ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2015, том 51, № 3, с. 81–86

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЦЕНЫ АКЦИИ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ ЦЕПЕЙ МАРКОВА*

© 2015 г. Е.М. Бронштейн, А.И. Авзалова[1]

(Уфа)

Рассмотрено марковское свойство временных рядов курсов акций. В случаях, когда гипотеза об отсутствии марковости не отвергается, предложена процедура краткосрочного прогнозирования цены акции.

Ключевые слова: марковские цепи, прогнозирование, акции.

Классификация JEL: G17.

Идея рассмотрения временного ряда цены акции как цепи Маркова была высказана профессором Университета Бергамо (Италия) Серджио Ортобелли на конференции EURO-2012 (Вильнюс, июль 2012 г.). Для этого необходимо сделать дискретными данные о доходности, т.е. интервал вариации доходности разбить на несколько подынтервалов, и по историческим данным фиксировать события – попадания доходности в те или иные подынтервалы. Доходность определяется как отношение цены акции в конце временного промежутка (мы принимали его равным 1 неделе) к цене в начале. Разумеется, как наиболее адекватная цена акции рассматривалась цена закрытия.

В качестве исходных данных мы использовали котировки акций компаний сектора "Технология и электроника" (зарубежных: Sony, Panasonic, Philips, Sharp, Nokia, Apple, Acer, Toshiba; отечественных: Ситроникс, Армада) и отечественных нефтегазовых компаний (Лукойл, Татнефть, Газпронефть, Сургутнефтегаз)[2]. Для проверки марковости анализировались (в зависимости от их наличия в базах) данные о ценах акций зарубежных компаний за период с 1 января или 1 июля 2000 г. по 31 декабря 2012 г., для большинства отечественных компаний с 1 января 2001 г. по 31 декабря 2012 г., для некоторых – за более короткий срок.

Проиллюстрируем примененный подход на примере акций компании Sony Corporation. На рис. 1–2 приведены графики цены акции и доходности компании. Методика основывалась

Рис. 1. График цены акции компании (в условных денежных единицах)

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00005).

[1] Авторы благодарны рецензенту за ряд полезных замечаний, учет которых привел к улучшению статьи.

[2] Данные были взяты с сайтов www.google.com/finance, http://www.finam.ru/.

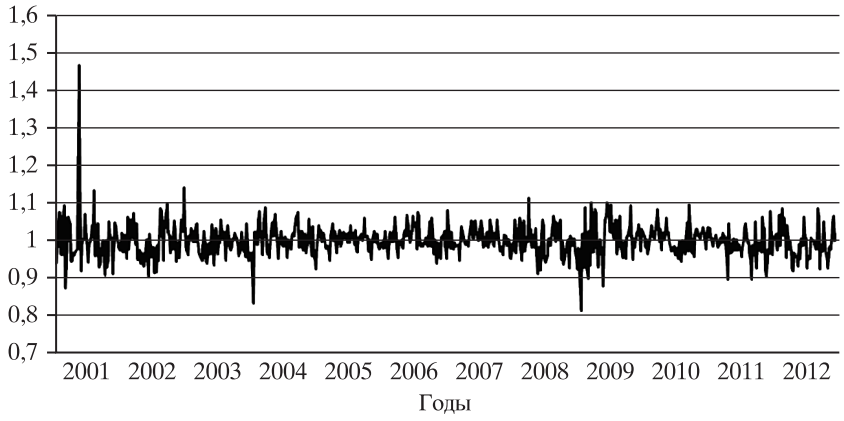

Рис. 2. График доходности акций компании (в условных денежных единицах)

на разбиении подынтервалов вариации доходностей акций на 8 равных (кроме крайних) интервалов. При уменьшении числа интервалов падает информативность, при увеличении – интервалы становятся зачастую меньше погрешности измерений. Для курсов акций компании Sony Corporation интервалы таковы: (0, 0,97), [0,97, 0,98),….,[1,03, ∞). В крайние интервалы попадают аномальные значения.

Для проверки наличия марковости первого порядка составлялась матрица статистических оценок переходных вероятностей $p_{ij} = n_{ij}/n$ (i, j =1, …, 8), где n_{ij} – число случаев, когда попаданию доходности акции в промежуток j предшествовало попадание в промежуток i; n – полное число наблюдений минус одно (для компании Sony это число равно 675). В табл. 1 приведены матрицы частот n_{ij} и статистических оценок переходных вероятностей.

Таблица 1. Частоты и статистические оценки переходных вероятностей

Вид матрицы		1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Матрица частот	1	55	12	15	22	14	12	3	22	155
	2	17	5	9	6	4	7	2	7	57
	3	16	7	7	10	8	6	2	10	66
	4	20	7	11	13	8	6	7	13	85
	5	13	6	4	7	8	10	8	14	70
	6	8	6	7	5	11	7	8	15	67
	7	5	6	5	12	4	2	4	8	46
	8	20	8	8	11	13	17	12	40	129
	Σ	154	57	66	86	70	67	46	129	675
Матрица оценок переходных вероятностей	1	0,35	0,08	0,10	0,14	0,09	0,08	0,02	0,14	
	2	0,30	0,09	0,16	0,10	0,07	0,12	0,04	0,12	
	3	0,24	0,11	0,11	0,15	0,12	0,09	0,03	0,15	
	4	0,24	0,08	0,13	0,16	0,09	0,07	0,08	0,15	
	5	0,18	0,08	0,06	0,14	0,11	0,13	0,11	0,19	
	6	0,12	0,09	0,11	0,08	0,16	0,10	0,12	0,22	
	7	0,11	0,13	0,11	0,26	0,09	0,04	0,09	0,17	
	8	0,16	0,06	0,06	0,09	0,10	0,13	0,09	0,31	

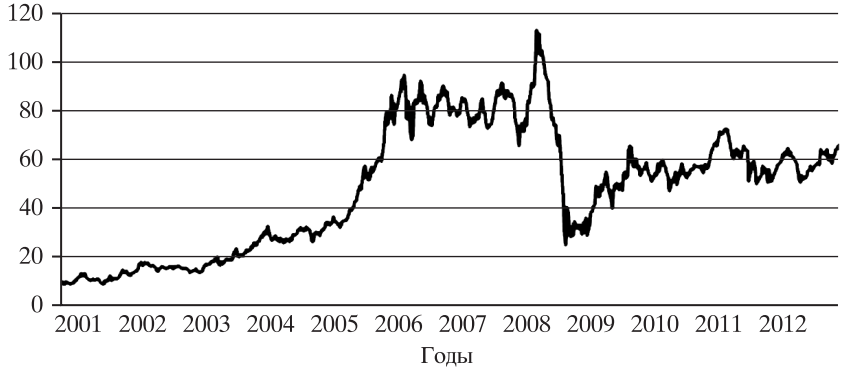

Рис. 3. График цены акции компании (в условных денежных единицах)

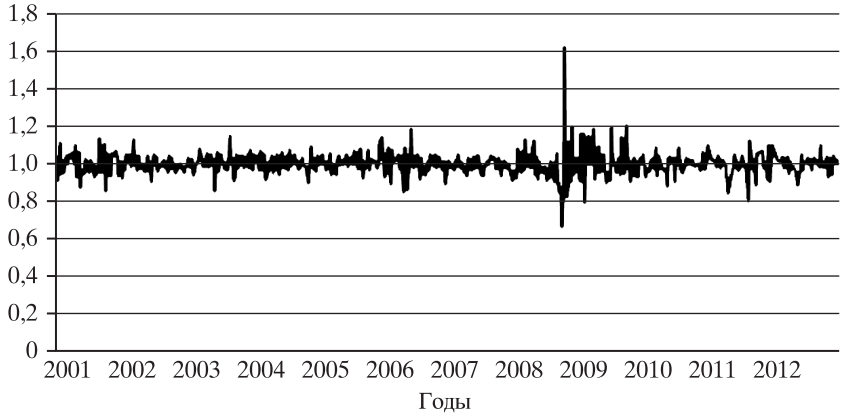

Рис. 4 . График доходности акций компании (в условных денежных единицах)

Использовалась методика проверки гипотезы H_0 об отсутствии марковости в последовательности при альтернативной H_1 – наличии марковости первого порядка, приведенная в монографии (Вистелиус, 1980, гл. 3). Для этого вычисляется статистика

$$\Lambda = 2\sum_{i,j} n_{ij} \ln \frac{n\, n_{ij}}{n_{\cdot j} n_{i\cdot}},$$

где

$$n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij};\ \ n_{i\cdot} = \sum_j n_{nj}.$$

В предположении независимости распределений случайных величин $\{x_i\}$, $\{x_{i-1}\}$, где x_i – значение случайной величины в момент i (т.е. при отсутствии марковости) статистика Λ имеет центральное распределение χ^2 с $(s-1)^2$ степенями свободы, где s – число состояний (у нас их 8). На уровне значимости 0,05 пороговое значение статистики равно 78,23; если значение статистики превосходит пороговое, то нулевая гипотеза (отсутствие марковости) отвергается. В рассматриваемом случае значение статистики равно 79,96, т.е. альтернативная гипотеза (марковость процесса) принимается.

Проверка показала, что гипотеза об отсутствии марковости отвергается для доходностей акций всех исследованных зарубежных компаний, кроме Toshiba, и не отвергается для акций всех отечественных компаний и Toshiba.

Проиллюстрируем примененный подход на акциях компании ОАО “Нефтяная компания Лукойл”, для которой гипотеза об отсутствии марковости не отвергается. Исследовались данные о цене акций с 1 января 2001 г. по 31 декабря 2012 г. (рис. 3). Интервал изменения доходности

Таблица 2. Матрицы частот и статистических оценок переходных вероятностей

Вид матрицы		1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Матрица частот	1	9	8	10	10	9	5	8	19	78
	2	11	5	5	4	3	11	1	8	48
	3	11	10	10	11	7	6	4	20	79
	4	4	3	7	7	11	10	5	18	65
	5	7	5	12	4	5	8	9	17	67
	6	5	3	9	8	10	10	14	9	68
	7	11	2	9	9	10	6	5	6	58
	8	20	12	16	12	12	13	12	24	121
	Σ	78	48	78	65	67	69	58	121	584
Матрица оценок переходных вероятностей	1	0,12	0,11	0,13	0,13	0,11	0,06	0,10	0,24	
	2	0,23	0,1	0,11	0,08	0,06	0,23	0,02	0,17	
	3	0,14	0,13	0,13	0,14	0,09	0,07	0,05	0,25	
	4	0,06	0,05	0,11	0,10	0,17	0,15	0,08	0,28	
	5	0,11	0,08	0,18	0,06	0,07	0,12	0,13	0,25	
	6	0,07	0,04	0,13	0,12	0,15	0,15	0,21	0,13	
	7	0,19	0,04	0,15	0,15	0,17	0,11	0,09	0,10	
	8	0,16	0,11	0,13	0,10	0,10	0,10	0,10	0,20	

разбивался на 8 промежутков: (0, 0,94), [0,94, 0,96), …., [1,06, ∞). Соответствующий график доходности приведен на рис. 4. В табл. 2 приведены матрицы частот n_{ij} и статистических оценок переходных вероятностей. Значение статистики Λ равно 63,17, т.е. гипотеза об отсутствии марковости в последовательности не отвергается.

Для акций отечественных компаний и Toshiba проверялась гипотеза об отсутствии марковости второго порядка, т.е. о независимости случайных событий "попадание доходности акции за некоторую неделю в промежуток i" и "попадание доходности за две предшествующие недели последовательно в промежутки j и k" при всевозможных i, j, k. Если соответствующие частоты равны n_{ijk}, то оценки переходных вероятностей вычисляются по формулам $p_{ijk} = n_{ijk}/n$ ($i, j, k = 1, \ldots, 8$). Проверка этой гипотезы является громоздкой, так как для этого необходимо формировать матрицы частот и оценок переходных вероятностей размеров 8×64. Статистика Λ аналогична описанной выше. На уровне значимости 0,05 для акций всех рассмотренных компаний гипотеза об отсутствии марковости второго порядка не отвергается.

Для акций компаний, для которых гипотеза об отсутствии марковости первого порядка отвергается, была проведена проверка однородности переходных вероятностей. Для этого массив данных доходностей акций разбивался на две равные части (по времени), для каждой части вычислялись статистики Λ и проводилось сравнение по соответствующему критерию (Вистелиус, 1980, глава 3). Установлено, что во всех случаях гипотеза об однородности не отвергается на уровне значимости 0,05.

Проверялась также согласованность значений статистических оценок вероятностей переходов для всех 7 компаний, для которых гипотеза об отсутствии марковости отвергается. Соответствующие диапазоны приведены в табл. 3. Согласно представленным данным колебания переходов весьма значительные, т.е. цены акций различных компаний подвержены влиянию предшествующих значений по-разному.

Прогнозирование цен акций компаний, гипотеза об отсутствии марковости доходностей которых отвергается, проводилось следующим образом. При попадании доходности в тот или иной

Таблица 3. Интервалы изменения вероятностей перехода

№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	(0,21; 0,40)	(0,07; 0,09)	(0,07; 0,20)	(0,05; 0,14)	(0,07; 0,15)	(0,06; 0,12)	(0,01; 0,09)	(0,13; 0,18)
2	(0,08; 0,30)	(0,05; 0,20)	(0,10; 0,19)	(0,06; 0,15)	(0,07; 0,23)	(0,04; 0,16)	(0,03; 0,16)	(0,07; 0,24)
3	(0,17; 0,35)	(0,04; 0,15)	(0,05; 0,15)	(0,09; 0,19)	(0,09; 0,14)	(0,08; 0,15)	(0,00; 0,11)	(0,10; 0,23)
4	(0,11; 0,25)	(0,04; 0,13)	(0,07; 0,18)	(0,07; 0,21)	(0,08; 0,21)	(0,04; 0,19)	(0,05; 0,13)	(0,09; 0,18)
5	(0,10; 0,20)	(0,03; 0,12)	(0,05; 0,18)	(0,07; 0,20)	(0,09; 0,20)	(0,08; 0,17)	(0,05; 0,13)	(0,15; 0,21)
6	(0,02; 0,20)	(0,06; 0,11)	(0,08; 0,13)	(0,07; 0,20)	(0,08; 0,23)	(0,09; 0,20)	(0,04; 0,16)	(0,10; 0,32)
7	(0,04; 0,20)	(0,03; 0,13)	(0,06; 0,23)	(0,08; 0,26)	(0,09; 0,21)	(0,04; 0,18)	(0,00; 0,13)	(0,11; 0,34)
8	(0,09; 0,23)	(0,02; 0,08)	(0,06; 0,15)	(0,07; 0,16)	(0,06; 0,16)	(0,08; 0,19)	(0,07; 0,17)	(0,14; 0,31)

Таблица 4. Математические ожидания доходностей

1	0,995	5	1,007
2	0,996	6	1,012
3	1,000	7	1,003
4	1,000	8	1,012

интервал по статистическим оценкам вероятностей переходов вычислялись математические ожидания значений будущих доходностей, при этом интервалы заменялись их серединами, для крайних интервалов принимались значения на 0,05 меньше/больше конечных (для компании Sony – 0,965 и 1,035). По прогнозным значениям доходностей вычислялись прогнозы цен акций.

Для Sony математические ожидания доходностей (прогнозы) при попадании в разные интервалы представлены в табл. 4. Прогноз цены акций был сопоставлен с фактическими данными с января по апрель 2013 г. (табл. 5). Средняя ошибка составила 3,3%. Схожие результаты получены и для акций других рассматриваемых компаний: средняя погрешность прогноза составила от 2,15% (для компа-

Таблица 5. Фактические и прогнозные значения цен акций

Дата	Фактическая цена	Прогнозная цена
3 января 2013 г.	11,49	11,24
10 января 2013 г.	11,17	11,43
17 января 2013 г.	12,10	11,30
24 января 2013 г.	13,04	12,25
31 января 2013 г.	14,54	13,20
7 февраля 2013 г.	14,79	14,46
14 февраля 2013 г.	14,36	14,71
22 февраля 2013 г.	14,06	14,28
28 февраля 2013 г.	15,16	14,23
6 марта 2013 г.	15,70	15,34
13 марта 2013 г.	16,60	15,89
20 марта 2013 г.	17,59	16,79
27 марта 2013 г.	17,16	17,50
3 апреля 2013 г.	16,79	17,07
10 апреля 2013 г.	16,71	16,79
17 апреля 2013 г.	16,44	16,71
23 апреля 2013 г.	16,68	16,64

нии Philips) до 3,65% (для компании Apple). Следует отметить, что в марте–апреле прогноз по Sony оказался точнее, нежели в первые месяцы года (соответственно 2,1 и 4,3%). То же явление наблюдалось для акций компаний Nokia, Panasonic и Philips. Для акций компаний Apple, Acer и Sharp ситуация противоположная.

Марковость временных рядов доходностей цен акций компаний электронного сектора представляется естественной в силу высокой динамичности сектора. Нарушение ее для компаний Ситроникс, Армада, Toshiba мы объясняем большой зависимостью цен акций от экзогенных факторов, в частности – влиянием макроэкономических процессов. В то же время отсутствие марковости доходностей акций компаний нефтегазового сектора представляется естественным, поскольку производственный процесс в этой отрасли не столь динамичен.

Наличие марковости позволяет формировать достаточно точный краткосрочный прогноз цены акций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вистелиус А.Б. (1980). Основы математической геологии (определение предмета, изложение аппарата). Л.: Наука.

Поступила в редакцию
29.11.2013 г.

Prediction of Shares Price as Markov Chain

E.M. Bronshtein, A.I. Avzalova

The authors consider Markov property for time series of stock prices. When the hypothesis of Markov property absence is not rejected, the prediction procedure is proposed for short-term stock price.

Keywords: Markov chains, prediction, stocks.

JEL Classification: G17.