МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЛОЖЕНИИ ТЕЛА В ОКТАЭДР

© 2015 г. А.А. Вотяков

(Москва)

Чтобы правильно оценить стоимость природного кристалла, надо знать, какие изделия можно изготовить из него. Говоря языком математики, в геометрическое тело, имеющее форму кристалла, необходимо вложить тело, имеющее форму изделия. Вложение бриллианта в октаэдр — это классическая проблема технологии производства ювелирных изделий, алгоритмы решения которой исследованы в настоящей работе. Задача вложения сведена к задаче линейного программирования. Осуществлена оценка сложности алгоритмов. Доказано, что сложность алгоритмов вложения тела в кристаллы, относящиеся к классу октаэдров, линейно зависит от числа граней кристалла.

Ключевые слова: природные кристаллы, алмаз, Куллинан, октаэдр, вложение в октаэдр, невязка, аффинный инвариант, критерий совместности, округлый октаэдр, условия непротиворечивости, оценка сложности.

Классификация JEL: C610.

1. ВВЕДЕНИЕ

Природные кристаллы могут обладать огромной стоимостью, а операции обработки необратимы. Первой операцией, с которой начинается обработка кристалла и от которой зависит его дальнейшая судьба, – разделение на части.

Самый крупный природный кристалл алмаза «Куллинан», найденный 25 января 1905 г., весил 3106 карат. Камень был подарен королю Эдуарду VII в день рождения, 9 ноября 1907 г. Камень решили огранить, для чего изготовили 5 точных копий «Куллинана» из стекла. Четырем ювелирным фирмам была представлена возможность предложить свой вариант обработки уникального камня, и одна копия осталась для музея. 23 января 1908 г. камень был передан для огранки амстердамской фирме «И.И. Ассер и К°». Согласно плану обработки, предложенному фирмой, камень следовало расколоть по имевшейся на нем трещинке на две части. Как поведет себя огромный кристалл, можно было только гадать. 10 февраля 1908 г. было осуществлено раскалывание. Лучший огранщик фирмы Йозеф Аскер закрепил кристалл, сделал засечку, установил вдоль нее специальную стамеску, нанес точно выверенный удар и потерял сознание. Наличие в камне трещинки — признак того, что материал камня напряжен, поэтому от удара он мог обесцениться, разлетевшись на мелкие части. Его сознание было не готово увидеть это.

Придя в себя, Йозеф Аскер увидел сияющие лица и вскоре смог встать на ноги. Камень раскололся идеально — на две части, весившие 2029,94 и 1068,09 карата. Вся работа по огранке «Куллинана» была завершена в ноябре 1908 г., а камни переданы заказчику.

Распиливание и раскалывание необратимы, поэтому, прежде чем разделить кристалл, его тщательно изучают, чтобы выяснить, что из него можно изготовить, какие конкретные изделия можно вложить в кристалл и сколько они будут стоить. Однако изготавливать для этого стеклянные копии в условиях массового производства нецелесообразно, современные вычислительные средства позволяют сделать электронное моделирование формы кристаллов и процессов вложения изделия в кристалл.

В настоящей работе рассматривается простейшая нетривиальная форма природных кристаллов — октаэ др, а также ее естественные математические обобщения.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОКТАЭДРА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВЛОЖЕНИЕ В ОКТАЭДР

Идеальный октаэдр - это одно из платоновых тел, имеющее восемь граней (восьмигранник). На рис. 1 показано, что изображенное на нем тело является общей частью (пересечением) четырех слоев:

$$-1 \le -x + y + z \le 1,$$

$$-1 \le x - y + z \le 1,$$

$$-1 \le x + y - z \le 1,$$

$$-1 \le -x - y - z \le 1,$$
(1)

т.е. множеством допустимых решений системы неравенств (1).

Идеальный октаэдр неплохо выглядит, однако идеальные кристаллы крайне редко встречаются в природе. Природа, плотно упаковывая атомы друг к другу, следит только за углами

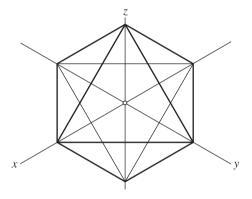


Рис. 1. Октаэдр в кристаллографических осях координат

между гранями. Поэтому математической моделью природного октаэдра является множество допустимых решений системы неравенств

$$a_{1} \leq -x + y + z \leq b_{1},$$

$$a_{2} \leq x - y + z \leq b_{2},$$

$$a_{3} \leq x + y - z \leq b_{3},$$

$$a_{4} \leq -x - y - z \leq b_{4}.$$
(2)

По определению, каждое допустимое решение системы неравенств (2) — точка, вложенная в октаэдр (2). Вложению множества точек соответствует ситуация, при которой каждая точка является допустимым решением системы неравенств (2). Для изделий, изготавливаемых на ограночном диске, поверхность готового изделия образована вершинами, ребрами и плоскими многоугольниками.

Если каждая вершина изделия $\{(x_j, y_j, z_j) \mid j = 1, ..., m\}$ – допустимое решение системы (2), то изделие оказывается вложенным в кристалл.

Действительно, если все вершины изделия – допустимые решения системы (2), то автоматически выполняются соотношения

$$a_{1} \leq a'_{1} \leq -x + y + z \leq b'_{1} \leq b_{1},$$

$$a_{2} \leq a'_{2} \leq x - y + z \leq b'_{2} \leq b_{2},$$

$$a_{3} \leq a'_{3} \leq x + y - z \leq b'_{3} \leq b_{3},$$

$$a_{4} \leq a'_{4} \leq -x - y - z \leq b'_{4} \leq b_{4},$$
(3)

где

$$a'_{1} = \min\{-x_{j} + y_{j} + z_{j} \mid j = 1, ..., m\},$$

$$a'_{2} = \min\{x_{j} - y_{j} + z_{j} \mid j = 1, ..., m\},$$

$$b'_{1} = \max\{-x_{j} + y_{j} + z_{j} \mid j = 1, ..., m\},$$

$$b'_{2} = \max\{x_{j} - y_{j} + z_{j} \mid j = 1, ..., m\},$$

$$b'_{3} = \max\{x_{j} + y_{j} - z_{j} \mid j = 1, ..., m\},$$

$$b'_{3} = \max\{x_{j} + y_{j} - z_{j} \mid j = 1, ..., m\},$$

$$b'_{4} = \max\{-x_{i} - y_{i} - z_{i} \mid j = 1, ..., m\}.$$

Значит, вместе с изделием в октаэдр (2) вкладывается октаэдр

$$a'_{1} \leq -x + y + z \leq b'_{1},$$

$$a'_{2} \leq x - y + z \leq b'_{2},$$

$$a'_{3} \leq x + y - z \leq b'_{3},$$

$$a'_{4} \leq -x - y - z \leq b'_{4},$$
(4)

являющийся *кристаллической моделью изделия*, размеры которого невозможно изменить, потому что каждая из восьми граней (4) касается изделия. Верно и обратное. Каждый раз, когда *кристаллическую модель изделия* (4) удается вложить в кристалл (2), содержащееся в модели изделие оказывается вложенным в (2) автоматически.

Имеется *реальное сырье* — материальные тела, поверхность которых образована плоскими гранями: кубы, октаэдры, ромбододекаэдры и др. В данной работе — это октаэдры; в общем случае — трехмерный многогранник

$$\mathbf{a} \le \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}.\tag{5}$$

Помимо сырья, имеются вычисляемые *кристаллические модели изделия* — трехмерные многогранники того же самого типа, что и сырье, которые, во-первых, содержат в себе конкретное изделие, а, во-вторых, каждая из их граней касается изделия

$$-\mathbf{a}' \le \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}'. \tag{6}$$

Если изделие жестко привязано к кристаллической решетке сырья, то оно представлено одной моделью; в противном случае оно состоит из нескольких моделей – по одной на каждый вариант поворота. Ввиду того что *кристаллическая модель изделия* (6) – это один из элементов *технических условий*, связанных с изготовлением изделия, мы вправе потребовать, чтобы начало координат модели (6) совпадало с какой-то точкой изделия – *центром изделия* (в этом случае $0 \le \mathbf{a}', 0 \le \mathbf{b}'$).

При сложном ценообразовании, например в ювелирном производстве, когда стоимость изделия меняется скачком при переходе из одной весовой группы в другую, изделие, занимающее начало весовой группы, служит вариантом того же самого изделия, отличающегося ценой.

Задача. Имеется многогранник (5), представляющий кристалл, и множество кристаллических моделей изделия, являющихся многогранниками (6), каждый из которых обладает ценой, совпадающей с ценой изделия. Требуется выделить многогранник (6), обладающий максимальной ценой, который можно вложить в многогранник (5) параллельным переносом.

3. ВЛОЖЕНИЕ ТОЧКИ ВМЕСТО КРИСТАЛЛА

От вложения кристалла (6) в кристалл (5) до вложения точки (0, 0, 0) кристалла (6) в кристалл типа (5) нас отделяет один шаг. Срезая с граней кристалла (5) слои толщиной a'_i , b'_i , получаем остаток кристалла (5)

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' \le \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} - \mathbf{b}' - \tag{7}$$

ядро вложения.

Теорема. *Многогранник* (6) можно вложить в многогранник (5) тогда и только тогда, когда ядро вложения (7) непусто.

Доказательство. *Необходимость*. Предположим, что нам удалось вложить многогранник (6) в многогранник (5), тогда центр изделия должен отстоять от граней (5) не ближе, чем от граней вложенного многогранника (6), что и выражено в каждом из неравенств системы (7). Значит, центр является решением системы неравенств (7), следовательно, она совместна.

 \mathcal{L} остаточность. Предположим, что ядро вложения непусто, тогда для некоторого вектора $\mathbf{x'}$ выполняется соотношение

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' \le \mathbf{A}\mathbf{x'} \le \mathbf{b} - \mathbf{b}'. \tag{8}$$

Перемещая начало координат системы (6) в точку х', приходим к неравенству

$$-\mathbf{a}' \le \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \le \mathbf{b}'. \tag{6'}$$

Складывая соотношения (8) и (6'), получаем для каждого допустимого решения \mathbf{x} системы (6') соотношение $\mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, свидетельствующее о том, что каждое решение системы неравенств (6') является решением системы неравенств (5), а это значит, что (6) вложено в (5).

4. НЕВЯЗКИ И КРИТЕРИИ

При работе с кристаллами приходится иметь дело с двумя системами координат — внешней, относительно которой задается представление кристалла в виде системы линейных неравенств (5), и внутренней — (6), относительно которой фиксируется положение дефектов (пороков), в той или иной мере присущих каждому природному кристаллу.

Основная характеристика внутренней системы координат – расстояние до грани, а основная функция – расстояние до границы полупространства, естественное обобщение которой принято называть *невязкой*. Полупространству

$$b \le a_x x + a_y y + a_z z \tag{9}$$

соответствует невязка

$$a_x x + a_y y + a_z z - b, \tag{10}$$

принимающая нулевые значения на грани, положительные во внутренних точках полупространства и отрицательные в остальных случаях.

Складывая различные невязки, мы получаем в некоторых случаях результат, не зависящий от $(x, y, z) - a \phi \phi$ инный инвариант. Неотрицательные элементы этого класса функций будем называть $a \phi \phi$ инными критериями.

Простейший критерий – *толщина слоя*. Два полупространства определяют множество, которое принято называть слоем

$$a_0 \le a_x x + a_y y + a_z z \le b_0, \tag{11}$$

его граням соответствуют две невязки

$$a_x x + a_y y + a_z z - a_0,$$
 (12)

$$-a_x x - a_y y - a_z z + b_0, (13)$$

сумма которых является критерием — в любой точке (x, y, z) она равна

$$b_0 - a_0.$$
 (14)

Формально она может принимать отрицательные значения, однако это означает, что формирующая ее система ограничений (11) не имеет решений (противоречива). Соответственно, система неравенств (2) несовместна, если хотя бы один из четырех критериев

$$0 \le \mathbf{L}_{1} = b_{1} - a_{1},$$

$$0 \le \mathbf{L}_{2} = b_{2} - a_{2},$$

$$0 \le \mathbf{L}_{3} = b_{3} - a_{3},$$

$$0 \le \mathbf{L}_{4} = b_{4} - a_{4}$$
(15)

не выполняется. Однако это еще не все, складывая 4 неравенства системы (2), получаем

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \le 0 \le b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - \tag{16}$$

два дополнительных критерия совместности системы неравенств (2)

$$0 \le \mathbf{H}_1 = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4, 0 \le \mathbf{H}_2 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4.$$
(17)

Теорема 2. Октаэдр (2) непуст тогда и только тогда, когда

$$0 \le \mathbf{L}_1, \quad 0 \le \mathbf{L}_2, \quad 0 \le \mathbf{L}_3, \quad 0 \le \mathbf{L}_4, \quad 0 \le \mathbf{H}_1, \quad 0 \le \mathbf{H}_2.$$
 (18)

Доказательство. Проведенные выше рассуждения, связанные с выводом соотношений (15)—(17), доказывают необходимость выполнения этих условий, осталось доказать достаточность. Три слоя пересекаются по параллелограмму, тогда как два слоя дают в пересечении бесконечный брус. Значит, надо найти условия пересечения двух бесконечных брусов (рис. 2).

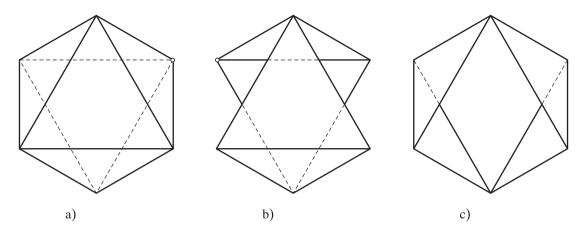


Рис. 2. Октаэдр – общая часть двух брусов **Примечание.** Поверхность октаэдра (рис. 2а) образована четырьмя парами параллельных граней. Из них две пары образуют брус, параллельный плоскости рисунка (рис. 2b); две оставшиеся пары (рис. 2c) – перпендикулярный.

Воспользуемся тем, что правильный октаэдр является *пересечением* (общей частью) двух бесконечных брусов. Формально этому представлению соответствует разбиение системы неравенств (2) на две подсистемы

$$a_1 \le -x + y + z \le b_1,$$

 $a_2 \le x - y + z \le b_2,$ (19)

$$a_3 \le x + y - z \le b_3,$$

 $a_4 \le -x - y - z \le b_4.$ (20)

Системы (19), (20) непусты, они определяют бесконечные брусы, параллельные плоскости X0Y. Брусы либо пересекаются, либо один из них лежит строго выше другого. Складывая неравенства системы (19), получаем следствие

$$a_1 + a_2 \le 2z \le b_1 + b_2 - \tag{21}$$

оценка по z для первого бруса. Аналогично, складывая неравенства системы (20), получаем следствие $a_3 + a_4 \le -2z \le b_3 + b_4$, которое после умножения на -1, превращается в оценку по z для второго бруса:

$$-b_3 - b_4 \le 2z \le -a_3 - a_4. \tag{22}$$

Два бруса не пересекаются, если $b_1 + b_2 < -b_3 - b_4$:

$$\mathbf{H}_2 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 < 0 - \tag{23}$$

либо при $-a_3 - a_4 < a_1 + a_2$:

$$\mathbf{H}_1 = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 < 0. \tag{24}$$

Соотношения (23), (24) противоречат условиям теоремы, следовательно, брусы (19), (20) пересекаются. ■

Следствие. Чтобы выяснить, можно ли вложить изделие M в многогранник (8), необходимо получить утвердительные ответы на шесть вопросов (18).

5. ОКРУГЛЫЙ ОКТАЭДР, УСЛОВИЯ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

Простейшим обобщением октаэдра (2) является округлый октаэдр (рис. 3):

$$a_{1} \leq -x + y + z \leq b_{1},$$

$$a_{2} \leq x - y + z \leq b_{2},$$

$$a_{3} \leq x + y - z \leq b_{3},$$

$$a_{4} \leq -x - y - z \leq b_{4},$$

$$a_{5} \leq x - y \leq b_{5},$$

$$a_{6} \leq x + y \leq b_{6}.$$
(25)

Подобно системе неравенств (2) система (25) естественно разделяется на две подсистемы

$$a_{1} \leq -x + y + z \leq b_{1},$$

$$a_{2} \leq x - y + z \leq b_{2},$$

$$a_{5} \leq x - y \leq b_{5},$$

$$a_{3} \leq x + y - z \leq b_{3},$$

$$a_{4} \leq -x - y - z \leq b_{4},$$

$$a_{6} \leq -x - y \leq b_{6},$$
(26)

матрицы которых переходят одна в другую при преобразовании x = -x, y = y, z = -z. Следовательно, рассуждения, которые доказаны для подсистемы (26), могут быть доказаны и для (27).

Вводя переменную u = -x + y, переписываем (26) в виде

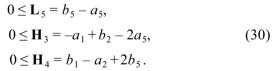
$$a_1 \le u + z \le b_1,$$

 $-b_2 \le u - z \le -a_2,$ (28)
 $a_5 \le -u \le b_5,$

складывая первое, второе и умноженное на 2 третье неравенства (28), получаем следствие

$$a_1 - b_2 + 2a_5 \le 0 \le b_1 - a_2 + 2b_5, \tag{29}$$

являющееся суммой трех строк, которое не зависит от (u, z). С системой (28) связаны три дополнительных критерия



Плоский аналог теоремы 2. Система (28) непуста тогда и только тогда, когда

$$0 \le L_1, \quad 0 \le L_2, \quad 0 \le L_5, \quad 0 \le H_3, \quad 0 \le H_4.$$
 (31)

Доказательство. Складывая первое и второе неравенства системы (28), получаем диапазон изменения переменной u:

$$(a_1 - b_2)/2 \le u \le (b_1 - a_2)/2.$$
 (32)

Третье неравенство системы (28) – готовый диапазон изменения для слоя

$$-b_5 \le u \le -a_5. \tag{33}$$

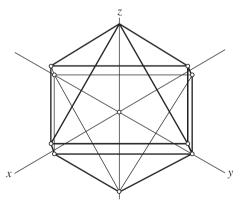


Рис. 3. Округлый октаэдр

Диапазоны (32), (33) не пересекаются только в двух случаях – либо когда

$$-a_5 < (a_1 - b_2)/2, \quad (\mathbf{H}_3 < 0),$$
 (34)

либо когда

$$(b_1 - a_2)/2 < -b_5, \quad (\mathbf{H}_4 < 0).$$
 (35)

Следовательно, при выполнении условий теоремы непустые полоса

$$-b_5 \le -u \le -a_5 \tag{36}$$

и параллелограмм

$$a_1 \le u + z \le b_1,$$

 $-b_2 \le u - z \le -a_2$ (37)

имеют непустое пересечение.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМУМА z

Первые два неравенства системы (28) определяют параллелограмм (36). Из него неравенство $-b_5 \le u \le -a_5$ вырезает многоугольник, который может быть трех-, четырех- пяти- или шестиугольником. На рис. 4 изображены три идентичных параллелограмма (геометрические места точек, на которых z может достигать максимума, выделены полужирной линией).

Случай 1 (рис. 4.1). Полоса содержит вершину параллелограмма, на которой z достигает максимума. Решение системы уравнений

$$u + z = b_1,$$

 $-u + z = b_2$ (38)

определяет вектор $(u, z) = (b_1 - b_2, b_1 + b_2)/2$; следовательно, $\max\{z\} = (b_1 + b_2)/2$.

Случай 2 (рис. 4.2). Вершина параллелограмма, на которой z достигает максимума, находится слева от полосы $(b_1-b_2)/2 < -b_5$. Это неравенство эквивалентно $2b_5+b_1-a_2 < b_2-a_2$, или $\mathbf{H}_4 < \mathbf{L}_2$. В этом случае максимум z является решением системы уравнений

$$-u + z = b_2,$$

$$u = b_5,$$
(39)

значит, вектор $(u, z) = (b_5, b_2 + b_5)$, следовательно, $\max\{z\} = b_2 + b_5$.

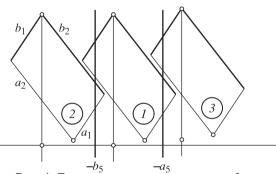


Рис. 4. Три положения *максимума z на брусе* относительно пятого слоя

Примечание. На рис. 4 и 6 изображен пятый слой и один и тот же параллельный ему брус в трех положениях относительно слоя. В положении 1 верхняя вершина бруса находится внутри слоя, в положениях 2 и 3 — вне слоя, соответственно слева и справа.

Случай 3 (рис. 4.3). Вершина параллелограмма, на которой z достигает максимума, находится справа от полосы $-a_5 < (b_1 - b_2)/2$. Это неравенство эквивалентно $-2a_5 + b_2 - a_1 < + b_1 - a_1$, или $\mathbf{H}_3 < \mathbf{L}_1$. В этом случае *максимум* z – решение системы

$$u + z = b_1, u = a_5,$$
 (40)

т.е. вектор $(u, z) = (a_5, b_1 - a_5)$; следовательно, $\max\{z\} = b_1 - a_5$.

В результате получаем схему вычисления максимума z, показанную на рис. 5.

Вычисление минимума *z* требует выполнения симметричной работы.

Случай 1 (рис. 6.1). Полоса содержит вершину параллелограмма, на которой z достигает минимума. Решая систему уравнений

$$u + z = a_1, -u + z = a_2,$$
 (41)

находим вектор $(u, z) = (a_1 - a_2, a_1 + a_2)/2$; следовательно, $\min\{z\} = (a_1 + a_2)/2$.

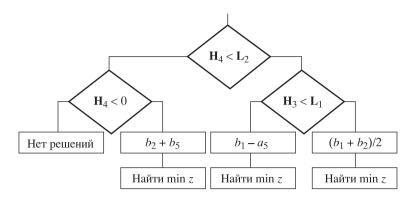
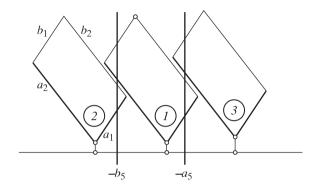


Рис. 5. Схема вычисления $\max\{z\}$ на общей части бруса и пятого слоя

Рис. 6. Три положения *минимума z на брусе* относительно пятого слоя



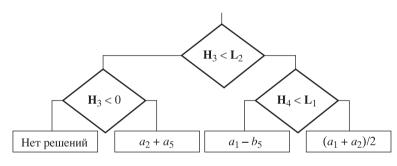


Рис. 7. Схема вычисления $\min\{z\}$ на общей части бруса и пятого слоя

Случай 2 (рис. 6.2). Вершина параллелограмма, на которой z достигает минимума, находится слева от полосы $(a_1-a_2)/2 < -b_5$. Это неравенство эквивалентно $2b_5-a_2+b_1 < b_1-a_1$, или $\mathbf{H}_a < \mathbf{L}_1$. В этом случае минимум z — решение системы уравнений

$$u + z = a_1,$$

 $-u = -b_5,$ (42)

следовательно, вектор $(u, z) = (b_5, a_1 - b_5)$, поэтому, $\min\{z\} = a_1 - b_5$.

Случай 3 (рис. 6.3). Вершина параллелограмма, на которой z достигает минимума, находится справа от полосы $-a_5 < (a_1 - a_2)/2$. Это неравенство эквивалентно $-2a_5 - a_1 + b_2 < b_2 - a_2$, или $\mathbf{H}_3 < \mathbf{L}_2$. В данном случае минимум z совпадает с решением системы

$$-u + z = a_2,$$

$$-u = -a_5,$$
(43)

т.е. вектор $(u, z) = (a_5, a_2 + a_5)$, следовательно, $\min\{z\} = a_2 + a_5$.

При помощи четырех вопросов мы не только вычисляем максимум z и минимум z, но и проверяем критерии $0 \le \mathbf{H}_3, \ 0 \le \mathbf{H}_4$. Начинать вычисления следует с проверки трех критериев: $0 \le \mathbf{L}_1, \ 0 \le \mathbf{L}_2, \ 0 \le \mathbf{L}_5$. Для проверки системы неравенств (26) и вычисления максимума и минимума z требуется получить ответы на 7 вопросов (рис. 7).

7. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ

В работе исследуются три вида природных монокристаллов алмаза. Плоскогранные октаэдры (8 граней). Округлые октаэдры, у которых вместо двух противолежащих ребер сформировались две дополнительные грани (всего: 10 граней). Округлые октаэдры, у которых вместо двух пар противолежащих ребер сформировались четыре дополнительные грани (всего: 12 граней). Этим видам монокристаллов соответствуют математические модели:

– плоскогранный октаэдр:

$$a_1 \le -x + y + z \le b_1$$
, $a_2 \le x - y + z \le b_2$,
 $a_3 \le x + y - z \le b_3$, $a_4 \le -x - y - z \le b_4$,

требующий проверки 6 критериев: $0 \le \mathbf{L}_1$, $0 \le \mathbf{L}_2$, $0 \le \mathbf{L}_3$, $0 \le \mathbf{L}_4$, $0 \le \mathbf{H}_1$, $0 \le \mathbf{H}_2$ для доказательства непротиворечивости модели;

– округлый октаэдр с одной парой дополнительных граней:

$$\begin{split} a_1 &\leq -x + y + z \leq b_1, \quad a_2 \leq x - y + z \leq b_2, \\ a_3 &\leq x + y - z \leq b_3, \quad a_4 \leq -x - y - z \leq b_4, \\ a_5 &\leq x - y \leq b_5, \end{split}$$

требующий ответа на 5 вопросов: $0 \le \mathbf{L}_1$, $0 \le \mathbf{L}_2$, $0 \le \mathbf{L}_3$, $0 \le \mathbf{L}_4$, $0 \le \mathbf{L}_5$, четырех вопросов для вычисления $\delta_1 = \min\{z\}$ и $\Delta_1 = \max\{z\}$ (значения $\delta_2 = (a_3 + a_4)/2 = \min\{z\}$ и $\Delta_2 = (b_3 + b_4)/2 = \max\{z\}$ уже известны) и двух вопросов на непересекаемость отрезков $[\delta_1, \Delta_1]$, $[\delta_2, \Delta_2]$ (итого: 11 вопросов);

– округлый октаэдр с двумя парами дополнительных граней:

$$\begin{aligned} a_1 &\leq -x + y + z \leq b_1, & a_2 \leq x - y + z \leq b_2, \\ a_3 &\leq x + y - z \leq b_3, & a_4 \leq -x - y - z \leq b_4, \\ a_5 &\leq x - y \leq b_5, & a_6 \leq x + y \leq b_6, \end{aligned}$$

требующий ответа на 6 вопросов: $0 \le \mathbf{L}_1, \ 0 \le \mathbf{L}_2, \ 0 \le \mathbf{L}_3, \ 0 \le \mathbf{L}_4, \ 0 \le \mathbf{L}_5, \ 0 \le \mathbf{L}_6$, четырех вопросов для вычисления $\delta_1 = \min\{z\}$ и $\Delta_1 = \max\{z\}$, четырех вопросов для вычисления $\delta_2 = \min\{z\}$ и $\Delta_2 = \max\{z\}$ и двух вопросов на непересекаемость отрезков $[\delta_1, \Delta_1], [\delta_2, \Delta_2]$ (итого: 16 вопросов).

Примеры трехмерных задач, обладающих n ограничениями, сложность которых растет по арифметической прогрессии, будут приведены в следующей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Смит Г. (1984). Драгоценные камни. М.: Мир.

Поступила в редакцию 04.06.2014 г.

On Optimal Embedding Body Octahedron

A.A. Votyakov

To properly assess the value of a natural crystal, it is necessary to know what products can be made from it. In the language of mathematics, it is necessary to put a body having a shape of a product into geometric body having the form of a crystal. Attachment diamond into octahedron – this is a classic problem of production technology jewelry algorithms solutions which are investigated in this paper. Embedding problem is reduced to a linear programming problem. The estimation of the complexity of algorithms is done. It is proved that the complexity of the algorithms in the attachment body crystals belonging to the octahedron classes depends linearly on the number of the crystal faces.

Keywords: natural crystals, diamond, the Cullinan, octahedron, embedding in an octahedron, the discrepancy, affine invariant, sharing criteria, rounded octahedron, terms of consistency, estimation of complexity.

JEL Classification: C610.