
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ
ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛАКУНЫ**

© 2015 г. Н.Б. Баева, Е.В. Куркин

(Воронеж)

В статье рассмотрены подходы, позволяющие выявить и оценить влияние неоднородных элементов на экономическую систему региона; введено понятие производственной лакуны. Также выявлены некоторые аспекты изменения масштаба производственной лакуны, влияющие на экономику региона.

Ключевые слова: производственная лакуна, масштаб лакуны, региональная экономическая система, неоднородная система, описатель системы, межотраслевой баланс.

Классификация JEL: C670, C590.

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития экономики регионов при моделировании их развития приходится иметь дело с элементами, создающими неоднородность в общей структуре системы. Применительно к региональной экономической системе речь идет о хозяйствующих субъектах, организационно не подчиненных административному центру, использующих ресурсы своего региона, но они учитывают выпуск и платят налоги в других регионах. Группу таких хозяйствующих субъектов назовем *производственной лакуной* региона, впервые это понятие было введено в работах (Баева, Куркин, 2012, с. 138–148; Куркин, 2012, с. 162–167). Присутствие таких субъектов приводит к искажениям в статистической информации о валовом выпуске региона, о чем, в частности, упоминается в официальных статистических сборниках (см., например, (Воронежский статистический ежегодник, 2011, с. 18)). Производственная лакуна как элемент экономической системы региона вносит неоднородность в структуру элементов системы и связей с управляющим центром. В работе (Куркин, 2014, гл. 1, 4) приведены подходы к описанию неоднородной системы, исследованию производственной лакуны и оценке ее масштаба. Следует отметить, что в математике понятие *лакунарности* означает меру неоднородности заполнения объектом пространства. Ниже будет установлено соответствие между понятием лакунарности в математике и экономике региона.

Рассмотрим подробнее описание неоднородной системы экономики региона с позиции системного подхода. Под *экономической системой региона*, или *региональной экономической системой* (РЭС), будем понимать совокупность хозяйствующих объектов, расположенных на определенной территории с достаточно однородными природными условиями и характерной направленностью развития производительных сил, вступающих в отношения по поводу экономической деятельности и обладающих целостностью и единством.

Условимся под системой S понимать множество элементов E , находящихся в отношениях и связях R друг с другом, которое образует определенную целостность и единство (Баева, Ворогушина, Куркин, 2011, с. 4; БРЭ, 2003, с. 1437). Для описания систем будем использовать системные описатели, которые в простейшем случае задают элементный состав системы, связи между элементами и структуру системы

$$S = \langle (e_i, E), (r_{ij}, R), Cm(E, R) \rangle.$$

Здесь e_i – элемент i из множества E ; r_{ij} – отношения между элементами; $Cm(E, R)$ – образуемая элементами и их связями структура. Под элементом системы $e \in E$ мы понимаем условно неде-

лимую часть системы, определяемую на основе заранее введенных общих принципов, для которых известны основные характеристики. Связь $r \in R$ – некоторое отношение, возникающее между элементами. Структура системы $Sm(E, R)$ – совокупность элементов и соединяющие их связи (Баева, Ворогушина, Куркин, 2011, с. 5). Структура системы отражает наиболее существенные взаимоотношения между элементами и их группами (подсистемами), которые мало меняются при изменениях в системе и обеспечивают существование системы и ее свойств. Структура является основой целостности системы и представляет собой мало изменяющуюся категорию.

1. КОНЦЕПЦИЯ, ПРИНЦИПЫ И ЛОГИКА ОПИСАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Будем считать систему *неоднородной*, если выполняется хотя бы одно из условий:

- составляющие ее элементы неоднотипны;
- элементы не одинаковые по размеру (мощности), а также наличие доминирующего элемента;
- связи между элементами разнородные;
- для части элементов не могут быть указаны связи с другими элементами системы, но известно, что эти элементы взаимодействуют с другими.

Допустим, что каждый элемент может быть охарактеризован мощностью $|e_i|$, $i = 1, \dots, n$, причем мощности неоднотипных элементов могут быть исчисляемы в различных единицах измерения. Пусть с помощью коэффициентов w_i , $i = 1, \dots, n$ мы можем привести их к единой шкале, тогда для элементов неоднородной системы выполняется соотношение $w_1 |e_1| \leq \dots \leq w_n |e_n|$.

Вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ – с наименьшим модулем, для него выполняется соотношение $\rho_1 w_1 |e_1| = \dots = \rho_n w_n |e_n|$, называемое *вектором неоднородности*. Его длина, разделенная на число элементов, $|\rho| = \sqrt{\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2} / n$, называется *индексом неоднородности системы*.

Влияние внешней среды на систему будем учитывать с помощью специального элемента e_L , для которого не могут быть непосредственно указаны связи с другими элементами в силу особенностей влияния внешней среды. Система в этом случае, даже если все другие элементы e_i , $i = 1, \dots, n$ были однородными, становится неоднородной и требует особого описателя. Простейший описатель может быть записан как $S = \langle (e_i, E), (r_{ij}, R), Sm(e, r); e_L \rangle$. Описатель функционирующей системы с неоднородными элементами, преобразующей набор входных параметров I и состояние системы Z в выход системы X , может быть записан как $S_\Phi = \langle S_{\text{исх}}; I; X; F(I, Z); (e_L; I_L; X_L) \rangle$. Здесь нет передаточной функции для e_L вследствие отсутствия данных у управляющего центра информации о функционировании внешней среды, но предполагается, что на основе исторических данных можно определить входные I_L и выходные X_L потоки для e_L .

Для динамической системы имеем следующий описатель с учетом неоднородных объектов:

$$S_t = \langle S_{\text{исх}}; (t_0, t, T); (I(t), G_I); (X(t) = F(I(t), Z(t))); (e_L, I_L(t), X_L(t)) \rangle, -$$

здесь введено системное время $t \in [t_0, T]$, где t_0 – начальное время, T – горизонт системного времени. Методика определения входных и выходных потоков для производственной лакуны будет рассмотрена ниже.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАСШТАБА ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛАКУНЫ

Примем в региональной экономической системе в качестве элементов $e_i \in E$ виды экономической деятельности. Набор хозяйствующих субъектов, составляющих производственную лакуну региона, выделим в отдельный элемент e_L . В региональной экономической системе для учета взаимосвязей R между элементами экономической системы, обусловленных процессами производства, распределения, потребления и накопления общественного продукта, используются

таблицы “затраты–выпуск” – межотраслевые балансы (МОБ). Входом РЭС являются различного рода начальные параметры функционирования и ограничения на изменяющиеся параметры, например начальный объем ресурсов. Состояние региональной экономической системы определяют те параметры, которые изменяются в процессе ее функционирования и определяют прямо или косвенно значение целевых функционалов системы. Передаточный функционал задается сложившимися основными экономико-производственными соотношениями системы.

Применительно к экономике региона введем следующее определение: под *производственной лакуной* (ПЛ) понимается совокупность субъектов хозяйственной деятельности, которые вступают в материальные, организационные и производственные отношения с другими хозяйствующими субъектами (ХС) региона, но организационно не подчинены административному центру и не зарегистрированы как юридические лица на территории региона. Производственную лакуну можно разделить на два вида (по совокупности составляющих ее ХС) с противоположными свойствами: внешняя ПЛ – совокупность хозяйствующих субъектов, зарегистрированных в других регионах, которые ведут производственную деятельность в регионе и не платят ему налогов (в частности, налога на добавленную стоимость), и внутренняя ПЛ – совокупность хозяйствующих субъектов своего региона, которые ведут деятельность за пределами региона, но платят налоги в регионе прописки. Внутренняя лакуна одного региона является внешней для другого. Обособленное положение внешних и внутренних хозяйствующих субъектов диктует необходимость выявления их вклада в развитие региона.

Для оценки масштаба ($X_L(t)$, $Y_L(t)$) лакуны региона необходимо, с нашей точки зрения, предварительно определить экономический потенциал региона и уровень использования экономического потенциала региона, а также разработать модели и методы расчета характеристик производственной лакуны региона.

Первые две проблемы могут быть решены на основе анализа недоиспользования экономического потенциала и особым образом составленного межотраслевого баланса (Баева, Ворогушина, 2012).

Для решения третьей проблемы ниже приводится специальным образом составленная табл. 1, которая позволяет выявить масштаб производственной лакуны.

В табл. 1, наряду с n видами экономической деятельности, присутствует производственная лакуна, представленная как дополнительный $n + 1$ элемент. Аналогично базовому варианту МОБ x_{ij} , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n + 1$ присутствует поток ресурсов в денежном выражении из элемента i (вида экономической деятельности, лакуны) в j ; Y_i , $i = 1, \dots, n$ – конечный продукт вида экономической деятельности или лакуны; Z_j , $j = 1, \dots, n + 1$ – чистый продукт; X_j , $j = 1, \dots, n + 1$ – валовой выпуск. Анализируя $n + 1$ столбец таблицы, можно определить структуру выпуска производ-

Таблица 1. МОБ с выделением лакуны

Столбец	Строка								
	1	...	n	$n+1$	1	...	n_Y	КП	ВП
1	x_{11}	...	x_{1n}	$x_{1,n+1}$	y_{11}	...	y_{1,n_Y}	$Y_1 = \sum y_{1k}$	X_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	...	x_{nn}	$x_{n,n+1}$	y_{n1}	...	y_{n,n_Y}	$Y_n = \sum y_{nk}$	X_n
$n + 1$	$x_{n+1,1}$	...	$x_{n+1,n}$	$x_{n+1,n+1}$	$y_{n+1,1}$	...	y_{n+1,n_Y}	$Y_{n+1} = \sum y_{n+1,k}$	X_{n+1}
1	z_{11}	...	z_{1n}	$z_{1,n+1}$					
...	...	...	...	...					
n_Z	$z_{nz,1}$	...	$z_{nz,n}$	$z_{nz,n+1}$					
ЧП	$Z_1 = \sum z_{i1}$	...	$Z_n = \sum z_{in}$	$Z_{n+1} = \sum z_{i,n+1}$					
ВП	X_1	...	X_n	X_{n+1}					

Примечание. В таблице цветом выделены строка и столбец, формирующие вклад производственной лакуны в общий выпуск и затраты.

ственной лакуны по видам экономической деятельности. Аналогично – по $n + 1$ строке можно понять структуру затрат производственной лакуны.

Приведем формулы для нахождения структуры затрат и выпуска лакуны. Опираясь на основные балансовые соотношения, можем вывести выражение для определения распределения выпуска лакуны

$$x_{i,n+1} = X_i - Y_i - \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

и аналогично можно вывести формулу структуры затрат лакуны

$$x_{n+1,j} = X_j - Z_j - \sum_{i=1}^n x_{ij}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Формулы (1), (2) также могут быть переписаны в терминах коэффициентов распределения:

$$x_{i,n+1}(t) = X_i(t) - Y_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{n+1,j}(t) = X_j(t) - Z_j(t) - \sum_{i=1}^n h_{ij} X_i(t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

В приведенных соотношениях коэффициенты a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ – коэффициенты прямых затрат, а h_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ – коэффициенты распределения.

В табл. 2 приводится специальным образом составленная таблица межотраслевого баланса региона.

В табл. 2 масштаб производственной лакуны определялся по формулам (1), (2). Анализируя величины выпуска лакуны $x_{i,n+1}$, $i = 1, \dots, n$, делаем вывод, что в обрабатывающих производствах, сельском хозяйстве и оптовой и розничной торговле доминирует внешняя лакуна и имеет место занижение валового регионального продукта по данным видам деятельности, в то время как в производстве и распределении электроэнергии, газа и воды, строительстве, транспорте и связи преобладает внутренняя производственная лакуна. В структуре затрат отмечается доминирование внутренней лакуны в транспорте и связи, по остальным видам экономической деятельности преобладает внешняя лакуна, использующая ресурсы не своего региона.

Отметим, что поток лакуны $x_{i,n+1}(t)$, $i = 1, \dots, n$ состоит из двух частей: лакуны, представленной хозяйствующими субъектами, головные офисы которых расположены вне региона, и лакуны, представленной хозяйствующими субъектами региона, но ведущими деятельность вне “нашего” региона. Другими словами, первая часть использует ресурсы региона, но валовой выпуск учитывается в стороннем регионе, здесь имеет место занижение (за счет вывоза продукции, произведенной внешней лакуной, из “нашего” региона) размера валового выпуска региона. Вторая часть ХС, напротив, завышают валовой выпуск региона, за счет того, что часть хозяйствующих субъектов расположена вне региона, использует сторонние ресурсы, но ведет учет в “нашем” регионе.

Таким образом, можно записать, что $x_{i,n+1}(t) = \tilde{x}_{i,n+1}(t) - \bar{x}_{i,n+1}(t)$, $i = 1, \dots, n$, где $\bar{x}_{i,n+1}(t)$ – величина выпуска, уходящая из региона за счет внешней лакуны, а $\tilde{x}_{i,n+1}(t)$ – величина выпуска, входящая в регион за счет внутренней лакуны. Аналогичные рассуждения можно провести и для затрат

$$x_{n+1,i}(t) = \bar{x}_{n+1,i}(t) - \tilde{x}_{n+1,i}(t), \quad i = 1, \dots, n$$

с той разницей, что внутренняя лакуна за счет использования ресурсов другого региона занижает отражаемые в нашем регионе затраты, в то время как внешняя их завышает.

Получив набор величин $x_{i,n+1}(t)$, характеризующих величину выпуска производственной лакуны в каждом виде экономической деятельности региона, можно получить степень лакунарности выпуска в конкретном виде экономической деятельности (ВЭД) – меры неод-

Таблица 2. Расширенная таблица межотраслевого баланса за базовый год с выделением производственной лакуны (млн руб.)

№ п/п	Показатель	Номер показателя						Y_i	X_i
		1	2	3	4	5	6		
1	Обрабатывающие производства	9590,93	2051,48	5373,00	4113,39	2740,73	2759,47	36904,70	51015,60
2	Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	1326,41	410,30	501,48	738,30	1187,65	871,41	8525,90	13676,50
3	Сельское хозяйство	4438,36	615,44	1361,16	52,74	18,27	1960,68	35580,30	35820,00
4	Оптовая и розничная торговля	2652,81	423,97	2077,56	5326,31	5481,45	4538,60	41859,20	52735,70
5	Строительство	4234,30	369,27	179,10	738,30	475,06	544,63	10384,20	18271,50
6	Транспорт и связь	5917,81	1258,24	788,04	1160,19	493,33	544,63	3748,70	36308,80
6+1	Лакуна	7930,85	6467,24	19229,60	35189,14	6278,43	-4009,10		
	Прибыль	9690,60	426,80	2808,30	1012,60	729,00	1151,10		
	Норма амортизации (средняя)	3219,35	1194,02	2160,77	2570,09	138,07	26805,40		
	Труд	2014,19	459,76	1340,99	1834,65	729,52	1141,98		
	Валовой выпуск	51015,60	13676,50	35820,00	52735,70	18271,50	36308,80		

Примечание. В таблице цветом выделены строка и столбец, формирующие вклад лакуны в МОБ.

нородности выпуска экономической системы региона в ВЭД. Для этого введем величины $x_{i,n+1}/\sum_{j=1}^n x_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ с наименьшим модулем, для которого верно равенство $\rho_1 x_{1,n+1}/\sum_{j=1}^n x_{1j} = \dots = \rho_n x_{n,n+1}/\sum_{j=1}^n x_{nj}$ и который называется *вектором неоднородности*, а величина $|\rho| = \sqrt{\rho_1^2 + \dots + \rho_n^2}/n$ – *мерой неоднородности системы*. Аналогично определяется *лакунарность* затрат ВЭД, для чего вводятся величины $x_{n+1,j}/\sum_{i=1}^n x_{ij}$, $i = 1, \dots, n$. Введенные величины позволяют производить оценку неоднородности элементного состава региона для принятия решений о возможной реструктуризации присутствия производственной лакуны, а также сравнивать показатели разных регионов.

3. РЕСТРУКТУРИЗАЦИЯ ПРОПОРЦИЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛАКУНЫ

Необходимость в изменении влияния внешней среды, т.е. объема присутствия в регионе внешней производственной лакуны по отношению к внутренней, может возникнуть, например, в случае неблагоприятной ситуации в сфере занятости в каком-либо виде экономической деятельности. Если, например, в регионе наблюдается нехватка рабочей силы в определенном виде экономической деятельности, то расширение присутствия внешней лакуны будет нецелесообразным, в то время как размещение производства данного вида деятельности в другом регионе будет являться действенной мерой, направленной на уменьшение диспропорций в производстве. Напротив, если в регионе наблюдается переизбыток трудовых ресурсов по какому-либо виду экономической деятельности, то привлечение внешней лакуны поможет снизить безработицу в этой сфере экономики. Таким образом, управление лакуной выглядит перспективной мерой для разрешения ряда задач, связанных с управлением развития экономики региона.

Реструктуризация пропорций в производственной лакуне может также потребоваться в случае необходимости изменения объема собираемых налоговых отчислений на добавленную стоимость. Расширение присутствия внутренней лакуны способствует приросту собираемых налогов без дополнительной нагрузки на ресурсы региона.

Поскольку производственная лакуна отчасти является неподконтрольным административному центру элементом экономической системы региона, необходимо разработать *опосредованные* методы влияния на нее с целью реструктуризации пропорций между внутренней и внешней лакунами, требующей серьезных решений. Для этого приведем основные параметры, от которых зависит привлекательность региона с точки зрения размещения в нем сторонних хозяйствующих субъектов – производственной лакуны.

Логичной выглядит зависимость привлекательности региона от стоимости ресурсов в регионе. Для трудовых ресурсов введем величину $l(t)$, отражающую средний уровень оплаты труда, сложившийся в регионе в период времени t ; $R(t)$ – показатель, отражающий стоимость основных ресурсов в регионе (электроэнергия, вода, аренда земли и т.п.). Привлекательность региона для производственной лакуны обратно пропорциональна введенным величинам.

К характеристикам, которые прямо влияют на величину привлекательности региона, можно отнести общий валовой выпуск $X(t)$ региона и численность его населения $P(t)$, являющиеся характеристиками его экономической мощности (табл. 3). Таким образом, можно ввести *функцию привлекательности региона*, характеризующую величину изменения привлекательности региона с позиции размещения в нем производства сторонними (из внешней среды) хозяйствующими субъектами:

$$\bar{X}_{n+1}(t) = f_{atr}(X(t), P(t), l(t), R(t)). \quad (5)$$

Таблица 3. Характер влияния параметров системы на производственную лакуну

Параметр	Валовой выпуск	Численность населения	Средняя заработная плата	Стоимость ресурсов
Приращение аргумента	$\Delta X(t) > 0$	$\Delta P(t) > 0$	$\Delta l(t) > 0$	$\Delta R(t) > 0$
Изменение внешней лакуны	$\bar{X}_{n+1}(t) \geq 0$	$\bar{X}_{n+1}(t) \geq 0$	$\bar{X}_{n+1}(t) \leq 0$	$\bar{X}_{n+1}(t) \leq 0$
Изменение внутренней лакуны	$\tilde{X}_{n+1}(t) \leq 0$	$\tilde{X}_{n+1}(t) \leq 0$	$\tilde{X}_{n+1}(t) \geq 0$	$\tilde{X}_{n+1}(t) \geq 0$

Таким образом, в работе рассмотрена открытая неоднородная региональная экономическая система. Региональная система рассматривается как набор элементов – видов экономической деятельности со связями, обусловленными движением продукции между элементами. Одним из ключевых моментов исследования является обнаружение такого малоизученного явления, как производственная лакуна региона – совокупность элементов в системе, имеющих свои интересы, вообще говоря, не совпадающих с интересами управляющего центра системы. В работе выявлена структура производственной лакуны региона, введены выражения для определения ее масштаба и скорости роста в зависимости от прочих параметров, от которых зависит производственная лакуна региона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Баева Н.Б., Ворогушина Д.В.** (2012). Математические методы оценки и наращивания экономического потенциала региона. Воронежский государственный университет. Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета.
- Баева Н.Б., Ворогушина Д.В., Куркин Е.В.** (2011). Основы теории систем и вычислительные схемы системного анализа. Воронеж: ВГУ.
- Баева Н.Б., Куркин Е.В.** (2012). Математические методы оценки производственной лакуны региона // *Современная экономика: проблемы и решения*. № 11(35). С. 138–148.
- Воронежский статистический ежегодник (2011). Стат. сб. (2011). Воронеж: Воронежстат.
- Куркин Е.В.** (2012). Математические методы учета лакун региональной экономической системы. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной конференции. Воронеж, 26–28 ноября 2012 г. Часть 2. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ. С. 162–167.
- Куркин Е.В.** (2014). Математические методы поддержки процесса перехода региональных экономических систем в режим устойчивого развития: дисс. на соискание степени кандидата физико-математических наук. Воронеж.
- Система (2003). В кн.: «*Большой российский энциклопедический словарь*». М.: БРЭС. С. 1437.

Поступила в редакцию
13.10.2014 г.

Mathematical Methods to Research Properties of Production Lacunae

N.B. Bajeva, Ye.V. Kurkin

Approaches allow identifying and evaluating the influence of inhomogeneous elements on the regional economic system are considered, the concept of production lacuna is introduced. Also some aspects of production lacuna scope change on regional economic are identified.

Keywords: production lacuna, scale of lacuna, regional economic system, inhomogeneous system, system describer, input–output model.

JEL Classification: C670, C590.