавцы с одинаковой ценой, имеющие малое количество товара, продают весь свой товар; продавцы, имеющие много товара, продают только его часть. Поэтому их цены в момент $t + 1$ могут оказаться разными. Пусть имеется k продавцов с равными ценами $v_{i_1}(t) = \dots = v_{i_k}(t) = v(t)$ и разными количествами товара, $x_{i_1}(t) \geq \dots \geq x_{i_k}(t)$ и $x_{i_1}(t) + \dots + x_{i_k}(t) = X(t)$; эти продавцы торгуются с покупателем (или с несколькими покупателями с одинаковой ценой), предлагающим за товар цену $V(t)$ и обладающим $Y(t)$ денег. Пусть $X(t)(v(t) + V(t))/2 > Y(t)$, тогда не все продавцы могут реализовать весь свой товар, и в этом случае существуют такие $l < k$ и $H(t)$:

$$[x_{i_k}(t) + x_{i_{k-1}}(t) + \dots + x_{i_l}(t) + (k - l)H(t)](v(t) + V(t))/2 = Y(t);$$

$$x_{i_1}(t) > H(t), \quad x_{i_{l-1}}(t) > H(t), \quad \dots, \quad x_{i_l}(t) > H(t).$$

Таким образом, l продавцов реализуют весь свой товар, а остальные $k - l$ продавцов реализуют только часть своего товара (причем одинаковое количество). В случае такого способа распределения продавцы с одинаковой ценой делятся на две группы – продавшие весь товар и продавшие часть товара, тогда как при пропорциональном распределении все продавцы реализуют только часть товара.

Аналогичным образом происходит распределение затрат между покупателями с одинаковой ценой. Далее будет рассмотрен алгоритм принятия решения, в котором каждый участник рынка может принять одно из двух решений о выборе статуса в следующий момент времени, и это решение зависит от результата купли-продажи в момент t . Продавцы (аналогично покупатели), участвовавшие в обмене с одинаковой ценой, при пропорциональном способе распределения принимают одно и то же решение, а при используемом нами в данной работе способе распределения они могут принять различные решения.

После первого такта момента времени t количества денег и товара у агента i , участвовавшего в обмене, изменяются и при $\alpha_i(t) = 1$ составят $x_i(t+1) < x_i(t)$, $y_i(t+1) > y_i(t)$, а при $\alpha_i(t) = -1$ будет $x_i(t+1) > x_i(t)$, $y_i(t+1) < y_i(t)$. Если агент не участвовал в торговле, когда $\alpha_i(t) = 0$ или для $\alpha_i(t) = 1, -1$ по причине слишком высокой (для продавца) или слишком низкой (для покупателя) собственной цены, то $x_i(t+1) = x_i(t)$, $y_i(t+1) = y_i(t)$. Для участников обмена в момент t можно определить среднюю цену $w_i(t)$ состоявшегося обмена:

$$w_i(t) = (y_i(t+1) - y_i(t)) / (x_i(t) - x_i(t+1)), \text{ если } \alpha_i(t) = 1;$$

$$w_i(t) = (y_i(t) - y_i(t+1)) / (x_i(t+1) - x_i(t)), \text{ если } \alpha_i(t) = -1;$$

Можно также выделить общие характеристики обмена на этом такте

$$\Delta Y(t) = \sum_{j=j_1}^{j=j_l} (y_j(t) - y_j(t+1)); \quad \Delta X(t) = \sum_{i=i_1}^{i=i_k} (x_i(t) - x_i(t+1))$$

и среднюю по рынку цену обмена для случая, когда такой обмен произошел ($\Delta X(t) > 0$): $u(t) = \Delta Y(t) / \Delta X(t)$. Если $\Delta X(t) / \Delta Y(t) = 0$, то полагаем $u(t) = u(t-1)$. Пусть некоторый общий для рынка центр (оператор) регистрирует сделки, вычисляет величину $u(t)$ и сообщает ее участникам рынка. Эта величина является единственной внешней информацией для каждого участника, остальная информация, используемая им при принятии решения, это – его личная информация (с индексом i).

В течение второго такта момента времени t каждый участник рынка на основании результатов предшествующей торговли меняет свой статус, т.е. определяет $\alpha_i(t+1)$ ($i = 1, \dots, N$) и устанавливает новые цены $v_i(t+1)$ ($i = 1, \dots, N$). Для этого участнику необходимо знать состояние системы в момент времени $t+1$, однако ему известны только величины $u(\tau)$ ($\tau = t, t-1, \dots, 1$) и результаты своих сделок в предшествовавшие моменты времени. Для упрощения модели мы вынуждены принять, что участник использует информацию о результатах своей торговли на первом такте момента t и среднюю по рынку цену обмена $u(t)$.

Более того, чтобы сделать алгоритм выбора совсем простым, полагаем, что участник исходит из того, что средняя цена в момент $t+1$ останется той же, что и в момент t . Поэтому будем предполагать, что агент i выбирает значения своих переменных ($\alpha_i(t+1)$, $v_i(t+1)$) на основе простого сравнения $u(t)$ со средней ценой своих последних сделок $w_i(t)$ следующим (по нашему мнению, достаточно простым) логически оправданным способом.

Рассмотрим логику решения об изменении статуса и цены для продавца. Если на первом такте продавец i продал весь имевшийся товар, т.е. $x_i(t+1) = 0$, $y_i(t+1) > y_i(t) > 0$, то в момент $t+1$ он может быть только покупателем или ожидающим. Но покупателем ему выгодно быть только в том случае, если у него есть надежда в момент $t+1$ купить товар дешевле, чем он продал его в момент t . По этой причине и вследствие ограниченности информации, имеющейся у участника, он становится покупателем, если $w_i(t) \geq u(t)$, т.е. $\alpha_i(t+1) = -1$, $v_i(t+1) = w_i(t)$. В противном случае ему нужно ждать момента $t+\tau$, когда $w_i(t+\tau) \geq u_i(t+\tau)$, а на это время выбрать статус ожидающего из условий $\alpha_i(t+1) = 0$, $v_i(t+1) = w_i(t)$.

Если на первом такте участник продал только часть своего товара или совсем не участвовал в торговле (ничего не продал) ($x_i(t) \geq x_i(t+1) \geq 0$, $y_i(t+1) \geq y_i(t)$), этому может быть единственная причина: цена, которую он запрашивает, выше цен, предлагаемых покупателями. Если перед моментом $t+1$ участник обладал и товаром, и деньгами, то может выбрать – быть ли ему покупателем или продавцом. Если $v_i(t) \geq u_i(t)$, он может рассчитывать купить по меньшей цене, чем запрашивал в момент t . Если при этом он обладает деньгами ($y_i(t+1) > 0$), то он становится покупателем ($\alpha_i(t+1) = -1$) и полагает $v_i(t+1) = v_i(t)$. В противном случае ($y_i(t+1) = 0$) он вынужден ждать подходящей ситуации, т.е. стать ожидающим ($\alpha_i(t+1) = 0$) и полагать ($v_i(t+1) = v_i(t)$). Если $v_i(t) < u(t)$, ему есть смысл остаться продавцом. Но поскольку его цена в момент t была недостаточно низкая, он снижает свою цену на некоторую величину d : $v_i(t+1) = v_i(t) - d$, конечно, не позволяя ей стать нулевой. Стоит заметить, что величина d , характеризующая изменение цены в случае сохранения участником своего статуса, является параметром модели, экзогенной величиной, определяющей точность расчетов.

Если на первом такте агент-покупатель i потратил все свои деньги, т.е. $y_i(t+1) = 0$, $x_i(t+1) > x_i(t)$, то в момент $t+1$ он может быть или только продавцом, или только ожидающим. Но продавцом ему выгодно быть только в том случае, если у него есть надежда в момент $t+1$ продать товар дороже, чем он купил его в момент t . В ситуации ограниченной информации он становится продавцом, если $w_i(t) \leq u(t)$, т.е. $\alpha_i(t+1) = 1$, $v_i(t+1) = w_i(t)$. В противном случае ($w_i(t) > u(t)$) ему нужно ждать момента $t+\tau$, когда станет $v_i(t+\tau) < u(t+\tau)$, а на это время выбрать статус ожидающего ($\alpha_i(t+1) = 0$, $v_i(t+1) = w_i(t)$).

Если на первом такте покупатель i истратил только часть своих денег или не участвовал в торговле ($y_i(t) \geq y_i(t+1) \geq 0$, $x_i(t+1) > x_i(t)$), то только потому, что цена, которую он предлагает, слишком низкая по сравнению с ценами, запрашиваемыми продавцами. Если к моменту $t+1$ он обладает и товаром, и деньгами, то может стать или покупателем, или продавцом. Если $v_i(t) \leq u(t)$, он может продать товар дороже, чем предлагал за него в момент t , и ему есть смысл стать продавцом. Если при этом $x_i(t+1) > 0$, то агент становится продавцом ($\alpha_i(t+1) = 1$, $v_i(t+1) = v_i(t)$). Но если $v_i(t) \leq u(t)$ и $x_i(t) = 0$, то агент i не может стать продавцом и вынужден стать ожидающим ($\alpha_i(t+1) = 1$, $v_i(t+1) = v_i(t)$), до тех пор пока не станет $v_i(t) > u(t)$. Если же $v_i(t) < u(t)$, ему выгодно оставаться покупателем, но при этом повысить предлагаемую за товар цену ($\alpha_i(t+1) = \alpha_i(t) = -1$, $v_i(t+1) = v_i(t) + d$).

Теперь рассмотрим механизм выбора статуса и цены для агента, который в момент t был ожидающим. Для такого агента ориентирами служат количество товара и денег, которыми он обладает $x_i(t)$, $y_i(t)$, его цена $v_i(t)$ и $u(t)$ – средняя цена торговли в момент t . Если $\alpha_i(t) = 0$ и $v_i(t) > u(t)$, то агенту i имеет смысл в момент времени $t+1$ стать покупателем. В том случае, когда у него есть для этого деньги ($y_i(t) > 0$), он это и делает ($\alpha_i(t+1) = -1$), а если денег нет ($y_i(t) = 0$), он остается ожидающим, но при этом снижает свою цену $v_i(t+1) = v_i(t) - d$. Если $\alpha_i(t) = 0$ и $v_i(t) \leq u(t)$, то агенту i имеет смысл в момент времени $t+1$ стать продавцом. В случае, когда у него есть товар на продажу $x_i(t) > 0$, он будет его продавать $\alpha_i(t+1) = 1$. Если при $v_i(t) \leq u(t)$ у агента нет товара $x_i(t) = 0$, то он остается ожидающим ($\alpha_i(t+1) = 0$), но при этом он повысит свою цену $v_i(t+1) = v_i(t) + d$.

3. СВОЙСТВА СПЕКТРА ЦЕН

Теперь попытаемся дать описание динамики и структуры множества величин $v_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$), относящихся к моменту t , которое мы, следуя предыдущим работам, будем называть спектром цен в момент t .

Пусть $\rho(t) = \max_{\alpha_i(t)=-1} v_i(t) - \min_{\alpha_i(t)=1} v_i(t)$ – ширина спектра цен участников торговли в момент времени t ; $\sigma(t) = \min_{\alpha_i(t)=-1} v_i(t) - \max_{\alpha_i(t)=1} v_i(t)$ – величина спектра расхождения цен участников торговли в момент времени t .

Согласно алгоритму из разд. 2 покупателями в момент $t+1$ становятся продавцы, для которых $v_i(t+1) = w_i(t) \geq u(t)$, и ожидающие, для которых $v_i(t+1) = v_i(t) \geq u(t)$; покупателями оста-

ются только те, кто был покупателем в момент t и не смог истратить все свои деньги, и для кого $v_i(t) > u(t)$, $v_i(t+1) = v_i(t) + d$, т.е. его цена увеличивается и остается большей или равной $u(t)$. Продавцами в момент $t+1$ становятся покупатели и ожидающие, для которых $v_i(t+1) \leq u(t)$; продавцами остаются только те продавцы, которые не смогли продать весь свой товар, и для них $v_i(t) \leq u(t)$, $v_i(t+1) = v_i(t) - d$, т.е. все их цены остаются прежними или снижаются, причем в обоих случаях новые цены меньше $u(t)$. Дальнейший анализ алгоритма выбора участниками новых статусов и цен показывает нам следующее. Если $\alpha_i(t) = 0$, $x_i(t) > 0$, $y_i(t) > 0$, то при $v_i(t) < u(t)$ будет $\alpha_i(t+1) = 1$, а при $v_i(t) \geq u(t)$ становится $\alpha_i(t+1) = -1$.

Теперь рассмотрим, какие участники рынка переходят во множество ожидающих. Если было $\alpha_i(t) = 1$, $\alpha_i(t+1) = 0$, то станет $x_i(t+1) = 0$; если же было $\alpha_i(t) = -1$, $\alpha_i(t+1) = 0$, то станет $y_i(t+1) = 0$. Отсюда следует утверждение 1.

Утверждение 1. Начиная с некоторого момента T_0 будет $\rho(t) \geq 0$, $\sigma(t) \geq 0$, $t > T_0$. Если $\alpha_i(t) = 0$, то для $t > T_0$ либо $x_i(t) = 0$, либо $y_i(t) = 0$.

Для момента t введем следующие обозначения:

$$\eta_1(t) = u(t-1) - \min_{\alpha_i(t)=1} v_i(t),$$

$$\eta_{-1}(t) = \max_{\alpha_i(t)=-1} v_i(t) - u(t-1),$$

$$v_x(t) = \min_{\alpha_i(t)=0, x_i(t)>0} v_i(t) - u(t-1), \quad \xi_x(t) = u(t-1) - \max_{\alpha_i(t)=0, x_i(t)>0} v_i(t),$$

$$v_y(t) = \max_{\alpha_i(t)=0, y_i(t)>0} v_i(t) - u(t-1), \quad \xi_y(t) = u(t-1) - \min_{\alpha_i(t)=0, y_i(t)>0} v_i(t),$$

где $I_1(i)$ – множество номеров участников-продавцов; $I_{-1}(i)$ – множество номеров участников-покупателей; $I_x^+(t)$ – множество участников-ожидающих, для которых $x_i(t) > 0$ и $v_i(t) \geq u(t)$; $I_x^-(t)$ – множество участников-ожидающих, для которых $x_i(t) > 0$ и $v_i(t) < u(t)$; $I_y^+(t)$ – множество участников-ожидающих, для которых $y_i(t) > 0$ и $v_i(t) > u(t)$; $I_y^-(t)$ – множество участников-ожидающих, для которых $y_i(t) > 0$ и $v_i(t) \leq u(t)$; $I_x(t) = I_x^+(t) \cup I_x^-(t)$, $I_y(t) = I_y^+(t) \cup I_y^-(t)$.

Очевидно, что для $t > T_0 + 1$ мы имеем $\rho(t) = \eta_1(t) + \eta_{-1}(t)$. Также из алгоритма изменения цен участниками рынка следуют утверждения.

Утверждение 2. Для $t > T_0 + 1$ мы имеем

$$\eta_1(t) \geq 0, \quad \eta_{-1}(t) \geq 0, \quad 0 \leq \xi_x(t) \leq d, \quad 0 \leq v_y(t) \leq d, \quad 0 \leq \xi_y(t), \quad 0 \leq v_x(t),$$

Утверждение 3. Существует такое $T_1 > T_0$, что для всех $t > T_1$ будет

$$\rho(t) \leq 5d + \beta, \quad \eta_1(t) \leq 3,5d + \beta/2, \quad \eta_{-1}(t) \leq 3,5d + \beta/2,$$

где β – сколь угодно малая, но постоянная величина.

Утверждение 4. Если $u(t-1)$ достаточно велико, то при $u(t) - u(t-1) > 0$ окажется, что $u(t+1) - u(t) < 0$ или $u(t+2) - u(t+1) < 0$. Если $u(t-1)$ достаточно мало, то при $u(t) - u(t-1) < 0$ окажется, что $u(t+1) - u(t) > 0$ или $u(t+2) - u(t+1) > 0$.

Доказательство утверждений 2–4 см. в приложении.

Следствие из утверждения 4. Максимальное время непрерывного пребывания участника рынка в статусе продавца или статусе покупателя не превышает четырех моментов времени.

Следствие из утверждений 3–4. Существует такое $T_2 > T_1$, что для всех $t > T_2$ будет

$$\xi_y(t) \leq 3,5d + \beta, \quad v_x(t) \leq 3,5d + \beta.$$

Доказательство этих следствий также см. в приложении.

Суммируя утверждения 1–4 и следствие из утверждений 3–4, заключаем, что *существует такой момент времени τ , что для всех $t > \tau$ спектр цен удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho(t) < 5d, \sigma(t) &\geq 0, \\ 0 \leq \eta_1(t) < 3,5d, 0 \leq \eta_2(t) &< 3,5d, \\ 0 \leq \xi_x(t) \leq d, 0 \leq \xi_y(t) &< 3,5d, \\ 0 \leq v_y(t) \leq d, 0 \leq v_x(t) &< 3,5d. \end{aligned}$$

Следует отметить, что многочисленные компьютерные эксперименты показали, что предыдущие ограничения на параметры, характеризующие состояние спектра цен, завышены. А именно, в экспериментах мы получили, что для всех $t > \tau$ имеет место:

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho(t) < 4d, \sigma(t) &\geq 0, \\ 0 \leq \eta_1(t) < 2,5d, 0 \leq \eta_2(t) &< 2,5d, \\ 0 \leq \xi_x(t) \leq d, 0 \leq \xi_y(t) &< 2,5d, \\ 0 \leq v_y(t) \leq d, 0 \leq v_x(t) &< 1,25d. \end{aligned}$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Обозначим через $r(t)$ набор $4N$ величин $\alpha_1(t), x_1(t), y_1(t), v_1(t), \dots, \alpha_N(t), x_N(t), y_N(t), v_N(t)$. В этом наборе величины $\alpha_i(t)$ принимают три значения $\{1, 0, -1\}$, величины $x_i(t), y_i(t)$ – значения на отрезке $[0, 1]$, а цены $v_i(t)$ – значения на некотором счетном множестве чисел ($i = 1, \dots, N$). В разд. 2 описан алгоритм перехода из состояния $r(t)$ в состояние $r(t+1)$, т.е. задана динамика системы. Состояние системы $r(t)$, для которого $r(t+1) = r(t)$, называется стационарным. Очевидно, что в описанной нами системе нет стационарных состояний, но можно привести простой пример тривиального цикла для системы из N участников. Рассмотрим состояния с m продавцами, обладающими в сумме единицей товара и $N-m$ покупателями, обладающими в сумме единицей денег. Цены, запрашиваемые всеми продавцами, и цены, предлагаемые всеми покупателями, равны единице. Эти состояния порождают циклическую траекторию, состоящую только из равновесных состояний с ценой 1, т.е. $r(t+2) = r(t)$. А при $m = N/2$ продавцы и покупатели в результате только обмениваются статусами. Существуют и другие примеры циклов, соответствующих динамике модели. Множество состояний M таково, что если $r(t) \in M$, то $r(t+1) \in M$ называется стационарным множеством. Обозначим

$$X_1(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i(t)=1}}^{i=N} x_i(t), \quad Y_{-1}(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i(t)=1}}^{i=N} y_i(t), \quad X_{-1}(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i(t)=-1}}^{i=N} x_i(t), \quad Y_1(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i(t)=-1}}^{i=N} y_i(t).$$

Заметим, что здесь $X_1(t)$ – это количество предлагаемого товара, а $Y_{-1}(t)$ – количество денег, ассигнованных на покупку товара в первом такте момента t .

Предложенная в разд. 2 модель исследовалась посредством большого количества компьютерных экспериментов. Существенное значение при таком изучении модели имеет выбор начального состояния системы $r(0)$. Естественно, что существуют экзотические начальные состояния, при которых система очень быстро окажется в соответствующем стационарном множестве. Например, такими состояниями будут состояния $r(0)$, для которых часть агентов в начальный момент не обладают ни деньгами, ни товаром, а другая часть агентов обладает почти всеми деньгами и почти всем товаром.

Поэтому в качестве начального состояния системы выбирались состояния $r(0)$, для которых распределение единицы товара и единицы денег между покупателями близко к равномерному

распределению. Другие важные случаи выбора $r(0)$ имеет смысл изучить при дальнейших исследованиях.

Компьютерные исследования модели показали, что траектории системы сходятся к некоторому стационарному множеству состояний: *существует такой момент τ_1 ($\tau_1 > \tau_0$), что для всех $t > \tau_1$ имеет место $r(t) \in M_0(d)$, где для всех точек множества $M_0(d)$ имеют место неравенства $1 - 5d < u(t) < 1 + 5d$.*

Это, пожалуй, главный результат нашего компьютерного изучения модели замкнутого рынка. К сожалению, аналитическое доказательство этого и последующих результатов связано со значительными трудностями, преодолеть которые нам не удалось.

На рис. 1 можно увидеть, что средняя цена $u(t)$ при различных начальных значениях с течением времени удовлетворяет соотношениям $1 - 5d < u(t) < 1 + 5d$.

Компьютерное исследование траектории средней цены показывает, что сходимость величины $u(t)$ к значению, близкому к константе, происходит немонотонно, колебания значений $u(t)$ нерегулярны при $u(t) > 1 + 5d$ или $u(t) < 1 - 5d$, когда $r(t) \notin M_0(d)$ (рис. 2). При этом график $u(t)$ демонстрирует нерегулярные колебания с длинными непостоянными периодами не только в процессе постоянного уменьшения или увеличения $u(t)$, но и тогда, когда $r(t) \in M_0(d)$.

Изучение системы в многочисленных компьютерных экспериментах показало, что при указанных выше свойствах $r(0)$ состояние системы за время $t > \tau_1$ попадает во множество состояний $M_0(d)$ и что множество $M_0(d)$ является стационарным. При этом если $r(t) \in M_0(d)$, то $1 - 5d < u(t) < 1 + 5d$.

Из компьютерных экспериментов следует, что, находясь в множестве $M_0(d)$, состояние системы с течением времени не приближается к состоянию $u(t) = \text{const}$. На рис. 3 показана траектория на достаточно большом промежутке времени. Из этого графика мы можем видеть, что на протяжении 6000 моментов времени значение $u(t)$ не становится ближе к 1. Нам не удалось доказать, что из $r(t) \in M_0(d)$ следует $r(t+1) \in M_0(d)$. Удалось лишь эмпирически обнаружить, что при $d = 0,005$ и $d = 0,002$ из $r(t) \in M_0(d)$ следует $Y_1(t) < 0,1$, $X_{-1}(t) < 0,1$.

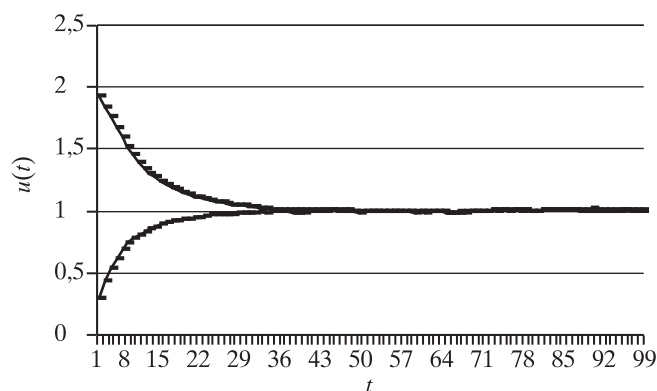


Рис. 1. Динамика средней цены на замкнутом рынке для $0 < t < 10\,000$ ($N = 300$, $d = 0,005$, $u(0) = 2$, $u(0) = 5$, одно деление на шкале времени равно 100 моментам времени)

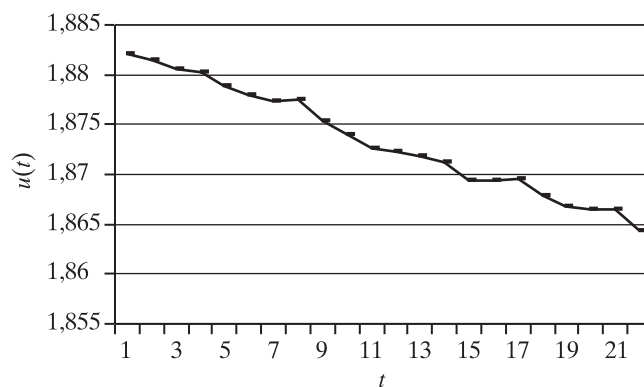


Рис. 2. Изменение средней цены на замкнутом рынке с течением времени для $100 < t < 122$ ($N = 300$, $d = 0,005$, одно деление на шкале времени равно одному моменту времени)

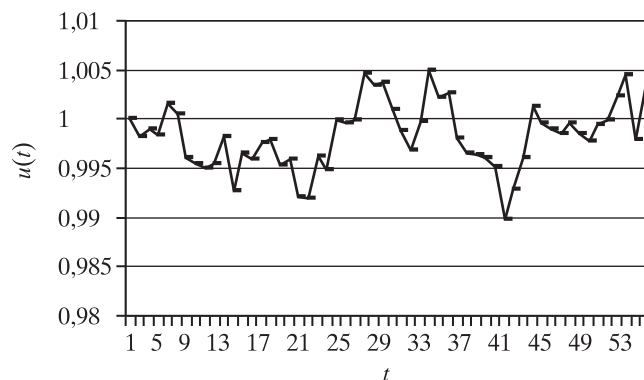


Рис. 3. График $u(t)$ для $r(t)$, находящихся в стационарном множестве $M_0(d)$ для $12\,000 > t > 6000$ ($N = 300$, $d = 0,005$, одно деление на шкале времени равно 500 моментам времени)

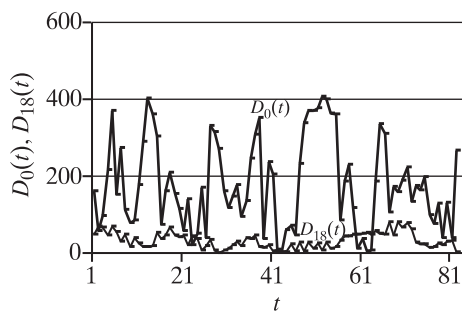


Рис. 4. Разница и усредненная разница платежеспособного спроса и предложения за 18 предыдущих моментов времени для траектории системы, целиком находящейся во множестве $M_0(d)$ для $9500 < t < 9585$ ($N = 300$, $d = 0,002$)

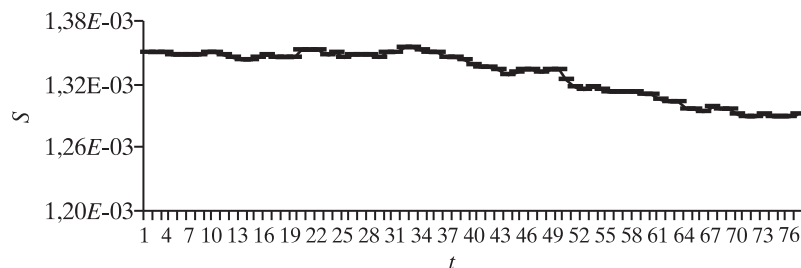


Рис. 5. Динамика отношения среднего квадратического отклонения богатства участников от среднего значения богатства к среднему значению богатства для $0 < t < 12\,000$ ($d = 0,05$, $N = 500$, одно деление оси t соответствует 150 моментам времени)

Состояния $r(t) \in M_0(d)$ характеризуются средней ценой сделки, близкой к равновесной, но эти состояния не обязательно являются состояниями равновесия, так как в этих состояниях предложение, выраженное в деньгах, может значительно отличаться от платежеспособного спроса, что, возможно, характерно для замкнутого одноводового рынка.

Обозначим $D_0(t) = |X_1(t)u(t) - Y_{-1}(t)|$. Компьютерные эксперименты показали, что даже для $r(t) \in M_0(d)$, когда $1 - 5d < u(t) < 1 + 5d$, величина $D_0(t)$ оказывается достаточно большой, поэтому о близости состояний из $M_0(t)$ к равновесию говорить невозможно. Но это относится к спросу и предложению в один момент времени.

Оказалось интересным рассмотреть периоды, состоящие из нескольких моментов. Используя следствие из утверждения 4, мы видим, что каждый участник не может находиться во множестве $I_1(t)$ или множестве $I_{-1}(t)$ более четырех моментов времени, также как он не может находиться в множестве $I_x^+(t)$ или множестве $I_x^-(t)$ более трех моментов времени. Отсюда нетрудно заключить, что каждый участник за конечное (и небольшое) время меняет несколько различных статусов и возвращается к начальному статусу. Это рассуждение объясняет эмпирически установленный факт, состоящий в следующем. Обозначим через $D_L(t)$ – среднее значение модуля разницы между выраженным в деньгах спросом и количеством предназначенных для покупки денег, усредненное L за предшествующих моментов времени:

$$D_L(t) = \left| \sum_{l=t}^{t+L} (X_1(l)u(l) - Y_{-1}(l)) \right| / L.$$

Наши эксперименты показали, что для величин $17 < L < 22$ имеет место $D(t) < 0,15$ для $r(t) \in M_0(d)$. Таким образом, состояния из множества $M_0(d)$ соответствуют равновесию “в среднем” за L моментов времени. В частности, рис. 4 свидетельствует в пользу того, что для $L = 18$ состояния из множества $M_0(d)$ соответствуют равновесию “в среднем” за L предыдущих моментов времени.

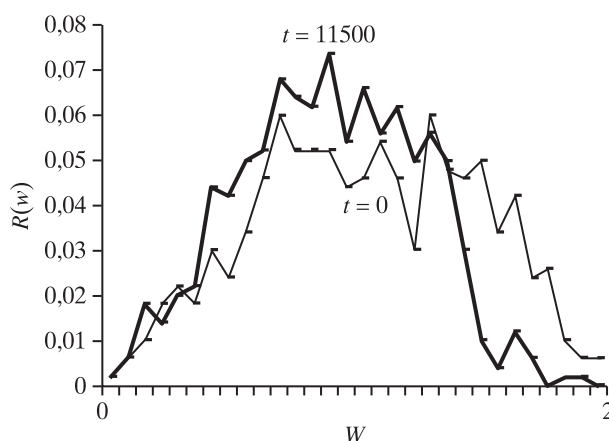


Рис. 6. Доля числа участников $R(W)$ с богатством W для $t = 0$ (начальное состояние) и $t = 11\,500$ ($N = 500$, $d = 0,005$)

Как и в предшествовавшей работе, мы будем условно называть величину $x_i(t)u(t) + y_i(t)$

богатством участника i в момент времени t . Очевидно, что среднее значение богатства в момент t будет равно $(u(t) + 1)/N$. Мы рассмотрели динамику отношения квадратного корня из среднего квадратичного отклонения богатства участников от среднего к величине богатства в момент t :

$$S(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} [x_i(t)u(t) + y_i(t) - (1 + (u(t))/N)]^2 \right\}^{1/2} / (u(t) + 1)$$

при $d = 0,005$, $N = 500$ от 1 до 15 000. На рис. 5 видно, что эта величина меняется крайне медленно. Причем за очень большое время она все-таки немного уменьшается.

Распределение богатства участников представлено на рис. 6. График показывает, что число участников, обладающих данным богатством, за длительное время изменяется по сравнению с начальным, близким к равномерному распределением. Число наиболее богатых участников немного уменьшается, а число средних по богатству участников немного увеличивается.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами сформулирована и исследована очень простая динамическая модель замкнутого однотоварного рынка, может быть, отдаленно напоминающая фондовую биржу. Эта модель даже проще модели (Вороновицкий, 2014), несмотря на то что включенный в нее принцип рационального поведения товара или денег немного сложнее пропорционального рационального поведения. Причиной упрощения модели является не только наше желание аналитически доказать некоторые свойства спектра цен участников модели, но и четко выделить свойства, которыми замкнутый рынок обязан логически оправданному выбору цен и статусов агентами. Трудности аналитического исследования модели, скорее всего, связаны с принятым в модели механизмом взаимодействия участников, который является по существу дискретным. В частности, при исследовании принятого в модели и вполне естественного механизма торговли не удастся использовать известные свойства систем дифференциальных уравнений, поскольку правые части этих уравнений имеют число разрывов производных, быстро растущее с ростом N . Возможно, есть способ изменения модели механизма торговли, сглаживающий эти свойства нашей модели и облегчающий аналитическое исследование, но нам до сих пор не удалось его найти.

Важный результат состоит в том, что, начиная с некоторого момента времени, система характеризуется равновесием “в среднем”: разница между спросом и предложением, усредненная за некоторое фиксированное число моментов времени, относительно мала. При этом средняя цена торговли на этом замкнутом однотоварном рынке также, начиная с некоторого момента времени, мало отличается от некоторой константы. Стоит отметить, что такая асимптотика траектории модели совсем не похожа на поведение средней цены реального замкнутого рынка (например, фондовой биржи в течение периода в один день, характеризующегося стабильностью внешних условий), где наблюдаются значительные колебания средней цены. По нашему мнению, причина может заключаться как в простоте механизма выбора (слишком простой механизм прогноза ситуации и малое количество информации, используемой участниками при принятии решения), так и в логически оправданном выборе решения. Вероятно, было бы интересно изучить изменение коллективного поведения (траектории модели) при более сложном механизме выбора цен и статуса участниками, включающем и большую память соответствующих автоматов. Но большой интерес, проявляемый в последнее время к иррациональному поведению экономических агентов, побуждает нас рассмотреть модели этой работы как исходную точку для изучения влияния иррациональных элементов в принятии решения (включая и стадное поведение) отдельными участниками на коллективное поведение. Поэтому исследование модели, отличающейся от рассмотренной механизмами выбора участников, в которых присутствовали бы иррациональные элементы, видится следующим шагом нашей работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 2. Из того, что $\rho(t) \geq 0$, $\sigma(t) \geq 0$ следует $\eta_1(t) \geq 0$, $\eta_{-1}(t) \geq 0$. Для $i \in I_x^+$, $v(t) > u(t)$ имеем $v_i(t+1) = v_i(t) - d$, а для $i \in I_y$, $v_i(t) \leq u(t)$ будет $v_i(t+1) = v_i(t) + d$. Из алгоритма изменения статуса и цен участников следует, что для всех $i \in I_x^-(t)$ имеем $\alpha_i(t+1) = 1$, а для всех $i \in I_y^+(t)$ будет $\alpha_i(t+1) = -1$. Таким образом, в момент $t+1$ для $i \in I_x^-(t+1)$ мы получаем $v_i(t+1) < u(t)$ только для $i \in I_y^+(t)$ и для них будет $v_i(t+1) < u(t) - d$. Аналогично: в момент $t+1$ для $i \in I_y^-(t+1)$ имеем $v_i(t+1) \geq u(t)$ только для тех $i \in I_y(t)$, для которых было $i \in I_y^-(t)$, и для них будет $v_i(t+1) \leq u(t) + d$. ■

Доказательство утверждения 3. Рассмотрим случай, когда на первом такте момента времени t реализуется весь товар, т.е. $X_1(t)u(t) < Y_{-1}(t)$ и $t > T_0 + 2$, так что утверждения 1–2 выполняются. Из принятых алгоритмов торговли и изменения статуса и цен участников следует, что наибольшая цена сделки может возникнуть при торговле покупателя с наибольшей ценой с продавцом с наибольшей ценой, а наименьшая цена может появиться при торговле покупателя и продавца с наименьшими ценами. Тогда в соответствии с нашими обозначениями наибольшая возможная цена продавца будет равна $u(t-1)$, а его наименьшая цена равняется $u(t-1) - \eta_1(t)$. Наибольшая цена покупателя в первом такте момента t равна $u(t-1) + \eta_{-1}(t)$. Но в нашем случае, очевидно, что не все покупатели смогут полностью истратить на покупку товара все свои деньги. Пусть минимальная предлагаемая цена покупателей, купивших ненулевое количество товара, равна $u(t-1) - \gamma_{-1}(t)$. Тогда для средних цен участников торговли (продавцов и покупателей) имеет место следующее неравенство:

$$[(u(t-1) - \eta_1(t)) + (u(t-1) + \gamma_{-1}(t))]/2 \leq w_i(t) \leq [u(t-1) + (u(t-1) + \eta_{-1}(t))]/2, \quad (1)$$

где i – номер продавца или покупателя, участвовавшего в торговле в момент времени t , т.е. продавшего ненулевое количество товара или истратившего ненулевую сумму денег. Это неравенство играет основную роль в нашем доказательстве, поэтому запишем его в более компактном виде:

$$u(t-1) - \frac{\eta_1(t)}{2} + \frac{\gamma_{-1}(t)}{2} \leq w_i(t) \leq u(t-1) + \frac{\eta_{-1}(t)}{2}. \quad (2)$$

Рассмотрим случай максимального увеличения $\rho(t)$. Оно могло бы произойти по двум причинам:

1) $d > \eta_{-1}(t) - \gamma_{-1}(t)$, $u(t-1) + \gamma_{-1}(t) > u(t)$ – в этом случае максимальная цена покупателей станет $u(t-1) + \gamma_{-1}(t) + d = u(t-1) + \eta_{-1}(t) - (\eta_{-1}(t)) - \gamma_{-1}(t) + d$; из-за этого максимальная цена покупателей увеличится на $d - (\eta_{-1}(t) - \gamma_{-1}(t))$;

2) $u(t) - d < \min_{a_i(t-1)=-1, y_i(t)=0 \rightarrow 0} w_i(t)$ – в этом случае возможно, что какие-то ожидающие перейдут в статус продавцов с ценой, равной или большей $u(t) - d$. При этом минимальная цена продавцов была $u(t-1) - \eta_1(t)$, а минимальная цена сделок для покупателей, которые в момент $t+1$ станут продавцами, окажется $u(t) - \eta_1(t+1) \geq u(t) - d$. Таким образом минимальная цена продавцов уменьшится на $u(t-1) + \eta_1(t) - u(t) - d$.

Из (2) вытекает, что

$$-\frac{\eta_1(t)}{2} + \frac{\gamma_{-1}(t)}{2} \leq u(t) - u(t-1) \leq \frac{\eta_{-1}(t)}{2}. \quad (3)$$

Если одновременно имеет место первый и второй случай, то суммарное увеличение величины $\rho(t)$ будет равно:

$$u(t-1) - \eta_1(t) - u(t) + d + d - (\eta_{-1}(t) - \gamma_{-1}(t)) = -(u(t) - u(t-1)) - \eta_{-1}(t) - \eta_1(t) + \gamma_{-1}(t) + 2d.$$

Используя (2) и (3), получаем

$$\begin{aligned} \rho(t+1) - \rho(t) &< -(\eta_1(t) + \gamma_{-1}(t))/2 - \eta_1(t) - \eta_{-1}(t) + \gamma_{-1}(t) + \\ &+ 2d < -(\eta_1(t) + \eta_{-1}(t))/2 + 2d = -\rho(t)/2 + 2d. \end{aligned}$$

Поскольку $\rho(t) > 5d + \beta$ будет $\rho(t+1) - \rho(t) < -(d - \beta)/2$, т.е. ширина спектра цен уменьшается на конечную величину. Доказательство этого факта для случая $X_1(t)u(t) \geq Y_{-1}(t)$ симметрично.

Если $u(t) - d \geq \min_{a_i(t-1)=-1, y_i(t)=0 \rightarrow 0} w_i(t)$ и при этом $\eta_{-1}(t) - \gamma_{-1}(t) \geq d$ или $u(t-1) + \gamma_{-1}(t) \leq u(t)$, то легко убедиться, что в этом случае увеличение минимальной цены продавца составит:

$$\begin{aligned} u(t) - \eta_1(t+1) - u(t-1) + \eta_1(t) &> (-\eta_1(t) + \gamma_{-1}(t))/2 + \eta_1(t) = \\ &= \eta_1(t) + \eta_{-1}(t)/2 - (\eta_1(t) - \gamma_{-1}(t))/2 \geq \rho(t)/2 - d/2 \end{aligned}$$

и $\rho(t+1) - \rho(t) < -2d - \beta/2$.

Если $u(t) - d \geq \min_{a_i(t-1)=-1, y_i(t)=0 \rightarrow 0} w_i(t)$ и при этом $\eta_{-1}(t) - \gamma_{-1}(t) < d$ или $u(t-1) + \gamma_{-1}(t) > u(t)$, то легко убедиться, что в этом случае $\rho(t+1) \leq \rho(t)/2 - \gamma_{-1}(t)/2$.

Таким образом, если $\rho(t_1) > 5d$, то наступит момент T_1 такой, что для всех $t > t_2$ будет $\rho(t) < 5d + \beta$, где β – сколь угодно малая, но постоянная величина.

Рассмотрим $t > T_1$, когда $\rho(t) < 5d + \beta$. Пусть в этом случае $u(t-1) + \gamma_{-1}(t) > u(t)$, максимальная цена покупателей увеличится на величину $d - (\eta_{-1}(t) - \gamma_{-1}(t))$ и станет равной $d > \eta_{-1}(t) - \gamma_{-1}(t)$, $u(t-1) + \gamma_{-1}(t) + d$. Тогда из (2) получим

$$\begin{aligned} \eta_{-1}(t+1) &\leq u(t-1) + \gamma_{-1}(t) + d - u(t) \leq (\eta_1(t) - \gamma_1(t))/2 + \\ &+ \gamma_{-1}(t) + d \leq \rho(t)/2 - (\eta_{-1}(t) - \gamma_{-1}(t))/2 + d \leq \rho(t)/2 + d < 3,5d + \beta/2. \end{aligned}$$

При этом

$$\eta_1(t+1) \leq u(t-1) + \eta_1/2 - u(t) \leq \rho(t)/2 \leq \rho/2 < 2,5d + \beta/2.$$

Аналогично при $u(t-1) + \gamma_{-1}(t) < u(t)$ будет:

$$\eta_1(t+1) \leq \rho(t)/2 < 2,5d + \beta/2;$$

$$\eta_{-1}(t+1) \leq \rho(t)/2 < 2,5d + \beta/2.$$

Очевидно, что для случая, когда на первом такте момента t истрачены все имеющиеся у покупателей деньги $X_1(t)u(t) \geq Y_{-1}(t)$, доказательство будет полностью аналогичным. Таким образом, при $t > T_1$ будет $\eta_1(t) < 3,5d + \beta/2$, $\eta_{-1}(t) < 3,5d + \beta/2$. ■

Доказательство утверждения 4. Обозначим через $x_1(t)$ – количество товара, которым обладают в момент t все продавцы, запрашивающие минимальную цену $u(t-1) - \eta_1(t)$. Пусть $u(t)$ настолько велико, что $x_1^*(t)u(t) > Y_{-1}(t)$. Тогда среди продавцов, запрашивавших минимальную цену, найдутся продавцы, не продавшие часть своего товара. При этом согласно нашему алгоритму изменения участниками статуса и цен, если для этих участников окажется $u(t-1) - \eta_1(t) > u(t)$, то все продавцы изменят свой статус (перестанут быть продавцами). Но последнее неравенство означает, что $-\eta_1(t) > u(t) - u(t-1)$, а это противоречит условию утверждения 4. Остается случай, когда среди продавцов, запрашивавших минимальную цену, найдутся продавцы, не продавшие часть своего товара, и при этом $u(t-1) - \eta_1(t) \leq u(t)$. Такие продавцы уменьшат запрашиваемую цену на d , и тогда минимальная цена продавцов станет $u(t-1) - \eta_1(t) - d$. Неравенства (2) примут вид:

$$u(t-1) - \eta_1(t)/2 < u(t) < u(t-1) + \eta_{-1}(t)/2 - \eta_1(t)/2. \quad (4)$$

Из (4) видно, что для выполнения $u(t) - u(t-1) > 0$ необходимо $\eta_1(t) > \eta_{-1}(t)$. При этом из (4) и того, что в момент t продавцами становятся ожидающие из множества $I_y^+(t)$ с ценами меньшими $u(t) + d$, имеем:

$$\eta_{-1}(t+1) \leq \max\{\eta_{-1}(t)/2 - \eta_{-1}(t) + u(t-1) - u(t), d\}, \quad (5)$$

$$\eta_1(t+1) = \eta_1(t) + u(t) - u(t-1) + d. \quad (6)$$

Из того, что $u(t-1) - \eta_1(t) \leq u(t)$, следует $\eta_1(t+1) > d$. Поэтому, если из (5) следует $\eta_{-1}(t+1) \leq d$, то неравенство $u(t+1) - u(t) > 0$ — невозможно. Остается $\eta_{-1}(t+1) \leq \eta_{-1}(t)/2 - \eta_1(t) - u(t) + u(t-1)$ или $\eta_{-1}(t+1) \leq \eta_{-1}(t)/2 < 1,75d + \beta/4$.

Заметим, что $u(t) - \bar{u}(t-1) < 3,5d - \beta/2$, и предположим, что $u(t+1)$ настолько велико, что $x_1^*(t+1)u(t+1) > Y_{-1}(t+1)$. Если окажется, что $u(t+1) - u(t) > 0$, то $\eta_{-1}(t+1) < 0,875d + \beta/8$ и $u(t+2) - u(t+1) < 0$. Если $u(t-1)$ очень мало, доказательство второй части утверждения 4 проводится симметрично. ■

Доказательство следствия из утверждения 4. Из хода доказательства утверждения 4 мы видим, что покупатель, продающий свой товар, сразу же переходит в статус продавца или в статус ожидающего, а покупатель, реализующий лишь часть своего товара, находится в своем статусе непрерывно не более четырех моментов времени. То же самое относится и к продавцу. ■

Доказательство следствия из утверждений 3 и 4. Напомним, что для $i \in I_x^+(t)$, $v(t) > u(t)$ будет $v_i(t+1) = v_i(t) - d$, а для $i \in I_y$, $v_i(t) \leq u(t)$ будет $v_i(t+1) = v_i(t) + d$. Из утверждения 1 следует, что величина $u(t) \geq 0$ ограничена снизу. Заметим также, что с одной стороны, $-\eta_1(t)/2 < u(t) - u(t-1) < \eta_{-1}(t)/2$, а с другой стороны, покупатель переходит в статус ожидающего только когда $u(t-1) + \eta_{-1}(t)/2 \geq w_i(t) \geq u(t)$, а продавец переходит в статус ожидающего только когда $u(t-1) + \eta_{-1}(t)/2 \geq w_i(t) \geq u(t)$. Учитывая, что для $t > T_1$, имеют место неравенства $\eta_1(t) \leq 3,5d + \beta/2$, $\eta_{-1}(t) \leq 3,5d + \beta/2$, оказывается, что, начиная с некоторого момента времени, выполняется $v_x(t) \leq 3,5d + \beta$.

Теперь рассмотрим, что происходит при очень больших $u(t)$. Каждый раз, когда $u(t-1)$ достаточно велико $u(t) - u(t-1) > 0$, то по крайней мере $u(t+2) - u(t+1) < 0$, и тогда величина $u(t) - \xi_x(t)$ уменьшится, по крайней мере на d ; и так будет всегда, когда $u(t) - u(t-1) > 0$, $u(t+1) - u(t-1) \leq 0$. Поскольку во множество $I_x(t)$ добавляются участники с ценами $v_i(t) \geq u(t) \geq u(t-1) - \eta_1(t)/2$, то наступит момент, начиная с которого выполняется $\xi_x(t) \leq 3,5d + \beta$. Точно также происходит и для $\xi_y(t)$. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бахтизин А.Р. (2008). Агент-ориентированные модели экономики. М.: Экономика.
- Вороновицкий М.М. (1974). Об одной модели обмена // *Автоматика и телемеханика*. № 8.
- Вороновицкий М.М. (2014). Агент-ориентированная модель замкнутого однотоварного рынка // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 2. С. 58–71.
- Макаров В.Л. (2012). Искусственные общества // *Экономика и математические методы*. Т. 48. № 3. С. 3–20.
- Цетлин М.Л. (1969). Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука.
- Avery C., Zemsky P. (1998). Multidimensional Uncertainty and Herd Behavior in Financial Market // *American Economic Review*. Vol. 88(4). Issue 4. P. 724–748.
- Banerjee A.V. (1992). A Simple Model of Herd Behavior // *The Quarterly Journal of Economics*. Vol. CVII. Issue 3. P. 797–817.
- Bikhandany S., Hirschleifer D., Welch I. (1992). A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades // *Journal of Political Economy*. Vol. 100. No. 5. P. 993–1025.
- Cipriani M., Gale D., Guarino A. (2006). Estimation a Structural Model of Herd Behavior in Financial Market. V Journees of Foundation Banque de France. Paris.
- Cipriani M., Guarino A. (2001). Herd Behavior and Contagion in Financial Market. Mimeo NYU.

- Hunter J., Wu F.** (2014). Multifactor Consumption Based Asset Pricing Model Using The US Stock Market As A Reference: Evidence From A Panel Of Developed Economies // *Economic Modelling*. Vol. 36. January. P. 557–565.
- Kirman A.** (2011). Learning in Agent-based Models // *Eastern Economic Journal*. Vol. 37(1). P. 20–27.
- Kim K., Yoon S.-I., Kim Y.** (2004). Herd Behavior in the Stock and Foreign Exchange Markets // *Physica. A; Statistical Mechanics and Its Applications*. Vol. 341(C). P. 526–532.
- LeBaron B., Brian W.A., Palmer R.** (1999). Time Series Properties of an Artificial Stock Market Model // *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 23. P. 1487–1516.
- Chen S.-H., Liao C.-C.** (2005). Agent-Based Computational Modeling of the Stock Price – Volume Relation // *Information Science*. Vol. 170. I(1). P. 75–100.
- Topol R.** (1991). Bubbles and Volatility of Stock Prices; Effect of Mimetic Contagion // *The Economic Journal*. Vol. 101. P. 786–809.
- Wei J.R., Huang J.P., Hui P.M.** (2013). An Agent-Based Model of Stock Markets Incorporating Momentum Investors // *Physica: A Statistical Mechanics and Its Applications*. Vol. 392. Issue 12. P. 2728–2735.

Поступила в редакцию
24.06.2014 г.

The Agent-Based Model of the Closed Market with One Commodity and Rational Choice of Partners

M.M. Voronovitsky

The model of a one-commodity market, in which at each moment there are the fixed quantity of goods and the fixed quantity of money was proposed and investigated in the paper. Each participant can have one of three statuses in the market: a buyer, a seller or not to participate in trade at a certain moment of time. Each of them can change his status in the next moment of time. Market participants can change their statuses and prices only by using their personal information about his trade in the previous moment. This model differs from previous model by considering the rational choice of participant's activities and status and by a more realistic mechanism of market trade (Voronovitsky, 2014). The main target of this research is to find the effects of rational behavior of participants in the market. The main result is the convergence of trajectory of our system to a stationary set of states with average price of trade which is close to constant.

Keywords: mathematical model, closed market, one-commodity market, dynamics of prices, trajectory, stationary set, stable state, rational choice.

JEL Classification: C51, D01.