
ОТРАСЛЕВЫЕ ПРОБЛЕМЫ

**РЫНКИ КОНТЕКСТНОЙ РЕКЛАМЫ:
ПОДХОДЫ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ***

© 2015 г. А.С. Смирнов¹

(Москва)

В статье приводится обзор базовых подходов и теоретических моделей, отражающих особенности современного и активно развивающегося рынка контекстной рекламы в сети Интернет. Основное внимание в работе уделяется моделированию способов организации аукционов контекстной рекламы, а также их сравнительному анализу. Сравниваются различные теоретические способы формализации процесса в рамках статических и динамических игр с полной и неполной информацией, структурных моделей и моделей, учитывающих поведение пользователей. Данный раздел научной литературы является относительно новым, но уже привлек большое внимание ведущих мировых исследователей как благодаря высокой прикладной значимости вопроса, так и благодаря появлению новых теоретических вызовов для известной теории дизайна экономических механизмов.

Ключевые слова: теория аукционов, аукционы контекстной рекламы, маркетинг, реклама.

Классификация JEL: D44, M31, M37.

ВВЕДЕНИЕ

С момента возникновения Интернета, первых браузеров, а затем и первых поисковых сайтов прошло совсем немного времени, но число опубликованных за рубежом научных статей на тему интернет-аукционов контекстной рекламы стало значительным. Такой интерес к этой, на первый взгляд достаточно узкой, теме объясняется простым фактом: интернет-поисковики зарабатывают миллиарды долларов на проведении рекламных аукционов, а в процентном выражении выручка от этого вида деятельности составляет 90–95% доходов. Помимо огромного прикладного значения данная область привлекает многих исследователей-теоретиков, специалистов по экономическим механизмам и дизайну рынков, так как аукционы онлайн существенно отличаются по устройству от других аукционов, описанных в научной литературе.

В то же время в России практически отсутствуют публикации на эту, безусловно, актуальную, тему, поэтому в данной работе представлен обзор состояния проблемы, освещены известные на сегодня подходы и теоретические модели интернет-аукционов контекстной рекламы. Обсуждаются четыре основных направления в теоретическом моделировании обобщенного аукциона второй цены, отражающего процесс продажи позиций (иногда также условно называемых “местами”) размещения рекламы на сайтах интернет-поисковиков и сотрудничающих с ними компаний. Также рассматриваются сопутствующие прикладные аспекты, разъясняющие особенности описанных теоретических моделей².

ОСОБЕННОСТИ ФОРМАТА ИНТЕРНЕТ-АУКЦИОНОВ

Необходимо уделить внимание используемой далее терминологии, отражающей специфику интернет-аукционов контекстной рекламы. Все начинается с момента, когда пользователь вводит

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, грант Правительства РФ (договор № 14.U04.31.0002).

¹ Автор благодарит ведущего научного сотрудника лаборатории исследования социальных отношений и многообразия общества РЭШ Г. Косенка за постановку задачи, ценные советы и замечания по содержанию и изложению представленных в статье материалов.

² В статье сохранено большинство авторских обозначений цитируемых работ, однако для их унификации присутствуют незначительные изменения.

в поисковую строку сайта некоторую содержательную фразу, на основании которой автоматизированная система поискового сайта выбирает наиболее релевантные для данного пользователя рекламные объявления. Так как выбор объявлений связан с содержанием пользовательского запроса, такая реклама называется *контекстной*. Специально выделенные места на интернет-страницах поисковых сайтов обычно называют *позициями контекстной рекламы*. Для корректного выбора рекламных объявлений каждому из своих объявлений рекламодатель сопоставляет несколько ключевых слов (или фраз), наличие которых в запросе пользователя и определяет контекстную связь.

Более того, большинство рекламодателей имеет собственные интернет-сайты, поэтому их интересует не столько *показ рекламного объявления*, сколько реакция пользователя в виде *клика на рекламное объявление*, по результату которого пользователь переходит на сайт рекламодателя. Таким образом, плата за рекламное объявление взимается не за число его показов, а за число пользовательских кликов на это объявление.

Все рекламодатели конкурируют за ограниченное число позиций размещения контекстной рекламы, поэтому при каждом запросе пользователя необходим формальный механизм выбора нескольких объявлений из их (большого) множества. В качестве такого механизма обычно выбирается специальный аукцион.

После некоторых экспериментов с форматом его проведения³ на сегодня почти все поисковые сайты для продажи позиций контекстной рекламы используют так называемый *обобщенный аукцион второй цены*, или, сокращенно, GSP (generalized second-price auction). Условия его самого простого варианта состоят в следующем. В любой момент времени каждая компания делает ставки по некоторым ключевым словам или меняет уже сделанные по ним ставки. Далее при каждом поисковом запросе пользователя автоматизированный механизм поискового сайта выбирает список релевантных для данного запроса ключевых слов и тех компаний, которые разместили ставки по этим ключевым словам, а затем ранжирует их в порядке убывания сделанных по ним ставок. Если в итоговый список попадают объявления одной и той же компании, то все объявления компании, кроме находящегося на самой высокой позиции, удаляются из списка. Таким образом, на сайте появляются только те рекламные объявления, которые остались в списке после процедуры исключения. Далее, если по объявлению, размещенному на некоторой позиции, пользователь делает клик, то компания-владелец объявления платит за этот клик поисковому сайту цену, равную ставке компании, объявление которой по итогам аукциона расположилось на одну позицию ниже⁴.

В 2002 г. Google, а позднее, в 2007 г., и Yahoo! немного изменили данный формат. Для каждой пары “объявление – поисковый запрос” был введен специальный измеритель “результативности” – коэффициент CTR (click-through rate), равный вероятности клика на данное объявление пользователем, если это объявление было показано по конкретному поисковому запросу на верхней позиции. Теперь признаком ранжирования объявлений компаний стали не сами ставки, а их произведения на соответствующий CTR. Кроме того, платеж компании за клик по ее объявлению определялся не следующей по рангу ставкой, а произведением этой ставки на отношение его CTR к CTR объявления данной компании. Другими словами, теперь каждая компания платила за клик минимальную ставку, достаточную для того чтобы удержать данную позицию на экране при новых правилах ранжирования объявлений. Смысл нововведения состоял в том, что прибыль поискового сайта в конечном счете определяется не ценой, которую компания готова заплатить за клик, а числом кликов, умноженным на эту плату. Поэтому поисковый сайт заинтересован не только в высокой цене клика по показанным объявлениям, но и в большем числе кликов по ним, для чего и была введена поправка на CTR.

Все описанные особенности проведения аукционов на размещение контекстной рекламы на интернет-сайтах нашли отражение в теоретических моделях, представленных в статье.

³ Подробный экскурс в историю аукционов онлайн приведен в статье (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007).

⁴ Если компания в итоге оказалась на последнем месте в списке выведенных на экран, то она платит либо максимальную ставку среди ставок компаний, не пробившихся на экран, либо, если таких компаний не оказалось, заранее установленную поисковым сайтом резервную цену.

ПЕРВЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Работой, заложившей основы моделирования аукционов контекстной рекламы, является статья (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007), в которой предложены два подхода к построению формальной математической модели обобщенного аукциона второй цены.

Первый подход заключается в следующем⁵. Зафиксируем некоторое ключевое слово. Пусть за показы по нему на позициях $1, \dots, M$ конкурируют $N > M$ компаний. Для простоты предположим, что у каждой из них только одно объявление. Сопоставим каждой компании i ценность клика по ее объявлению v_i , где $i \in \{1, \dots, N\}$, т.е. полезность, которую компания получает в случае клика любым пользователем по ее объявлению⁶. Без ограничения общности можно считать, что компании нумеруются в порядке убывания ценности клика: $v_1 > \dots > v_N$. Позиции, за которые компании конкурируют, также предполагаются неоднородными по числу получаемых кликов в единицу времени: позиция $i \in \{1, \dots, N\}$ приносит α_j кликов, причем $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_M$. Через b_i обозначим ставку, сделанную компанией i в ходе аукциона. Наконец, для удобства обозначений введем функцию ранжирования $\varphi(i): \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, M\}$, определенную по правилу $\varphi(i) = \#\{t: b_t \geq b_i\}$.

Рассмотрим обобщенный аукцион второй цены с $\alpha_j = 1$ для $j \in \{1, \dots, M\}$ ⁷. Если после проведения аукциона компания с индексом i занимает на экране позицию $\varphi(i)$ и платит за каждый клик по своему объявлению p_i , то получаемая этой компанией чистая полезность составляет

$$U(i, v_i) = \alpha_{\varphi(i)}(v_i - p_i). \quad (1)$$

Подставляя выражение для цены клика как ставку компании, занимающей на одну позицию ниже, получаем

$$U(i, v_i) = \alpha_{\varphi(i)}(v_i - b_{\varphi^{-1}(\varphi(i)+1)}). \quad (2)$$

Исходя из (2), вектор ставок участников аукциона $(b_1, \dots, b_N)$ удовлетворяет условиям равновесия Нэша тогда и только тогда, когда выполнена система неравенств:

– для $i: 1 \leq \varphi(i) \leq M$:

$$\alpha_{\varphi(i)}(v_i - b_{\varphi^{-1}(\varphi(i)+1)}) \geq \alpha_j(v_i - b_{\varphi^{-1}(j+1)}) \quad \forall j > \varphi(i), \quad (3)$$

$$\alpha_{\varphi(i)}(v_i - b_{\varphi^{-1}(\varphi(i)+1)}) \geq \alpha_j(v_i - b_{\varphi^{-1}(j)}) \quad \forall j < \varphi(i), \quad (4)$$

$$\alpha_{\varphi(i)}(v_i - b_{\varphi^{-1}(\varphi(i)+1)}) \geq 0; \quad (5)$$

– для $i: M+1 \leq \varphi(i) \leq N$:

$$\alpha_j(v_i - b_{\varphi^{-1}(j)}) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq M. \quad (6)$$

Условия (3) и (4) означают, что компании i , получившей позицию $\varphi(i)$, невыгодно изменить свою ставку так, чтобы перейти на любую позицию выше или ниже позиции $\varphi(i)$ при неизменных ставках конкурентов. Условие (5) показывает, что фирмы, пробившиеся на имеющиеся M позиций на сайте, получают неотрицательную прибыль и не готовы снижать свою ставку так, чтобы их объявление вовсе не попало на экран. Условие (6), наоборот, означает, что при заданных равновесных ставках конкурентов компании, не пробившиеся на первые M позиций, не могут увеличить свою ставку так, чтобы их объявление было показано на одной из M позиций и при этом они имели бы положительную прибыль.

Система неравенств на ставки участников аукциона (3)–(6) определяет некое подпространство в R^N . Несложно показать, что при сделанных предположениях относительно последовательности $\{\alpha_j\}_{j=1}^{j=M}$ оно непустое. Другими словами, у данной формализации обобщенного аукциона второй цены всегда существует хотя бы одно равновесие Нэша. Однако в общем случае оно –

⁵ Этот подход также описан в статье (Varian, 2007).

⁶ Здесь предполагается, что ценность клика для каждой компании не зависит от того, на какой позиции находилось объявление, когда этот клик был получен.

⁷ Несмотря на такое упрощение, все результаты без труда обобщаются также и на случай произвольной последовательности $\{\alpha_j\}_{j=1}^{j=M}$.

не единственное. Действительно, пусть некий вектор ставок $(b_1, \dots, b_N)$ удовлетворяет условиям (3)–(6). Тогда, если мы произвольно увеличим, например, наибольшую из ставок b_1 , неравенства (3)–(6) останутся выполненными и новый вектор также будет являться равновесием. Для сужения множества возможных равновесий в работе (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007) введено следующее определение.

Определение. Равновесие обобщенного аукциона второй цены называется *локально свободным от зависти*⁸ (locally envy-free), если оно удовлетворяет условиям равновесия Нэша (3)–(6) и двум дополнительным условиям:

1) для i : $1 \leq \varphi(i) \leq M$ и $j < \varphi(i)$:

$$\alpha_{\varphi(i)}(v_1 - b_{\varphi^{-1}(\varphi(i)+1)}) \geq \alpha_i(v_i - b_{\varphi^{-1}(j+1)}); \quad (7)$$

2) для i : $M+1 \leq \varphi(i) \leq N$ и $1 \leq j \leq M$:

$$\alpha_j(v_1 - b_{\varphi^{-1}(j+1)}) \leq 0. \quad (8)$$

Смысл, стоящий за условием (7), заключается в следующем: компания, занимающая позицию $\varphi(i)$, не может выиграть, даже если поменяется позициями с любой компанией, находящейся выше нее на экране. В работе (Varian, 2007) причиной введения дополнительных условий (7)–(8) названо удобство вычислений: они позволяют вывести простые формулы для границ на равновесные ставки каждого участника аукциона, которые, в свою очередь, легко тестируются на реальных данных.

Из определения 1 следует, что любое равновесие, локально свободное от зависти, также является и обычным равновесием Нэша в обобщенном аукционе второй цены. Тем не менее введение новой концепции не решает проблему неединственности равновесия. Условия (7)–(8) лишь дополнительно ограничивают множество допустимых равновесий, но не делают его однотоочечным.

Среди всех локально свободных от зависти равновесий в работе (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007) особое внимание уделяется следующему вектору ставок:

$$b_i = \begin{cases} v_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}(v_i - b_{i+1}), & i \leq i \leq M, \\ v_i, & i > M. \end{cases} \quad (9)$$

Данный вектор является равновесием аукциона второй цены и обладает рядом отличительных особенностей.

Теорема 1. Следующие утверждения верны:

1) вектор ставок (9) является равновесием обобщенного аукциона второй цены, локально свободным от зависти;

2) в равновесии, определяемом соотношением (9), итоговые позиции и платежи участников идентичны итоговым позициям и платежам участников в равновесии в слабо доминирующих стратегиях механизма VCG⁹.

Второе утверждение теоремы 1 может показаться неожиданным. Действительно, равновесные стратегии (9), очевидно, не образуют равновесия механизма VCG в слабо доминирующих стратегиях¹⁰. Несмотря на это итоговые суммарные платежи каждой компании и их позиции на экране в данных механизмах совпадают.

Полученный выше результат подтверждает, что данное равновесие обладает рядом интересных свойств, однако не объясняет, почему среди всех равновесий обобщенного аукциона второй цены стоит ожидать, что именно оно реализуется на практике. Особенность данного рав-

⁸ В (Varian, 2007) такое равновесие называется симметричным.

⁹ Механизм Викри–Кларка–Гровса. См., например, (Mas-Colell, Whinston, Green, 1995, p. 876).

¹⁰ Напомним, что для каждого участника механизма Викри–Кларка–Гровса сообщить в качестве ставки истинную ценность своего клика является слабо доминирующей стратегией.

новесия демонстрируется во второй теоретической модели, также рассмотренной в (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007), где введено два изменения по сравнению с исходной моделью (1)–(6). Во-первых, предполагается, что в отличие от модели (1)–(6) игроки находятся в условиях неполной информации: каждая компания i знает ценность собственного клика v_i , но имеет только вероятностные представления о ценности кликов конкурентов. Во-вторых, обобщенный аукцион второй цены теперь проводится динамически, в соответствии со следующей аналогией. Пусть в начальный момент времени запускается таймер. В каждый момент времени каждая компания должна либо сообщить всем участникам о своем выходе из аукциона либо продолжать в нем участвовать. Аукцион заканчивается, когда все компании (кроме одной) прекращают в нем участвовать. Каждому участнику в качестве его итоговой ставки приписываются показания таймера на момент его выхода из аукциона. Как и раньше, каждая компания платит за клик ставку компании, вышедшей из аукциона перед ней. Данную концепцию аукциона в (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007) предложено называть *обобщенным английским аукционом*, или GE (generalized english).

Теорема 2. *Следующие утверждения верны:*

1) *в единственном совершенном байесовском равновесии обобщенного английского аукциона в непрерывных по v_i стратегиях оптимальная ставка для участника i с ценностью клика v_i при условии, что k участников уже выбыло из аукциона, а ставка последнего выбывшего игрока была b_{k+1} , определяется соотношением $b^*(k, b_{k+1}, v_i) = v_i - \alpha_k(v_i - b_{k+1})/\alpha_{k-1}$;*

2) *в равновесии, определяемом предыдущим соотношением, итоговые позиции и платежи участников идентичны итоговым позициям и платежам участников в равновесии в слабо доминирующих стратегиях механизма VCG;*

3) *данное равновесие есть равновесие ex post: стратегия каждого участника представляет собой наилучший ответ на стратегии остальных участников безотносительно реализации ценностей их кликов.*

Теорема 2 показывает, почему вектор ставок (9), определяющий одно из равновесий в статической модели, может считаться особенным: данный вектор ставок является единственным равновесием динамической игры в достаточно широком классе стратегий. Утверждение о равновесии ex post в теореме 2 означает, что даже если бы каждый участник аукциона знал реализацию ценностей кликов остальных участников, то никто не изменил бы своих ставок в одностороннем порядке. Таким образом, данное равновесие в некотором смысле еще и динамически устойчиво.

Последующие статьи разных авторов развивали идеи (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007) в двух направлениях. В одних работах авторы ослабляли предпосылки, сделанные в теоретических моделях этой статьи. Например, (Borgers, Cox, Pesendorfer, Petricek, 2008) приводят доказательства существования и единственности равновесия в случае произвольной последовательности $\{\alpha_j\}_{j=1}^{j=M}$ при $M = 3$. В других – исследователи интересовались практическими вопросами механизмов формирования рынков в рамках описанной теоретической модели. Так, в (Edelman, Schwarz, 2006; Ostrovsky, Schwarz, 2009) доказано, что оптимальным аукционом по продаже клика по одному ключевому слову является обобщенный аукцион второй цены с некоторой ненулевой резервной ценой.

Наконец, стоит отметить и работу (Cary et al., 2013), в которой продемонстрировано, что равновесные стратегии различных формальных динамических моделей обобщенного аукциона второй цены сходятся к равновесию (9). Это еще раз подчеркивает его особенность и обосновывает использование статических (однопериодных) моделей в качестве хорошего приближения к реальным аукционам контекстной рекламы.

МОДЕЛЬ СТРАТЕГИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Иную теоретическую модель можно увидеть в работе (Athey, Nekipelov, 2009). Модель по-прежнему представляет собой статическую игру, однако дополнительно учитывает два важных источника стратегической неопределенности для компаний, участвующих в аукционе.

Во-первых, в реальности компании размещают ставки по ключевым словам, которые могут быть привязаны автоматизированной системой к различным запросам пользователей и, соответственно, быть в разной степени релевантными для этих запросов. Поэтому, размещая свою ставку, рекламодатель не знает наверняка, по какому запросу в итоге покажется его реклама и какой CTR будет присвоен его объявлению. Аналогично их CTR неизвестны и остальным участникам аукциона, поэтому у каждой компании есть только вероятностные представления о том, с какими весами будут учтены в том или ином аукционе ставки всех его участников.

Во-вторых, так как запросы по данному ключевому слову, если оно достаточно популярно, происходят каждые несколько секунд, то компании не могут знать полного списка участников в каждом конкретном аукционе. Некоторые компании могут периодически входить и выходить с рынка, качественно менять свое поведение в различное время суток или в разные дни недели. Следовательно, каждая компания может представлять список своих конкурентов только приблизительно.

Для учета двух перечисленных выше источников неопределенности авторы (Athey, Nekipelov, 2009) предлагают следующую формальную модель.

Пусть имеется множество C мощности N всех возможных компаний-участников аукциона по какому-либо фиксированному ключевому слову. По этому слову для размещения объявлений доступны $M = N - 1$ позиций¹¹. На множестве всех его подмножеств введем вероятностное распределение $G(\cdot)$, известное всем участникам аукциона. Оно отражает частоту, с которой та или иная конфигурация участников может встретиться в каждом аукционе. Реализации той или иной конфигурации участников для разных аукционов предполагаются независимыми.

Также для каждой компании $i \in C$ введем величину $s_{i,t}$ – случайную реализацию ее CTR в аукционе с порядковым номером t по правилу $s_{i,t} = \bar{s}_i \varepsilon_{i,t}$, где $\bar{s}_i$ – некая постоянная константа, отражающая средний вес участника с индексом i , а $\varepsilon_{i,t}$ – случайный шок для CTR компании с индексом i в аукционе с индексом t . Предполагается, что все $\varepsilon_{i,t}$ независимы в совокупности и имеют одинаковую функцию распределения $F(\cdot)$. Информационная структура в игре следующая: всем компаниям известны средние веса участников и распределения $F(\cdot)$ и $F(\cdot)$. Обобщенный аукцион второй цены проводится по стандартным правилам ранжирования и платы за клик. Для простоты в (Athey, Nekipelov, 2009) предполагается, что $\alpha_j = 1$ для любого $j \in \{1, \dots, M\}$. Обозначим через $\Phi_{i,k}^j$ индикатор события, когда участники с номерами i и k находятся на позициях j и $j + 1$ соответственно. Пусть C^i – множество всех подмножеств множества C , не содержащих участника с номером i , а $C_{j,k}^i$ – множество всех подмножеств C^i мощности j , которые содержат участника с номером k . Через $b, \bar{s}, \varepsilon$ будем обозначать векторы ставок, средних весов и шоков CTR для всех участников аукциона соответственно, а через $1\{x\}$ стандартную индикаторную функцию. Тогда

$$\Phi_{i,k}^j(b, \bar{s}, \varepsilon, G^i) = \sum_{S \in C_{j,k}^i} \prod_{m \in S \setminus \{k\}} 1\{b_m \bar{s}_m \varepsilon_m \geq b_i \bar{s}_i \varepsilon_i\} \prod_{m \in C^i \setminus S} 1\{b_m \bar{s}_m \varepsilon_m < b_k \bar{s}_k \varepsilon_k\} 1\{b_i \bar{s}_i \varepsilon_i > b_k \bar{s}_k \varepsilon_k\}. \quad (10)$$

Ожидаемое число кликов, которое получит участник i , – это функция от его ставки b_i :

$$Q_i(b_i, b_{-i}, \bar{s}) = E_{C^i, \varepsilon} \left[\sum_{j=1, \dots, M} \sum_{S \in C^i} \sum_{k \in S} P(\Phi_{i,k}^j(b, \bar{s}, \varepsilon, S) = 1) \alpha_j \gamma_i \right], \quad (11)$$

а его ожидаемый совокупный платеж –

$$TE_i(b_i, b_{-i}, \bar{s}) = E_{C^i, \varepsilon} \left[\sum_{j=1, \dots, M} \sum_{S \in C^i} \sum_{k \in S} P(\Phi_{i,k}^j(b, \bar{s}, \varepsilon, S) = 1) \alpha_j \gamma_i \bar{s}_k \varepsilon_k b_k / \bar{s}_i \varepsilon_i \right]. \quad (12)$$

Во введенных обозначениях ожидаемая полезность участника i после проведения аукциона запишется как

$$EU_i(b_i, b_{-i}, \bar{s}) = v_i \cdot Q_i(b_i, b_{-i}, \bar{s}) - TE_i(b_i, b_{-i}, \bar{s}). \quad (13)$$

¹¹ Данное предположение сделано исключительно для удобства. Полученные в статье результаты никак от него не зависят.

Для равновесий, в которых все участники делают положительную ставку, условия первого порядка являются необходимыми условиями, определяющими равновесный вектор ставок $(b_1, \dots, b_N)$:

$$v_i \frac{\partial}{\partial b_i} Q_i(b, \bar{s}) = \frac{\partial}{\partial b_i} TE_i(b, \bar{s}). \quad (14)$$

Далее авторы (Athey, Nekipelov, 2009) доказывают следующую лемму, которая позволяет перейти от системы уравнений (14) к системе дифференциальных уравнений от параметра.

Лемма (Athey, Nekipelov, 2009). *Предположим, что $\partial EU(b, \bar{s})/\partial b_{-N}$ и все функции $TE_i(b, \bar{s})$ непрерывны по b . Тогда вектор ставок $(b_i, \dots, b_N)$, где $b_i > 0$ для любого $i \in \{1, \dots, N\}$ образует равновесие обобщенного аукциона второй цены тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial}{\partial \tau} EU_i(b_i, \tau b_{-i}, \bar{s})|_{\tau=1} = -TE_i(b, \bar{s}). \quad (15)$$

Введем в рассмотрение уравнение, для которого определим произвольное непрерывное отображение $\beta: [0, 1] \rightarrow R^N$ такое, что $\beta[1] = b$:

$$\tau \frac{d}{d\tau} EU_i(\beta_i(\tau), \tau \beta_{-i}(\tau), \bar{s}) = -TE_i(\beta_i(\tau), \tau \beta_{-i}(\tau), \bar{s}). \quad (16)$$

Для того чтобы сформулировать главный результат о существовании и единственности равновесия, нам понадобится ввести еще несколько обозначений. Пусть $D(b, \bar{s}) = \partial EU(b, \bar{s})/\partial b_{-N}$, а $D_0(b, \bar{s})$ получается из матрицы $D_0(b, \bar{s})$ заменой ее диагональных элементов нулями. Наконец, пусть $V = [0, v_1] \times [0, v_2] \times \dots \times [0, v_N]$, где $0 < v_N < v_{N-1} \dots < v_1 < +\infty$.

Теорема 3. *Предположим, что $D_0(b, \bar{s})$ и все функции $TE_i(b, \bar{s})$ непрерывны по b и $D_0(b, \bar{s})$ невырождена и удовлетворяет условию Липшица в точке, соответствующей решению уравнения (14). Также пусть для любого $i \in \{1, \dots, N\}$ выполнено $Q_i(b, \bar{s}) > 0$ и все функции $EU_i(b, \bar{s})$ квазивогнуты по b_i на V . Следовательно:*

- 1) равновесие обобщенного аукциона второй цены существует тогда и только тогда, когда существует $\delta > 0$ такое, что система уравнений (16) имеет решение для любого $\tau \in [1 - \delta, 1]$;
- 2) условия пункта 1 выполнены для любого $\delta \in [0, 1]$, если $D_0(b, \bar{s})$ невырождена и удовлетворяет условию Липшица для всех $b \in V$ кроме, может быть, конечного числа точек;
- 3) существует одно равновесие обобщенного аукциона второй цены, если существует $\delta > 0$ такое, что система уравнений (16) имеет единственное решение для любого $\tau \in [1 - \delta, 1]$;
- 4) условия пункта 3 выполнены для любого $\delta \in [0, 1]$, если матрица $\partial EU(b, \bar{s})/\partial b^T$ невырождена для всех $b \in V$ и каждый ее элемент удовлетворяет условию Липшица по аргументу b .

Другими словами, теорема 3 утверждает, что при определенных условиях регулярности равновесие у подобной формализации обобщенного аукциона второй цены всегда существует. Более того, при неких дополнительных условиях в данной статической игре оно единственно, что выгодно отличает данную модель от исходной модели (1)–(6). Также существенным преимуществом описанной модели над теоретической (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007) является ее более точные эмпирические предсказания, детальное обсуждение которых, однако, находится вне рамок данного обзора.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ

Первые статьи о контекстной рекламе в Интернете концентрировались по большей части на анализе нового для теории аукционов формата и инициативах компаний, заставляющих их соревноваться за более высокие позиции. Причиной этого были два фактора: неоднородность ценностей кликов различных компаний и неоднородность позиций по числу получаемых кликов. Напомним, в статье (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007) предполагалось, что более высокие по-

зиции получают большее число кликов в единицу времени. Но почему это так? Происходит это из-за того что более высокие позиции занимают фирмы с более высоким качеством продукции или, возможно, за этим стоят поведенческие мотивы (например, пользователи всегда сначала смотрят на верхнюю часть экрана)? Чтобы понять, чем руководствуются пользователи при клике на ту или иную ссылку и как их поведение влияет на рекламодателей, некоторые теоретические работы также включали пользователей в рассматриваемые модели.

Далее опишем теоретическую формализацию поведения пользователей, представленную в статье (Athey, Ellison, 2011)¹². В данной модели присутствуют две стороны рынка. Первая – это N фирм, которые производят однородный товар и хотят разместить рекламу этого товара на странице поискового сайта. Вероятность удовлетворить потребность пользователя в товаре для фирмы с индексом $i \in \{1, \dots, N\}$ после клика пользователем по ее объявлению есть q_i . Набор $\{q_1, \dots, q_N\}$ – это набор независимых одинаково распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин с функцией распределения $F(\cdot)$. В дальнейшем мы будем называть q_i *качеством* фирмы i . Фирме i известна реализация ее собственного качества, но не реализации параметров q ее конкурентов. Продавая потребителю одну единицу товара, фирма получает полезность, нормализованную к 1.

Другая сторона рынка – единичный континуум потребителей. Каждый потребитель представляет спрос не более чем на одну единицу продукта. Чтобы найти фирму, у которой можно приобрести товар, каждый пользователь посещает поисковой сайт, где видит список из M ссылок, ранжированных сверху вниз. Увидев данный список, пользователь *рационально* решает, на объявление какой фирмы из списка ему произвести клик. После клика по объявлению фирмы i пользователь обнаруживает у фирмы желаемый товар и с вероятностью q_i покупает его. С вероятностью $1 - q_i$ покупка не совершается. Купив товар, пользователь останавливает поиск и получает полезность, нормализованную к 1. Если же товар не приобретен, то пользователь продолжает его поиски, пока ожидаемая полезность от дополнительного клика по той ссылке, по которой он еще не производил клик, не станет ниже индивидуального (известного ему) порогового значения издержек s_i . Пользователь не знает о реализации вектора $\{q_1, \dots, q_N\}$, однако может строить вероятностные представления о нем, исходя из своих представлений и истории поиска. Среди всех пользователей параметр s_i предполагается распределенным на отрезке $[0, 1]$ с функцией распределения $G(\cdot)$.

Нам остается описать используемую в (Athey, Ellison, 2011) формализацию процедуры обобщенного аукциона второй цены. Здесь аукцион представляет собой динамическую игру в дискретном времени, состоящую из M периодов. На первом шаге фирмы одновременно делают ставки, после чего $N - M$ фирм с наименьшими ставками исключаются из игры. В каждом следующем периоде, начиная со второго, оставшиеся в аукционе фирмы также одновременно делают свои ставки, причем они не должны быть меньше, чем ставка компании, выбывшей на предыдущем шаге (или максимальная среди всех ставок фирм, если речь идет о первом периоде). Компания с наименьшей ставкой исключается из дальнейшего аукциона, и начинается следующий период. В итоге после M раундов игры мы получим вектор ставок, с которыми выбыли все фирмы за исключением последней. Эти ставки считаются итоговыми, и согласно им происходит определение окончательных позиций и платежей участников аукциона. После проведения аукциона и распределения мест пользователи видят на экране только итоговые места фирм, но не их ставки в каком-либо из раундов.

Равновесие в данной модели включает как равновесные стратегии фирм в обобщенном аукционе второй цены, так и равновесные стратегии оптимального поиска пользователей. Данные стратегии являются взаимозависимыми. Веры¹³ пользователей о качестве фирм, расположившихся на тех или иных позициях, определяют число кликов, которое получает позиция, а следовательно, и инициативы участников аукциона. Однако в ситуации равновесия пользователи знают стратегии фирм и могут предвидеть, на каких позициях окажутся фирмы, вероятность найти товар у которых наибольшая, что и предопределяет их поведение. Таким образом, поиск равновесия в данной модели представляет собой поиск такого набора вер пользователей, кото-

¹² В (Chen, He, 2011) рассматривается близкая по содержанию модель.

¹³ В строгом смысле секвенциального игрового равновесия.

рые индуцировали¹⁴ бы их собственное поведение, рациональное с точки зрения предполагаемых вер.

Заметим, что равновесие в данной игре – не единственное. Например, предположим, пользователи считают, что объявления компаний на поисковом сайте расположены в случайном порядке. Тогда оптимальной стратегией для них также является поиск в случайном порядке, до тех пор пока ожидаемая полезность от следующего клика выше индивидуальных издержек, и прекращение поиска – в противном случае. Осознавая это, фирмы не будут бороться за более высокие позиции, так как каждая позиция на экране будет приносить одинаковое¹⁵ число кликов. И, следовательно, пробившись во второй раунд, все оставшиеся участники будут устанавливать минимально возможную ставку¹⁶. В результате фирмы окажутся ранжированными на экране не в случайном порядке и веры пользователей о стратегиях компаний, действительно, окажутся рациональными.

Однако в работе (Athey, Ellison, 2011) предложено другое равновесие, в котором пользователи верят в то, что фирмы с более высоким качеством занимают на экране более высокие позиции. Тогда в начальный момент времени ожидаемое качество фирмы, расположенной на позиции j , где $j \in \{1, \dots, M\}$, есть $q_{(j)}$, где $q_{(j)}$ обозначает порядковую статистику j случайной выборки из N элементов из распределения $F(\cdot)$. Очевидно, что $Eq_{(1)} > \dots > Eq_{(N)}$. Следовательно, оптимальная стратегия пользователя i может быть описана следующим образом. В начальный момент он производит клик на верхнюю ссылку тогда и только тогда, когда $Eq_{(1)} - s_i > 0$. Если $Eq_{(1)} - s_i \leq 0$, то он не кликает ни на одну из ссылок. В последующие периоды, если пользователь не купил товар, он аналогично сравнивает ожидаемую полезность от клика по верхней из оставшихся ссылок и издержки клика. Если ожидаемая полезность выше, он производит клик на верхнее из оставшихся объявлений, если же выше издержки, он прекращает поиск товара.

Обозначим через z_j , $j \in \{1, \dots, M\}$, – бернуллиевские случайные величины, равные единице с вероятностью $q_{(j)}$. Если пользователь не купил товар ни у одной из фирм, находящихся на первых $k - 1$ позициях, он изменяет свое представление о вероятности распределения $q_{(k)}$.

Введем величины

$$\bar{q}_k = E(q_{(k)} | z_1 = \dots = z_{k-1} = 0). \quad (17)$$

Величина $\bar{q}_k$ – это ожидаемое качество (полезность) позиции под номером k при условии, что покупатель не нашел товара на первых $k - 1$ позициях. Тогда очевидно, что число ссылок, которые в процессе поиска посетил пользователь с индивидуальными издержками s , есть k – такое, что $\bar{q}_k > s$, но $\bar{q}_{k+1} \leq s$. Следовательно, фирма, объявление которой расположено на позиции k , получит число кликов, равное

$$\alpha_k = (1 - q_{(1)}) \dots (1 - q_{(k)}) G(\bar{q}_k). \quad (18)$$

Исходя из (18), $\alpha_1 > \dots > \alpha_M$, как и в модели (Edelman, Ostrovsky, Schwarz, 2007). Теперь перейдем к построению равновесных стратегий фирм. По предположению пользователи верят, что на более высоких позициях расположены фирмы с продукцией более высокого качества, поэтому мы должны представить равновесие обобщенного аукциона второй цены в стратегиях, монотонных по переменной q . Следующая теорема приводит явные формулы для стратегий такого равновесия.

Теорема 4. *Совершенным байесовским равновесием обобщенного аукциона второй цены является вектор ставок, определяемый соотношением*

$$b^*(k, b_{k+1}, q) = b_{k+1} + (q - b_{k+1}) \left(1 - \frac{G(\bar{q}_k)}{G(\bar{q}_{k+1})} (1 - q) \right), \quad (19)$$

где k – число фирм, оставшихся на данный момент в аукционе, b_{k+1} есть ставка фирмы, выбывшей из аукциона на предыдущей стадии.

¹⁴ Также в смысле секвенциального игрового равновесия.

¹⁵ В смысле математического ожидания.

¹⁶ Очевидно, в первом раунде слабо доминирующей стратегией является указание истинной ценности клика.

Мы полностью завершили построение равновесия. Стратегии, определяемые соотношением (19), монотонны по параметру q , а, следовательно, фирмы с более высоким качеством продукции делают более высокие ставки и поэтому занимают более высокие позиции на экране. В результате изначально предполагаемые веры пользователей оказываются, действительно, рациональными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье приведен обзор четырех основных теоретических моделей аукционов, применяемых поисковыми сайтами для продажи контекстной рекламы: статическая игра с полной информацией, однопериодная динамическая игра с неполной информацией, структурная модель стратегической неопределенности и модель частичного равновесия, учитывающая поведение пользователей поискового сайта. В каждой из них сделаны существенные теоретические допущения, определяющие упрощенную модель реальности. Несмотря на то что данные модели не могут учесть всей сложности структуры реальных аукционов, они тем не менее позволяют получать интересные теоретические результаты и успешно применяются для решения практических задач (например, для установления оптимальных резервных цен в эксперименте Yahoo!, описанном в статье (Ostrovsky, Schwarz, 2009)).

Из наиболее существенных недостатков описанных подходов стоит выделить два ключевых. Во-первых, особенностью обобщенного аукциона второй цены является его динамическая структура: компании могут в любой момент менять ставки по своим объявлениям. Формализация динамической структуры игры, которая происходит между компаниями на рынке, априори достаточно сложная, поэтому, как мы видим, все существующие канонические теоретические модели представляют собой либо статические, либо однопериодные игры, в которых аукцион проводится один раз. Поэтому описанные в работах равновесия можно рассматривать только лишь как приближения исхода реальной динамической игры. Во-вторых, в рассмотренных моделях предполагается неограниченность бюджета каждого из участников аукциона, что весьма далеко от реальности: многие компании делают ставки по нескольким ключевым словам, пытаясь максимизировать свой доход от рекламы при некотором ограниченном бюджете. Данное обстоятельство, безусловно, влияет на поведение компаний и их ставки, что не учитывается описанными моделями. Таким образом, существующие модели позволяют анализировать отдельные теоретические и прикладные вопросы, но они пока не учитывают всей сложной структуры данного вопроса. Поэтому теоретическое моделирование в данной области, несмотря на значительные успехи, все еще находится на начальном этапе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Athey S., Ellison G. (2011). Position Auctions with Consumer Search // *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 126. P. 1213–1270.
- Athey S., Nekipelov D. (2009). A Structural Model of Equilibrium and Uncertainty in Sponsored Search Advertising Auctions // Working paper.
- Borgers T., Cox I., Pesendorfer M., Petricek V. (2008). Equilibrium Bids in Sponsored Search Auctions: Theory and Evidence // Working paper.
- Cary M., Das A., Edelman B., Giotis I., Heimerl K., Karlin A., Kominers S., Mathieu C., Schwarz M. (2013). Convergence of Position Auctions under Myopic Best-Response Dynamics // *ACM Transactions on Economics and Computation* (forthcoming).
- Chen Y., He C. (2011). Paid Placement: Advertising and Search on the Internet // *Economic Journal*. Vol. 121. P. 309–328.
- Edelman B., Ostrovsky M., Schwarz M. (2007). Internet Advertising and the Generalized Second-Price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords // *American Economic Review*. Vol. 97. P. 242–259.
- Edelman B., Schwarz M. (2006). Optimal Auction Design in a Multi-unit Environment: The Case of Sponsored Search Auctions // Working paper.
- Mas-Colell A., Whinston M., Green J. (1995). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford Press.

Ostrovsky M., Schwarz M. (2009). Reserve Prices in Internet Advertising Auctions: A Field Experiment // Working paper.

Varian H. (2007). Position Auctions // *International Journal of Industrial Organization*. Vol. 25. P. 1163–1178.

Поступила в редакцию
04.12.2014 г.

Sponsored-Search Auctions: Approaches and Theoretical Models

A.S. Smirnov

The article reviews the basic approaches and theoretical models that describe the features and peculiarities of the modern and rapidly developing market of sponsored-search auctions on the Internet. We pay main attention to the sponsored-search auction design models and its comparative analysis. We also describe and compare different theoretical frameworks for this agenda, including static and dynamic games of perfect and imperfect information, structural models and models of users' behavior. This branch of literature is relatively new, but it already attracts a significant attention of world-leading scholars due to its high practical importance and new challenges to mechanism design theory.

Keywords: auction theory, sponsored-search auctions, marketing, advertising.

JEL Classification: D44, M31, M37.