
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМАТИЧЕСКОГО РИСКА:
СРАВНЕНИЕ НА ПРИМЕРЕ ИНДИЙСКОГО
ФОНДОВОГО РЫНКА

© 2015 г. К.Г. Асатуров

(Москва)

В работе исследуется динамическое поведение систематического риска индийских компаний в рамках рыночной модели. Недельные цены закрытия 89 акций и индекса BSE 100 в качестве рыночного портфеля были проанализированы в период с января 2000 г. по декабрь 2013 г. с помощью скользящей регрессии, многомерных GARCH-моделей, полупараметрической регрессии и фильтра Калмана. Согласно результатам для анализируемого периода, в 44 из 89 случаев фильтр Калмана оказался наиболее эффективным методом. В остальных 45 случаях лидерство принадлежит полупараметрическим моделям. Что касается прогнозного периода, то модели GARCH оказались лучшим инструментом прогноза (для 41 из 89 активов), они опередили полупараметрические регрессии (33 из 89) и фильтр Калмана (15 из 89). Более того, анализ динамики систематического риска показал, что при 5%-ном уровне значимости бета 59 и 62 из 89 компаний нестационарны согласно тестам Дикки–Фулера и Филиппса–Перрона, и бета-процесс только одной бумаги стационарен согласно тесту KPSS.

Ключевые слова: динамическая бета; индийский фондовый рынок; DCC–GARCH-модель; фильтр Калмана; полупараметрическая регрессия.

Классификация JEL: C14, C22, C58, G10, G12.

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической рыночной модели и модели CAPM (Markowitz, 1952; Sharpe, 1964; Lintner, 1965) бета, определяющие чувствительность акции к рыночному портфелю, полагались постоянными. В рамках этих моделей бета оцениваются с помощью регрессии, где доходность актива является объясняемой переменной, а доходность рыночного портфеля – объясняющей. Таким образом, бета рассчитываются как отношение ковариации рыночной доходности и доходности актива к рыночной волатильности. Однако регрессионный метод нахождения постоянных бета был неоднократно подвергнут критике. Было обнаружено, что дисперсии финансовых активов и рыночных индексов зачастую изменчивы во времени (Bollerslev et al., 1992), а это напрямую влияет на значения бета.

Авторы (Fabozzi, Francis, 1978; Bos, Newbold, 1984) одни из первых выдвинули предложение, что бета может меняться во времени в рамках модели CAPM; они доказали, что мера систематического риска бета нестабильна. Эти результаты стали основополагающими для многих аналогичных работ для различных рынков. Так, авторы (Kim, 1993; Sunder, 1980) подтвердили нестационарность бета для американского рынка; авторы (Bos, Fetherston, 1992) – для корейского рынка; автор (Kim, 1993) – для гонконгского рынка, авторы (Bos et al., 1995) – для финского рынка, автор (Kok, 1992) – для малайзийского рынка, автор (Wells, 1994) – для шведского рынка и авторы (Faff et al., 1992) – для австралийского рынка. Однако в большинстве указанных работ были проделаны тесты только на нестабильность бета, авторы не моделировали его динамического поведения.

В дальнейшем с появлением различных подходов и развитием эконометрики эта область исследования получила дальнейшее развитие. Сегодня разработано несколько направлений данной проблемы, в основе которых лежит определенный метод. К этим направлениям относятся байесовские модели (Jostova, Philipov, 2005), модели SV (Johansson, 2009), марковская модель с переключением режимов (Mergner, Bulla, 2008) и другие менее популярные эконометрические инструменты для определения динамических бета.

В данном исследовании выделено три современных подхода.

Первое направление заключается в использовании *фильтра Калмана* для расчета динамических бета. В рамках модели CAPM (Fabozzi, Francis, 1978; Collins, Ledolter, Rayburn, 1987) моделировали бета как случайный коэффициент (random coefficient) – простейшая спецификация модели состояние-наблюдение, которая была оценена с помощью фильтра Калмана. Позже метод стал усложняться и совершенствоваться. Так, бета стали моделировать как процесс случайного блуждания (Li, 2003; Lie et al., 2000) и возвращения к среднему (Groenewold, Fraser, 1999; Brooks et al., 1998), а позже – и как смешанный процесс (He, Kryzanowski, 2008).

Второй подход состоит в применении *моделей класса GARCH*. Эти модели получили широкое распространение, так как предполагают наличие серийной корреляции и гетероскедастичности, которая часто наблюдается на финансовых рынках. Применение одномерных моделей GARCH (Bollerslev et al., 1988; Bodurtha, Mark, 1991; Engle, Rodrigues, 1989) для расчета динамических бета дало мощный толчок развитию этого направления. Так, (Schwert, Seguin, 1990) предложили свою методику для расчета бета, где рыночная волатильность полагалась изменчивой во времени. Однако первые модели GARCH имели явные недостатки. К их минусам можно отнести неспособность объяснить наличие асимметрии (когда положительные и отрицательные шоки доходности по-разному влияют на волатильность), а также тот факт, что одномерные модели GARCH предполагали изменчивость во времени только одного параметра (или волатильности исследуемого актива, или рыночной волатильности), в то время как оба параметра и даже ковариация обоих инструментов могли сильно меняться во времени.

Для этого были предложены современные многомерные GARCH, способные оценить динамическую вариационно-ковариационную матрицу и асимметрию модели. Так, в своих работах (Choudhry, Wu, 2008) и (Yun, 2002) определили и спрогнозировали бета с помощью многомерных моделей GARCH, предполагающих динамическую ковариацию и волатильность. Во многих работах признавалось, что данная техника определения бета позволяет получить более точные оценки и обеспечивает высокую точность прогноза (Faff et al., 2000; Brooks et al., 2002).

Третий, намного менее популярный, чем указанные выше, но современный подход – *полупараметрические модели*. Один из типов этих моделей – регрессия с гладкими (переменными) коэффициентами, предложенная (Hastie, Tibshirani, 1993). Конструкции этой модели удобно использовать в рамках рыночной модели, модели CAPM и трехфакторной модели (Fama, French, 1993). Несмотря на это, для расчета динамических бета эта модель была впервые использована через много лет после ее изобретения: применительно к рыночной модели – в работах (Eisenbeiss et al., 2007) и (Esteban, Orbe-Manadaluniz, 2010), применительно к модели CAPM и трехфакторной модели – в работах (Li, Yang, 2011) и (Ang, Kristensen, 2012). Так, анализируя немецкий фондовый рынок, (Eisenbeiss et al., 2007) пришли к выводу, что данный метод превосходит стандартный регрессионный подход. Большой плюс этого подхода состоит в том, что он не требует знания вида функции бета, как, к примеру, предполагается в фильтре Калмана.

В данной работе предполагается использовать фильтр Калмана, многомерные модели класса GARCH, модели с гладкими (переменными) коэффициентами и простой регрессией (OLS) для оценки динамических бета индийских компаний. Анализировался именно индийский фондовый рынок, так как он является одним из немногих крупных развивающихся рынков с достаточно большим числом компаний и исторических данных, необходимых для проведения подобного исследования. Выборка включает данные по 89 акциям индийских компаний и индексу BSE 100 в качестве рыночного портфеля. На основе этих данных все предложенные модели сравниваются исходя из точности сделанных внутривыборочного (in-sample) и вневыборочного (out-sample) прогнозов; определяются наилучшие модели для обоих периодов в отдельности – анализируемого и прогнозного. Далее оцененные бета из наилучшей модели тестируются на стационарность. Для проверки на стационарность в работе используются сразу три теста: обобщенный тест Дики–Фулера, тест Филипса–Перрона и KPSS-тест¹. В ходе исследования тестируется несколько сформулированных гипотез.

¹ Kwiatkowski Phillips Schmidt Shin.

2. ГИПОТЕЗЫ, ДАННЫЕ И МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Гипотезы. Ранее (Shah, Moonis, 2003) анализировали динамику цен акций 50 индийских компаний и выявили, что для 52% их выборки нулевая гипотеза о постоянстве бета отвергается. Они использовали фильтр Калмана в рамках модели CAPM для анализа данных с 1996 по 2000 г. Данное исследование дополняет и углубляет работу (Shah, Moonis, 2003) сразу в нескольких аспектах. Во-первых, оно охватывает большую выборку и совершенно другой период времени, который включает кризис доткомов 2000–2002 гг. и мировой финансовый кризис 2008–2010 гг. Во-вторых, методология работы опирается на современные и разнообразные эконометрические модели, которые способны оценить динамическое поведение не только коэффициента бета, но и альфа. Так, спецификация полупараметрических моделей и фильтра Калмана позволяет проанализировать динамику обоих параметров рыночной модели.

Некоторые работы по данной тематике были посвящены сравнению различных методик для оценки динамических бета, включая указанные выше подходы. Так, подобные сравнения были сделаны в работах (Choudhry, Wu, 2008; Brooks et al., 1998; Mergner, Bulla, 2008). В указанных работах был сделан вывод о том, что фильтр Калмана является наиболее точным инструментом для оценки динамических бета, хотя и с исключениями для отдельных бумаг. Однако различия в методологии и данных в этих работах и в этом исследовании не позволяют делать поспешных выводов.

Таким образом, на базе результатов предыдущих трудов в работе тестируются три поставленные гипотезы:

H1: фильтр Калмана является наилучшим методом для оценивания динамических бета;

H2: фильтр Калмана является наилучшим методом для прогнозирования динамических бета;

H3: бета индийских компаний нестационарны.

Первые две гипотезы являются стандартными для типичных работ и тестировались ранее в литературе по данной тематике, однако фильтр Калмана никогда не сравнивался с такими современными многомерными GARCH-моделями, как DCC–GJR–GARCH или ADDC–GJR–GARCH, которые позволяют учесть эффекты асимметрии в условной волатильности и корреляции. Полупараметрические регрессии также редко встречаются в подобных исследованиях, что не позволяет делать однозначных выводов о превосходстве над ними фильтра Калмана.

Что касается третьей гипотезы, то для ее проверки применяются сразу три теста на стационарность, а именно: обобщенный тест Дикки–Фулера, тест Филиппса–Перрона и KPSS-тест. Включение в анализ сразу нескольких статистик для проверки на стационарность позволяет избежать ошибки в связи с недостатками того или иного теста (DeJong et al., 1992). Возможно, чувствительность актива к рыночному портфелю, выраженная параметром бета, не меняется, в то время как значения альфа, которые представляют собой аномальную доходность (abnormal returns) в рамках рыночной модели, серьезно колеблются.

Данные. В качестве данных были взяты недельные цены закрытия 89 индийских компаний и индекса BSE 100. Последний применялся как рыночный портфель. Были использованы именно недельные данные, как и в большинстве подобных работ, так как дневные данные сильно подвержены краткосрочным флуктуациям, а месячные или годовые данные не обеспечивают достаточной массы наблюдений для тестирования моделей. Временной горизонт включает период с 1 января 2000 г. по 31 декабря 2013 г. Он был разделен на два периода: анализируемый – с 1 января 2000 г. по 31 декабря 2012 г. и прогнозный – с 1 января 2013 г. по 31 декабря 2013 г. Первые пять наблюдений выборки были использованы для калибровки фильтра Калмана и не участвовали в результатах работы. Все компании были разделены по секторам согласно классификации ГСКО (GICS). Используемая выборка представлена в Приложении.

Все данные были получены из базы данных Bloomberg. Доходности всех активов были протестированы на стационарность с помощью теста Дикки–Фулера, серийную корреляцию с помощью теста Льюнга–Бока и гетероскедастичность с помощью ARCH-теста. Результаты всех тестов подтверждают применимость предложенных моделей.

Методология. Для оценки динамических бета компаний в работе используется три современных подхода: фильтр Калмана, многомерные модели класса GARCH и полупараметрическая регрессия. В случае фильтра Калмана использован такой вид рыночной модели, в которой оба ее параметра, альфа и бета, демонстрируют динамическое поведение. В качестве моделей класса GARCH были использованы три модели: DCC–GARCH – модель динамической условной корреляции; DCC–GJR–GARCH² – модель динамической условной корреляции с учетом асимметрии в уравнениях условной волатильности; ADCC–GJR–GARCH³ – асимметричная модель динамической условной корреляции с учетом асимметрии в уравнениях условной волатильности. Все модели GARCH рассчитывались для двух предположений: о нормальном распределении и распределения Стюдента. Используемая спецификация полупараметрической регрессии также предполагает, что параметр альфа, так же как и бета, изменяется во времени. На основе полупараметрической модели были получены три оценки бета в зависимости от вида ядерной функции: гауссовской, Епанечникова и равномерной. Таким образом, для каждого актива были получены 11 оценок бета (учитывая оценку постоянной бета на основе метода OLS). Все предложенные модели сравниваются для определения наилучшей с точки зрения точности внутривыборочного (in-sample) и вневыборочного (out-sample) прогнозов.

3. МОДЕЛИ ОЦЕНКИ СИСТЕМАТИЧЕСКОГО РИСКА

Классическая регрессионная рыночная модель. Рыночная модель предполагает оценку бета актива i с помощью следующей регрессии:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad \varepsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_i^2),$$

где $R_{i,t}$ – доходность актива i в момент времени t ; $R_{m,t}$ – доходность рыночного портфеля в момент времени t ; $\varepsilon_{i,t}$ – нормально распределенные остатки в уравнении актива i , имеющие нулевое математическое ожидание и постоянную дисперсию σ_i^2 .

Коэффициенты α_i и β_i – параметры модели, которые требуется оценить. Параметр β_i можно выразить через $\beta_i = \text{Cov}(R_{i,t}, R_{m,t}) / \text{Var}(R_{m,t})$. Коэффициент β_i является показателем систематического риска актива i . С точки зрения теории корпоративных финансов данный коэффициент отражает рычаговый показатель бета для акций компаний. В стандартной регрессионной модели значения бета, превышающие 1, говорят о том, что изменение доходности рыночного портфеля приводит к большему изменению доходности актива. Такие активы относятся к активам агрессивного типа; по аналогии – активы, чьи бета меньше 1, относятся к активам оборонительного типа.

Вневыборочный прогноз бета на шаг вперед был рекурсивно получен с помощью скользящей регрессии.

Фильтр Калмана. Фильтр Калмана назван в честь Рудольфа Калмана (Kalman, 1960). Фильтр был изобретен для описания системы, состояния которой со временем изменяются. Позже он стал применяться во многих областях науки, начиная с систем динамического управления и заканчивая биоинженерией. Фильтр Калмана является алгоритмом для оценивания линейной модели пространства состояний, эту модель описывает система уравнений наблюдений и состояний. Так, рыночную модель можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= \alpha_{i,t} + \beta_{i,t} R_{m,t} + \varepsilon_{i,t}, \\ \beta_{i,t} &= \beta_{i,t-1} + \eta_{i,t}, \quad \alpha_{i,t} = \alpha_{i,t-1} + u_{i,t}, \\ \varepsilon_{i,t} &\sim N(0, \sigma_{\varepsilon_i}^2), \quad \eta_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\eta_i}^2), \quad u_{i,t} \sim N(0, \sigma_{u_i}^2). \end{aligned}$$

Случайные ошибки $\varepsilon_{i,t}$, $\eta_{i,t}$ и $u_{i,t}$ независимы и нормально распределены. В нашем случае уравнения наблюдений – уравнения доходности актива i , а уравнения коэффициентов $\alpha_{i,t}$ и $\beta_{i,t}$ – уравнения состояний. Согласно (Faff et al., 2000), случайное блуждание или процесс AR(1) наилучшим образом описывает динамику бета, благодаря чему он и был выбран в качестве вида уравнений состояний.

² Dynamic Conditional Correlation – Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.

³ Asymmetric Dynamic Conditional Correlation – Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.

Для описания оценивания такого рода модели перейдем к ее записи в традиционной форме:

$$y_t = Z_t x_t + d_t + \omega_t; \quad x_t = M_t x_{t-1} + c_t + S_t v_t, \\ \omega_t \sim N(0, \sigma_\omega^2), \quad v_t \sim N(0, Q_t).$$

Нетрудно увидеть, что в нашем случае будет справедливо (для некоего актива k):

$$y_t = R_{k,t}, \quad Z_t = (1 \ R_{m,t}), \quad x_t = \begin{pmatrix} \alpha_{k,t} \\ \beta_{k,t} \end{pmatrix}, \quad M_t = S_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_t = d_t = 0, \\ v_t = \begin{pmatrix} \eta_{k,t} \\ u_{k,t} \end{pmatrix}, \quad \omega_t = \varepsilon_{k,t}, \quad \sigma_\omega^2 = \sigma_{\varepsilon_t}^2, \quad Q_t = \begin{pmatrix} \sigma_{\eta_k}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{u_k}^2 \end{pmatrix}.$$

Далее введем следующие обозначения: $b_{t|t-1} = E_{t-1}(x_t)$, $b_t = E_t(x_t)$ и $P_t = E_t[(b_t - x_t)(b_t - x_t)^T]$. Фильтр Калмана состоит из системы семи рекурсивных уравнений:

$$\begin{cases} b_{t|t-1} = M_t b_{t-1} + c_t; \\ P_{t|t-1} = M_t P_{t-1} M_t^T + S_t Q_t S_t^T; \\ y_{t|t-1} = Z_t b_{t|t-1} + d_t; \\ v_t = y_t - y_{t|t-1}; \\ F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t^T + H_t; \\ b_t = b_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t^T F_t^{-1} v_t; \\ P_t = (I_m - P_{t|t-1} Z_t^T F_t^{-1} Z_t) P_{t|t-1}. \end{cases}$$

Затем неизвестные параметры θ оцениваются с помощью логарифмической функции максимального правдоподобия, которая принимает вид:

$$\ell = \ln L(\theta) = -0,5 T \ln(2\pi) - 0,5 \sum_{t=1}^T (\ln F_t + v_t^2 / F_t),$$

где T – число наблюдений. В нашем случае неизвестные параметры – $\sigma_{\varepsilon_t}^2$, $\sigma_{\eta_k}^2$ и $\sigma_{u_k}^2$.

Единственное, что требуется для оценки и рекурсивного прогноза с помощью фильтра Калмана, помимо рядов доходностей, – определить начальные значения параметров. Для коэффициентов альфа и бета были взяты начальные значения 0 и 1 соответственно. Однако чтобы устранить потенциальную ошибку от неправильно заданных изначальных значений, первые пять наблюдений использовались для калибровки и не участвовали в результатах работы.

Многомерные GARCH-модели. Показанная ниже методология основана на модели DCC–GARCH, предложенной Engle (Engle, 2002), и модели ADCC–GARCH, которая была предложена Carpiello (Carpiello et al., 2006). В работе оцениваются стандартная DCC–GARCH и две ее модификации, учитывающие асимметрию в условной волатильности, – модель DCC–GJR–GARCH и ADCC–GJR–GARCH. Последняя также учитывает асимметрию условной корреляции.

Модели DCC–GARCH, DCC–GJR–GARCH и ADCC–GJR–GARCH применяются для оценивания динамических бета индийских компаний. Структура модели ADCC–GJR–GARCH должна обеспечивать наиболее точные оценки, однако введение дополнительных переменных, учитывающих асимметрию в уравнениях условной корреляции и волатильностей, снижает точность прогноза, что является существенным минусом.

Используются двумерные варианты предложенных моделей, т.е. предложенные модели строятся отдельно для каждой пары рыночный портфель–актив. Рассмотрим двумерную модель для

некого актива i и рыночного портфеля m . Доходности активов и рыночного портфеля моделируются следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= \mu_i + \varepsilon_{i,t}; \\ R_{m,t} &= \mu_m + \varepsilon_{m,t}; \\ \varepsilon_i | \Omega_{t-1} &\sim N(0, H_t), \end{aligned}$$

где μ_i и μ_m – константы, или средние доходности (mean returns), актива i и рыночного портфеля соответственно; $\varepsilon_{i,t}$ и $\varepsilon_{m,t}$ – остатки в уравнении доходности актива i и рыночного портфеля соответственно в момент времени t ; Ω_{t-1} – вся доступная информация к моменту времени $(t-1)$; H_t – вариационно-ковариационная матрица остатков.

Вид уравнения для доходностей акций и рыночного портфеля определяется тем, что оно позволяет впоследствии корректно оценить динамические бета (как отношение условной ковариации анализируемого актива и рыночного портфеля к дисперсии рыночного портфеля). Так, он наиболее часто встречается в типичных работах (Mergner, Bulla, 2008; Choudhry, Wu, 2008).

Ковариационно-вариационная матрица H_t в моделях DCC и ADCC выглядит так:

$$H_t = D_t R_t D_t,$$

или

$$\begin{pmatrix} h_{i,t} & h_{im,t} \\ h_{im,t} & h_{m,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{i,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{m,t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p_{im,t} \\ p_{im,t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{h_{i,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{m,t}} \end{pmatrix},$$

где $h_{i,t}$ и $h_{m,t}$ – условные дисперсии остатков; $h_{im,t}$ – условная ковариация этих остатков.

Корреляционная матрица R_t оценивается различным образом для моделей DCC и ADCC. В моделях DCC она определяется как

$$\begin{aligned} R_t &= (\text{diag}(Q_t))^{-1/2} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-1/2}, \\ Q_t &= (1 - \omega_1 - \omega_2) \bar{Q} + \omega_1 z_{t-1} z'_{t-1} + \omega_2 Q_{t-1}, \\ \bar{Q} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t z'_t, \\ \omega_1 + \omega_2 &< 1, \quad \omega_1, \omega_2 > 0, \end{aligned}$$

где z_t – стандартизированные остатки в момент времени t ($z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$); Q_t – ковариационная матрица стандартизированных остатков; $\bar{Q}$ – безусловная ковариационная матрица стандартизированных остатков.

Условия, налагаемые на параметры ω_1 и ω_2 , гарантируют положительную определенность корреляционной матрицы и обеспечивают такую ее структуру, при которой однонаправленные колебания доходности актива и рыночного портфеля усиливают корреляцию.

Для модели ADCC в уравнение условной корреляции добавляется параметр, отвечающий за асимметрию:

$$\begin{aligned} Q_t &= (1 - \omega_1 - \omega_2) \bar{Q} - \omega_3 \bar{N} + \omega_1 z_{t-1} z'_{t-1} + \omega_2 Q_{t-1} + \omega_3 \eta_{t-1} \eta'_{t-1}, \\ \bar{N} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \eta_t \eta'_t, \end{aligned}$$

где $\eta_t = I[z_t < 0] \circ z_t$ и I – функция, которая равна единице, если $z_t < 0$, и равна нулю в ином случае, символ « $\circ$ » обозначает поэлементное умножение; $\bar{N}$ – безусловная ковариационная матрица η_t .

Параметр ω_3 отражает асимметрию в условной корреляции, и его значимость сигнализирует о том, что этот эффект наблюдается между активом и рыночным портфелем. Условия для параметров ω_1 , ω_2 и ω_3 гарантируют положительную определенность ковариационной матрицы Q_t в модели ADCC:

$$\omega_1 + \omega_2 + \mu \omega_3 < 1, \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0,$$

где μ – максимальное собственное значение матрицы $\bar{Q}^{-1/2} \bar{N} \bar{Q}^{-1/2}$.

Кроме отличий моделей в оценивании условных корреляций, также различным образом рассчитываются условные волатильности $h_{i,t}$ и $h_{m,t}$ из матрицы D_t . Для оценки условных волатильностей использованы две спецификации. Первая – это простая GARCH-модель (Bollerslev, 1986):

$$\begin{cases} h_{i,t} = c_1 + a_1 \varepsilon_{i,t-1}^2 + g_1 h_{i,t-1}; \\ h_{m,t} = c_2 + a_2 \varepsilon_{m,t-1}^2 + g_2 h_{m,t-1}. \end{cases}$$

Вторая спецификация – это GJR–GARCH-модель (Glosten et al., 1993), учитывающая асимметрию в условной волатильности активов:

$$\begin{cases} h_{i,t} = c_1 + a_1 \varepsilon_{i,t-1}^2 + \lambda_1 \varepsilon_{i,t-1}^2 I[\varepsilon_{i,t-1} < 0] + g_1 h_{i,t-1}; \\ h_{m,t} = c_2 + a_2 \varepsilon_{m,t-1}^2 + \lambda_2 \varepsilon_{m,t-1}^2 I[\varepsilon_{m,t-1} < 0] + g_2 h_{m,t-1}, \\ \lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0, \end{cases}$$

где λ_1 и λ_2 – коэффициенты, отражающие асимметричные шоки волатильности, а I – функция, которая равняется единице, если $\varepsilon_{t-1} < 0$, и равняется нулю в ином случае. Если параметры, определяющие эффекты асимметрии, являются значимыми, это говорит о существовании отрицательной асимметрии актива, или, другими словами, о более сильном воздействии негативных, а не положительных шоков на волатильность.

Условная ковариация $h_{im,t}$ оценивается из корреляционной матрицы R_t и матрицы D_t , а впоследствии используется для нахождения динамических бета:

$$h_{im,t} = p_{im,t} \sqrt{h_{i,t} h_{m,t}},$$

$$\beta_{i,t} | \Omega_{i-1} = \frac{\text{cov}(R_{i,t}, R_{m,t} | \Omega_{i-1})}{\text{var}(R_{i,t} | \Omega_{i-1})} = \frac{h_{im,t}}{h_{m,t}}.$$

Логарифмическая функция максимального правдоподобия для всех рассмотренных GARCH-моделей имеет вид:

$$L(\theta) = -0,5 \sum_{t=1}^T (n \ln(2\pi) + \ln |D_t R_t D_t| + \varepsilon_t' (D_t R_t D_t)^{-1} \varepsilon_t),$$

где n – размерность модели (в нашем случае равна 2); θ – вектор неизвестных параметров.

Аналогичным образом три представленные модели GARCH были оценены и для остатков с распределением Стьюдента. Таким образом, на основе GARCH-моделей получено шесть оценок бета коэффициентов для каждого актива: три – для нормального распределения и три – для распределения Стьюдента.

Полупараметрическая регрессия. Полупараметрические модели являются компромиссом между непараметрическими и параметрическими спецификациями и являются довольно популярным методом гибкого оценивания. Их удобно использовать в случаях, когда, например, функциональная зависимость от некоторых регрессоров неизвестна или когда полностью непараметрические методы невозможно использовать в силу проклятия размерности. Такого рода модели удобно использовать и если неизвестно, как регрессоры, линейно входящие в модель, зависят от других переменных. Эта проблема относится и к рыночной модели, в рамках которой предполагается линейная зависимость доходности актива от параметров альфа и бета, но непонятно, от чего зависят последние.

Существует много видов полупараметрических моделей, однако для целей исследования лучше всего подходит модель с гладкими (переменными) коэффициентами, предложенная (Hastie, Tibshirani, 1993). Применительно к рыночной модели она выглядит следующим образом:

$$R_{i,t} = \alpha_{i,t} + \beta_{i,t} R_{m,t} + \varepsilon_{i,t},$$

$$\alpha_{i,t} = f_{1,i}(t/T), \quad \beta_{i,t} = f_{2,i}(t/T), \quad \varepsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_i}^2),$$

где T – число наблюдений. Вид функций $f_{1,i}(t/T)$ и $f_{2,i}(t/T)$ неизвестен, но плюс модели заключается в том, что не требуется оценивать их действительный вид. Однако предполагается, что альфа и бета некоторым образом зависят от времени. Обоснование этого предположения заключается в том, что, так как альфа и бета – ненаблюдаемые переменные, то сложно определить, какие факторы действительно влияют на их динамику, но справедливо рассуждение о том, что переменная времени должна быть связана с этими факторами. Так, в работах (Eisenbeiss et al., 2007; Esteban, Orbe-Manadaluniz, 2010) также выдвигается предположение о функциональной зависимости параметров альфа и бета от фактора времени.

Непараметрические оценки альфа и бета коэффициентов в момент времени t рассчитываются путем минимизации следующей функции:

$$\min_{(\alpha_{i,t}, \beta_{i,t})} \sum_{s=1}^T K_{t,s}^{h_i} (R_{i,s} - \alpha_{i,t} - \beta_{i,t} R_{m,s})^2, \quad K_{t,s}^{h_i} = h_i^{-1} K((t-s)/Th_i),$$

где $K(\cdot)$ – ядерная функция; h_i – ширина окна, определяющая степень сглаживания. Выбор вида ядерной функции и ширины окна составляет основную проблему при оценке этой модели. Причем ядерная функция определяет степень гладкости функций $f_{1,i}(t/T)$ и $f_{2,i}(t/T)$, а ширина окна отвечает за точность восстанавливаемой зависимости.

Использовались три вида ядерной функции:

- 1) гауссовская: $K\left(\frac{t-s}{Th_i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-s}{Th_i}\right)^2\right)$;
- 2) Епанечникова: $K\left(\frac{t-s}{Th_i}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{t-s}{Th_i}\right)^2\right) & \text{при } -1 \leq \left(\frac{t-s}{Th_i}\right) \leq 1; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$
- 3) равномерная: $K\left(\frac{t-s}{Th_i}\right) = \begin{cases} 0,5 & \text{при } -1 \leq \left(\frac{t-s}{Th_i}\right) \leq 1; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$

Ширина окна была выбрана с помощью метода кросс-валидации на основе наименьших квадратов, который подробно описан в работе (Li, Racine, 2010). Данный метод полностью диктуется вводимыми данными.

Таким образом, оценки альфа и бета рассчитываются как

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{i,t} \\ \hat{\beta}_{i,t} \end{pmatrix} = \left(\sum_{s=1}^T K_{t,s}^{h_i} X_s X_s^T \right)^{-1} \sum_{s=1}^T K_{t,s}^{h_i} X_s R_{i,s},$$

где $X_s = (1 \ R_{m,t})$, $R_{i,s}$ – доходность актива i в момент времени s .

Отметим, что при $h_i \rightarrow \infty$ коэффициенты менее изменчивы во времени и их оценки приближаются к оценкам обычной регрессии с постоянными коэффициентами. Напротив, чем меньше показатель ширины окна, тем менее сглаженными будут оценки.

Таким образом, на основе полупараметрической регрессии получены три оценки альфа и бета для каждого актива в зависимости от вида ядерной функции. Для прогноза альфа и бета так же, как и в случае OLS-метода, была применена скользящая полупараметрическая регрессия, благодаря которой были получены прогнозные значения коэффициентов.

4. ВЫБОР НАИЛУЧШЕЙ МОДЕЛИ

Все четыре описанных выше метода сравнивались для определения наилучшей модели отдельно для анализируемого и прогнозного периодов. В качестве критериев были использованы

показатели внутривыборочной и вневыборочной среднеквадратической ошибки (MSE, или mean squared error) соответственно. Первый рассчитывался как:

$$MSE_i = \left(\sum_{t=1}^S e_{i,t}^2 \right) / S = \left(\sum_{t=1}^S (R_{i,t}^{estimated} - R_{i,t})^2 \right) / S,$$

где $e_{i,t}$ – величина ошибки прогноза актива i для периода времени t ; S – число наблюдений в анализируемом периоде.

Аналогичным образом была оценена вневыборочная ошибка прогноза:

$$MSE_i = \sum_{t=0}^{t-S-1} e_{i,t+1}^2 / (T-S) = \sum_{t=0}^{T-S-1} (R_{i,t+1|t}^{predicted} - R_{i,t+1})^2 / (T-S).$$

Соответственно, чем меньше MSE-показатель, тем точнее модельный прогноз. Таким образом, модель с минимальным значением MSE признавалась наилучшей для каждого актива.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

В табл. 1 показаны результаты сравнения моделей по показателю внутривыборочной MSE⁴.

Согласно результатам для анализируемого периода, полупараметрическая регрессия является наилучшей моделью для 45 из 89 активов, в то время как фильтр Калмана – для остальных 44 активов. Отметим, что полупараметрическая регрессия с гауссовским видом ядерной функции оказалась наиболее эффективной в 15 случаях, с ядром Епанечникова – в 5, а с равномерным ядром – в 25 случаях. Ни модели класса GARCH, ни стандартный OLS-метод не смогли превзойти по точности фильтр Калмана и полупараметрические регрессии ни для одного актива.

Чтобы сравнить модели по всей выборке в среднем, был рассчитан показатель среднего ранга по внутривыборочным MSE. Для этого по каждому активу моделям был придан ранг от 1 до 11 в зависимости от показателя MSE. Таким образом, наиболее точная модель (т.е. с наименьшим значением MSE) получала ранг 1, а наиболее неточная – 11. После того как такая процедура была проделана для всех активов в отдельности, был рассчитан средний ранг для каждой модели по всей выборке.

Средние ранги моделей по внутривыборочной MSE представлены на рис. 1.

Как видно из диаграммы, представленной на рис. 1, наиболее точной моделью по всей выборке в целом является полупараметрическая регрессия с равномерным видом ядерной функции, несмотря на то что она не является лидером по абсолютному числу активов, для которых она является наилучшей. Далее идет фильтр Калмана, которому принадлежит наибольшее число единичных рангов, а за ним – полупараметрическая регрессия с Епанечниковым и гауссовским ядром. С худшими результатами выступают многомерные GARCH-модели, а замыкает данный список OLS-метод, показавший себя наихудшей моделью для всех активов.

Фильтр Калмана, хоть и стал одной из наилучших моделей для оценки динамических бета, но далеко не для всех активов и даже не для большинства в рамках используемой выборки. Таким образом, можно отвергнуть гипотезу H1 ввиду того, что полупараметрические регрессии в совокупности превзошли фильтр Калмана для большего числа активов, а полупараметрическая регрессия с равномерным видом ядерной функции обошла фильтр Калмана в точности по всей выборке в целом. Однако данные результаты отражают только внутривыборочные оценки модели и не являются базисом для сравнения их прогнозной силы.

В табл. 2 показаны результаты сравнения моделей по показателю вневыборочной MSE.

Из данных, представленных в табл. 2, видно, что GARCH-модели, включая те, что учитывают асимметрию в условной волатильности и корреляции, являются наилучшими для большинства активов. В целом GARCH-модели оказались наиболее эффективными для 41 бумаги, полупараметрические регрессии – для 33 бумаг и фильтр Калмана – для 15. Стоит отметить, что GARCH-модели с предположением о нормальном распределении были наиболее точными для 21 актива, а с предположением о распределении Стьюдента – для 20 активов. GARCH-модели, включающие асимметрию в

⁴ Полные таблицы со значениями MSE доступны по запросу.

Таблица 1. Наилучшие модели для анализируемого периода

Модель	Число активов, для которых модель является наилучшей
DCC–GARCH (нормальное распределение)	0 / 89
DCC–GJR–GARCH (нормальное распределение)	0 / 89
ADCC–GJR–GARCH (нормальное распределение)	0 / 89
DCC–GARCH (распределение Стьюдента)	0 / 89
DCC–GJR–GARCH (распределение Стьюдента)	0 / 89
ADCC–GJR–GARCH (распределение Стьюдента)	0 / 89
Фильтр Калмана	44 / 89
Полупараметрическая регрессия (гауссовская)	15 / 89
Полупараметрическая регрессия (Епанечникова)	5 / 89
Полупараметрическая регрессия (равномерная)	25 / 89
OLS	0 / 89

Таблица 2. Наилучшие модели для прогнозного периода

Модель	Число активов, для которых модель является наилучшей
DCC–GARCH (нормальное распределение)	8 / 89
DCC–GJR–GARCH (нормальное распределение)	4 / 89
ADCC–GJR–GARCH (нормальное распределение)	9 / 89
DCC–GARCH (распределение Стьюдента)	3 / 89
DCC–GJR–GARCH (распределение Стьюдента)	12 / 89
ADCC–GJR–GARCH (распределение Стьюдента)	5 / 89
Фильтр Калмана	15 / 89
Полупараметрическая регрессия (гауссовская)	10 / 89
Полупараметрическая регрессия (Епанечникова)	16 / 89
Полупараметрическая регрессия (равномерная)	7 / 89
OLS	0 / 89

**Рис. 1.** Сравнение среднего ранга по внутривыборочной MSE

условной волатильности или условной корреляции, являются наилучшими для 30 активов, что составляет 34% всей выборки. Среди полупараметрических регрессий модель с ядерной функцией Епанечникова оказалась наилучшей для большего числа инструментов (16 из 89), а модель с равномерным ядром, напротив, показала худшие результаты (7 из 89) в отличие от анализируемого периода.

Аналогичным образом, как и для анализируемого периода, рассчитывался средний ранг по вневыборочной MSE для каждой модели. Результаты расчетов представлены на рис. 2. Кон-



Рис. 2. Сравнение среднего ранга по вневыборочной MSE

курения между моделями намного выше в рамках прогнозного периода. Тем не менее можно отметить превосходство GARCH-моделей, причем три наиболее точные модели – это те GARCH-модели, которые учитывают асимметрию в условной волатильности и асимметрии. DCC–GJR–GARCH-модель является наилучшей по всей выборке в целом, хотя она является самой точной только для 12 инструментов, уступая по этому показателю полупараметрической регрессии с Епанечниковым ядром и фильтру Калмана (показано в табл. 2). После GARCH-моделей с небольшим отставанием идут полупараметрические регрессии и только за ними – фильтр Калмана. OLS-метод является наихудшим методом для прогноза бета.

Такую разницу в результатах за анализируемый и прогнозный периоды можно объяснить наличием существенной гетероскедастичности и эффектов асимметрии. В то время как оценки фильтра Калмана и полупараметрических регрессий наиболее точно подстраиваются под динамику доходностей активов в анализируемом периоде, в прогнозном являются не такими точными ввиду неспособности учесть асимметрию и резкие изменения и шоки волатильности. Напротив, использование GARCH-моделей оказывается более гибким, что делает их более надежным инструментом для прогноза.

Таким образом, можно отвергнуть гипотезу H2, ввиду того что фильтр Калмана оказался наихудшим (после OLS-метода) инструментом для прогнозирования бета по всей выборке в целом. Несмотря на превосходство GARCH-моделей во вневыборочном периоде, ни одну модель нельзя назвать универсальной для прогноза бета. Для конкретной бумаги наиболее эффективной будет своя определенная модель.

Для дальнейшего анализа используются оптимальные бета, полученные на основе наиболее эффективных моделей для анализируемого периода. Таким образом, динамика бета исследуется в период с января 2000 г. по декабрь 2012 г.

На рис. 3 показаны средние бета и их средние стандартные отклонения по секторам.

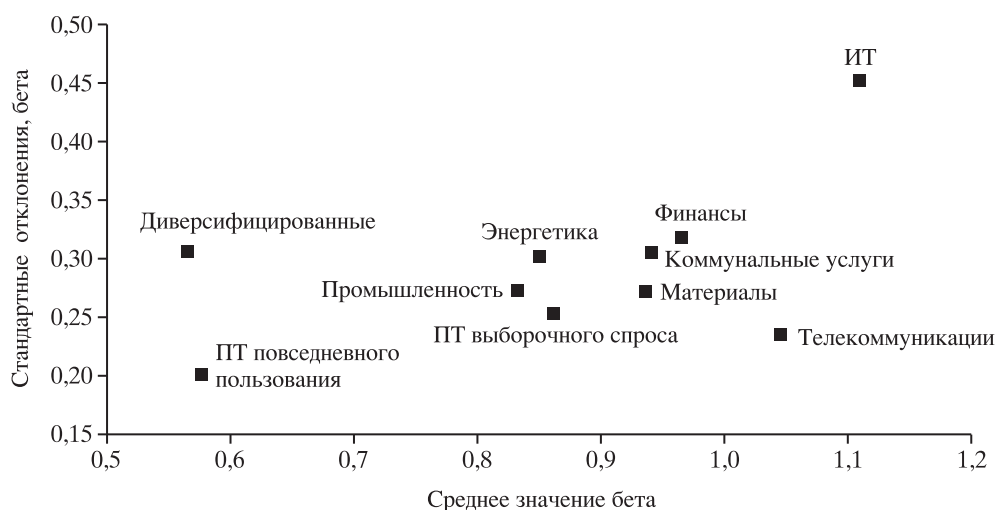


Рис. 3. Средние бета и их средние стандартные отклонения по секторам

Таблица 3. Среднее значение и стандартное отклонение динамических бета по наилучшим моделям и бета, рассчитанных на основе OLS-метода

Динамические бета	Компании											
	Aditya Birla Nuvo	Amtek Auto	Apollo Tyres	Ashok Leyland	Adani Enterprises	Indian Hotels	Hero Honda Motors	Tata Motors	Titan Industries	Videocon Industries	Peninsula Land	Whirlpool of India
OLS бета Среднее значение бета Стандартное отклонение бета	4,68 0,56 0,31	-0,66 0,64 0,30	4,30 0,79 0,11	-0,60 0,96 0,20	2,07 1,01 0,21	5,27 0,85 0,22	-0,23 0,52 0,24	-1,90 1,17 0,43	1,18 0,94 0,30	9,50 0,78 0,18	7,12 1,18 0,46	4,19 0,63 0,14
	Colgate Palmolive	Dabur India	Hindustan Unilever	ITC	Marico	Nestle India	Apollo Hospitals Enterprises	Aurobindo Pharma	Cipla	Dr Reddy's Laboratories	GlaxoSmithKline Pharmaceuticals	Ipsa Laboratories
	-5,14 0,31 0,31	-1,61 0,48 0,16	3,56 0,43 0,20	-3,47 0,60 0,20	3,19 0,35 0,28	-3,32 0,15 0,18	3,24 0,56 0,26	6,65 0,98 0,20	0,79 0,61 0,30	3,27 0,57 0,08	-0,04 0,37 0,12	-9,53 0,67 0,27
OLS бета Среднее значение бета Стандартное отклонение бета	Lupin	Orchid Chemicals Pharmaceuticals	Ranbaxy Laboratories	Sun Pharmaceutical Inds	Bharat Forge	Cummins India	Exide Industries	ABB	Bharat Electronics	Bharat Heavy Electricals	Crompton Greaves	Ganmon India
	-4,19 0,67 0,22	2,93 1,19 0,28	2,67 0,69 0,05	-2,08 0,61 0,12	5,90 0,75 0,17	-0,63 0,54 0,14	1,47 0,48 0,19	1,85 0,70 0,10	-3,34 0,92 0,21	6,99 0,85 0,19	5,17 0,78 0,14	9,31 0,94 0,52
	Havells India	Lakshmi Machine Works	Larsen & Toubro	Praj Industries	ACC	Ambuja Cements	IVRCL Infrastructures & Projects	Siemens	Thermax	Usha Martin	Bajaj Electricals	Blue Star
OLS бета Среднее значение бета Стандартное отклонение бета	-0,73 0,50 0,29	-1,38 0,80 0,32	-1,45 0,94 0,16	2,40 1,14 0,32	0,97 0,82 0,18	1,68 0,61 0,17	0,06 1,50 0,55	2,10 0,83 0,23	-4,25 0,91 0,21	3,48 1,27 0,18	3,82 0,77 0,36	1,08 0,53 0,20
	VIP Industries	Jindal Saw	Welspun Gujarat Stahl Rohren	Grasim Industries	Infosys Technologies	Mphasis	Wipro	Zee Entertainment Enterprises	Tata Communications	Jubilant Life Sciences	Bhushan Steel	Hindalco Industries
	3,96 0,57 0,26	0,33 1,19 0,62	6,98 0,96 0,64	3,92 0,66 0,22	-0,01 0,92 0,45	1,81 0,84 0,27	-0,38 1,57 0,64	4,65 1,11 0,37	1,08 0,98 0,10	-0,17 0,45 0,14	-2,71 0,92 0,32	2,47 0,83 0,36

	Hindu- stan Zinc	JSW Steel	National Aluminium	Sesa Goa	Steel Authority of India	Sterlite Indus- tries	Tata Steel	Tata Chemicals	Asian Paints	Reliance Indus- trial Infra- structure	Bharat Petroleum	Hin- dustan Petro- leum
<i>OLS бета</i>	4,31	0,61	2,46	3,48	5,49	2,83	1,75	1,80	-0,76	0,78	3,76	1,97
Среднее значение бета	0,82	1,26	0,95	1,15	0,98	1,35	1,25	0,96	0,32	1,03	0,80	0,81
Стандартное отклонение бета	0,19	0,44	0,37	0,26	0,21	0,36	0,30	0,17	0,17	0,13	0,34	0,37
	Indian Oil Corpo- ration	ONGC	Gail	Neyveli Lignite Corporation	Reliance Infra- struc-ture	Tata Power	Unitech	Financial Techno- logies (India)	AXIS Bank	Bank of Baroda	Bank of india	HDFC Bank
<i>OLS бета</i>	1,07	5,46	5,20	4,82	5,45	-2,34	4,15	2,85	-1,53	1,50	2,65	0,01
Среднее значение бета	0,81	0,80	0,82	1,17	0,87	0,90	0,80	1,48	1,07	1,08	0,81	0,75
Стандартное отклонение бета	0,45	0,22	0,34	0,41	0,35	0,13	0,72	0,23	0,31	0,33	0,26	0,30
	ICICI Bank	Kotak Mahindra Bank	LIC Housing Finance	Reliance Capital	Shriram Trans- port Finance Com- pany							
<i>OLS бета</i>	2,08	-0,35	-4,78	1,83	-0,28							
Среднее значение бета	0,80	1,05	0,60	1,43	0,74							
Стандартное отклонение бета	0,36	0,20	0,27	0,18	0,35							

Примечание. Курсивом выделены бета, рассчитанные на основе простой регрессии (или OLS-модели); подробно показано, насколько неадекватные значения выдаст OLS-метод по сравнению с более продвинутыми моделями.

Бета отрасли потребительских товаров выборочного спроса имеет одно из самых низких средних значений бета (0,58), уступая только диверсифицированным компаниям (их средняя бета – на уровне 0,56). К тому же бета данной отрасли наименее волатильна (0,2), что делает этот сектор наиболее защищенным от рыночных колебаний и общих экономических условий, способных повлиять на уровень отраслевого систематического риска. Напротив, бета сектора ИТ имеет наибольшее среднее значение (1,11) и стандартное отклонение (0,45). Таким образом, этот сектор можно считать наиболее рискованным ввиду максимального значения систематического риска, а также его высокой волатильности (табл. 3).

В табл. 3 представлена описательная статистика динамических бета, полученных из наилучшей модели, и OLS бета для каждого актива.

Как видно из данных этой таблицы, средние бета по наилучшим моделям сильно отличаются от оценок бета, полученных на основе метода OLS. Последние оказываются очень высокими и даже отрицательными. Данные значения бета являются неадекватными с точки зрения теории корпоративных финансов, что в очередной раз свидетельствует в пользу использования динамических методов.

Можно заметить, что стандартные отклонения бета многих компаний довольно высоки (среднее стандартное отклонение всех бета равняется 0,27), в то время как средние значения бета большинства компаний очень близки к единице (среднее значение бета всех компаний равняется 0,84). Это означает, что бета большего числа бумаг колеблется около 1, таким образом, такие активы могут быть в различные периоды времени защитными или агрессивными.

В табл. 4 показаны результаты тестов Дикки–Фулера, Филипса–Перрона и KPSS для динамических бета рассматриваемых активов. Для проверки был принят 5%-ный уровень значимости.

Таблица 4. Результаты тестов на стационарность

Тест	Тест Дикки–Фулера	Тест Филиппса–Перрона	Тест KPSS
Тест Дикки–Фулера	59 / 89		
Тест Филиппса–Перрона	47 / 89	62 / 89	
Тест KPSS	58 / 89	62 / 89	88 / 89
Все тесты подтверждают стационарность	0 / 89	Все тесты подтверждают нестационарность	47 / 89

Согласно тесту Дикки–Фулера, 59 из 89 динамических бета – нестационарные, по тесту Филиппса–Перрона – 62 из 89, а по тесту KPSS – 88 из 89. Отметим, что три теста одновременно подтверждают нестационарный характер бета для 47 активов, но нет ни одного актива, для которого все три теста одновременно подтверждают стационарность бета. Таким образом, можно утверждать, что динамические бета большего числа компаний нестационарны и их поведение диктуется неким трендом.

Результаты тестов на стационарность практически полностью подтверждают гипотезу H3. В ответ на гипотезу автор отдал предпочтение тесту KPSS, согласно которому бета всех компаний, кроме компании Jindal Saw, демонстрируют нестационарную динамику. Данный вывод также подтверждают результаты работы (Shah, Moonis, 2003).

6. ВЫВОДЫ

В работе были оценены динамические бета 89 котируемых индийских компаний в рамках трех современных подходов: фильтра Калмана, многомерных моделей класса GARCH и полупараметрической регрессии. Основным вывод заключается в том, что все модели, предполагающие динамическое поведение бета, превосходят классическую регрессию с точки зрения точности внутри- и вневыборочного прогнозов. Было обнаружено, что фильтр Калмана не является наилучшей моделью ни для оценки, ни для прогноза динамических бета для большей части активов. Полупараметрические модели составили ему серьезную конкуренцию при оценивании динамических бета в анализируемом периоде, в то время как многомерные GARCH-модели оказались наилучшими для целей прогнозирования бета. Также был сделан вывод о том, что бета большей части анализируемых активов нестационарна, а значит, применение традиционного метода OLS, предполагающего постоянные бета, для этих бумаг недопустимо.

Возможное практическое применение результатов этой работы – использование оцененных бета в рамках популярных DCF, LBO и других моделей. Так, большинство аналитиков фондового рынка развивающихся стран использует формулу Хамады для оценки бета компаний, поскольку скорее корректируют безрычаговую бета по структуре капитала компании, чем рассчитывают рычаговую бета напрямую с помощью регрессии. Делается это из-за того, что регрессионный метод оценки приводит к значениям бета, не согласующимся с теорией корпоративных финансов из-за слабой эффективности рынков, их сильной волатильности и высокой подверженности внешним шокам. В таких случаях более полезными будут динамические методы оценки, которые позволяют учесть асимметрию, гетероскедастичность и даже моделировать динамические альфа, что позволяет получить более сглаженные и более точные оценки бета по сравнению с регрессионным подходом.

Представленная методология может быть также полезной в работе риск-менеджеров, трейдеров и портфельных управляющих. Так, на основе оценок и прогнозов динамических бета можно составить бета-нейтральный портфель, чувствительность которого к рыночному индексу будет нулевой, а показатель альфа портфеля (анормальной доходности) будет максимальным. Для такого портфеля даже небольшие изменения бета, но по большому числу активов, будут довольно существенными, а значит, динамические методы прогноза и оценки бета следует использовать для его постоянной калибровки и поддержания нейтральной позиции по отношению к рынку. Применяемые в работе методы могут также быть полезны при использовании активных страте-

гий хеджирования, где веса различных активов в портфеле следует корректировать для достижения меньшей волатильности. По сути, показатель бета представляет собой оптимальный коэффициент хеджирования для портфеля, состоящего из рыночного индекса и некоего актива. Так, в работе (Асатуров, Теплова, 2014) детально описано, как многомерные GARCH-модели можно использовать для целей хеджирования.

В случае нестационарности бета важность использования динамических бета возрастает еще больше, так как применение регрессии подразумевает их постоянство. Исходя из данных в литературе, наиболее остро проблема стационарности бета стоит для развивающихся рынков, а значит, участникам этих рынков следует учитывать это обстоятельство в своей работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используемая выборка с разделением по секторам промышленности.

Рыночный индекс: BSE100 index.

Диверсифицированные: Aditya Birla Nuvo.

Потребительские товары выборочного спроса: Amtek Auto; Apollo tyres; Ashok Leyland; Adani Enterprises; Indian Hotels; Hero Honda Motors; Tata Motors; Titan Industries; Videocon Industries; Peninsula Land; Whirlpool of India.

Потребительские товары повседневного пользования: Colgate Palmolive (India); Dabur India; Hindustan Unilever; ITC; Marico; Nestle India; Apollo Hospitals Enterprises; Aurobindo Pharma; Cipla; Dr Reddy's Laboratories; GlaxoSmithKline Pharmaceuticals; Ipca Laboratories; Lupin; Orchid Chemicals Pharmaceuticals; Ranbaxy Laboratories; Sun Pharmaceutical Industries.

Промышленность: Bharat Forge; Cummins India; Exide Industries; ABB; Bharat Electronics; Bharat Heavy Electricals; Crompton Greaves; Gammon India; Havells India; Lakshmi Machine Works; Larsen & Toubro; Praj Industries; ACC; Ambuja Cements; IVRCL Infrastructures & Projects; Siemens; Thermax; Usha Martin; Bajaj Electricals; Blue Star; V.I.P. Industries; Jindal Saw; Welspun Gujarat Stahl Rohren; Grasim Industries.

ИТ: Infosys Technologies; Mphasis; Wipro.

Телекоммуникации: Zee Entertainment Enterprises; Tata Communications.

Материалы: Jubilant Life Sciences; Bhushan Steel; Hindalco Industries; Hindustan Zinc; JSW Steel; National Aluminium; Sesa Goa; Steel Authority of India; Sterlite Industries; Tata Steel; Tata Chemicals; Asian Paints.

Энергетика: Reliance Industrial Infrastructure; Bharat Petroleum; Hindustan Petroleum; Indian Oil Corporation; ONGC.

Коммунальные услуги: Gail (India); Neyveli Lignite Corporation; Reliance Infrastructure; Tata Power.

Финансы: Unitech; Financial Technologies (India); AXIS Bank; Bank of Baroda; Bank of India; HDFC Bank; ICICI Bank; Kotak Mahindra Bank; LIC Housing Finance; Reliance Capital; Shriram Transport Finance Company.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Асатуров К.Г., Теплова Т.В. (2014). Построение коэффициентов хеджирования для высоколиквидных акций российского рынка на основе моделей класса GARCH // *Экономика и математические методы*. Т. 50. № 1. С. 37–54.
- Ang A., Kristensen D. (2012). Testing Conditional Factor Models // *Journal of Financial Economics*. Vol. 106. P. 132–156.
- Bodurtha J., Mark N. (1991). Testing the CAPM with Time-Varying Risk and Returns // *Journal of Finance*. Vol. 46. P. 1485–1505.

- Bollerslev T.** (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity // *Journal of Econometrics*. Vol. 31. P. 307–327.
- Bollerslev T., Engle R.F., Wooldridge J.M.** (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances // *Journal of Political Economy*. Vol. 96. P. 116–131.
- Bollerslev T., Engle R.F., Woolbridge J.M.** (1992). ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence // *Journal of Econometrics*. Vol. 52 (1–2). P. 5–60.
- Bos T., Newbold P.** (1984). An Empirical Investigation of the Possibility of Stochastic Systematic Risk in the Market Model // *Journal of Business*. Vol. 57. P. 35–41.
- Bos T., Fetherston T.A.** (1992). Market Model Nonstationarity in the Korean Stock Market // *Pacific Basin Capital Market Research*. Vol. 3. P. 287–301.
- Bos T., Fetherston T.A., Martikainen T., Perttunen J.** (1995). The International Comovements of Finnish Stocks // *The European Journal of Finance*. Vol. 1. P. 95–111.
- Brooks R.D., Faff R.W., McKenzie M.D.** (1998). Time-Varying Beta Risk of Australian Industry Portfolios: A Comparison of Modelling Techniques // *Australian Journal of Management*. Vol. 23. P. 1–22.
- Brooks R.D., Faff R.W., McKenzie M.D.** (2002). Time-Varying Country Risk: An Assessment of Different Modelling Techniques // *European Journal of Finance*. Vol. 8. P. 249–274.
- Cappiello L., Engle R.F., Sheppard K.** (2006). Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns // *Journal of Financial Econometrics*. Vol. 4. P. 537–572.
- Choudhry T., Wu H.** (2008). Forecasting Ability of GARCH vs Kalman Filter Method: Evidence from Daily UK Time-Varying Beta // *Journal of Forecasting*. Vol. 27. P. 670–689.
- Collins D.W., Ledolter J., Rayburn J.** (1987). Some Further Evidence on the Stochastic Properties of Systematic Risk // *Journal of Business*. Vol. 60(3). P. 425–448.
- DeJong D., Nankervis J., Savin N., Whiteman C.** (1992). The Power Problems of Unit Root Tests in Time Series with Autoregressive Errors // *Journal of Econometrics*. Vol. 53. P. 323–344.
- Eisenbeiss M., Kauermann G., Semmler W.** (2007). Estimating Beta-Coefficients of German Stock Data: A Non-Parametric Approach // *The European Journal of Finance*. Vol. 13(6). P. 503–522.
- Engle C., Rodrigues A.** (1989). Tests of International CAPM with Time-Varying Covariances // *Journal of Applied Econometrics*. Vol. 4. P. 119–138.
- Engle R.F.** (2002). Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models // *Journal of Business and Economic Statistics*. Vol. 20. P. 339–350.
- Esteban M.V., Orbe-Manadaluniz S.** (2010). A Nonparametric Approach for Estimating Betas: the Smoothed Rolling Estimator // *Applied Economics*. Vol. 42. P. 1269–1279.
- Fabozzi F., Francis J.** (1978). Beta as a Random Coefficient // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 13. P. 101–116.
- Faff R.W., Hillier D., Hillier J.** (2000). Time-varying beta risk: An analysis of alternative modeling techniques // *Journal of Business Finance and Accounting*. Vol. 27. P. 523–554.
- Faff R.W., Lee J.H.H., Fry T.R.L.** (1992). Time Stationarity of Systematic Risk: Some Australian Evidence // *Journal of Business and Accounting*. Vol. 19. P. 253–270.
- Fama E.F., French K.R.** (1993). Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds // *Journal of Financial Economics*. Vol. 33(1). P. 3–56.
- Glosten L. R., Jaganathan R., Runkle R.** (1993). On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks // *Journal of Finance*. Vol. 48(5). P. 1779–1801.
- Groenewold N., Fraser P.** (1999). Time-Varying Estimates of CAPM Betas // *Mathematics and Computers in Simulations*. Vol. 48. P. 531–539.
- Hastie T., Tibshirani R.** (1993). Varying-Coefficient Models // *Journal of the Royal Statistic Society, Series B (Methodology)*. Vol. 55(4). P. 757–796.
- He Z., Kryzanowski L.** (2008). Dynamic Betas for Canadian Sector Portfolios // *International Review of Financial Analysis*. Vol. 17. P. 1110–1122.
- Johansson A.C.** (2009). Stochastic Volatility and Time-Varying Country Risk in Emerging markets // *The European Journal of Finance*. Vol. 15(3). P. 337–363.
- Jostova G., Philipov A.** (2005). Bayesian Analysis of Stochastic Betas // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 40(4). P. 747–778.

- Kalman R.E.** (1960). A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // *Journal of Basic Engineering*. Vol. 82 (1). P. 35–45.
- Kim D.** (1993). The Extent of Non-Stationarity of Beta // *Review of Quantitative Finance and Accounting*. Vol. 3. P. 241–254.
- Kok K.L.** (1992). Stability and Predictability of Betas of Malaysian Securities // *Securities Industry Review*. Vol. 18. P. 65–74.
- Li Q., Racine J.S.** (2010). Smooth Varying-Coefficient Estimation and Inference for Qualitative and Quantitative Data // *Econometric Theory*. Vol. 26. P. 1607–1637.
- Li X.** (2003). On Unstable Beta Risk and Its Modelling Techniques for New Zealand Industry Portfolios. Massey University Commerce. Working Paper 03.01.
- Li Y., Yang L.** (2011). Testing Conditional Factor Models: A Nonparametric Approach // *Journal of Empirical Finance*. Vol. 18. P. 972–992.
- Lie F., Brooks R., Fama R.** (2000). Modelling the Equity Beta Risk of Australian Financial Sector Companies // *Australian Economic Papers*. Vol. 39. P. 301–311.
- Lintner J.** (1965). The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // *Review of Economics and Statistics*. Vol. 47. P. 13–37.
- Markowitz H.M.** (1952). Portfolio Selection // *Journal of Finance*. Vol. 12. P. 77–91.
- Mergner S., Bulla J.** (2008). Time-Varying Beta Risk of Pan-European Industry Portfolios: A Comparison of Alternative Modeling Techniques // *European Journal of Finance*. Vol. 14(8). P. 771–802.
- Schwert G.W., Seguin P.** (1990). Heteroskedasticity in Stock Returns // *Journal of Finance*. Vol. 45. P. 1129–1155.
- Shah A., Moonis S.A.** (2003). Testing for Time Variation in Beta in India // *Journal of Emerging Markets Finance*. Vol. 2(2). P. 163–180.
- Sharpe W.F.** (1964). Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk // *Journal of Finance*. Vol. 45. P. 425–442.
- Sunder S.** (1980). Stationarity of Market Risk: Random Coefficients Tests for Individual Stocks // *Journal of Finance*. Vol. 4. P. 1129–1155.
- Wells C.** (1994). Variable Betas on the Stockholm Exchange 1971–1989 // *Applied Economics*. Vol. 4. P. 75–92.
- Yun J.** (2002). Forecasting Volatility in the New Zealand Stock Market // *Applied Financial Econometrics*. Vol. 12. P. 193–220.

Поступила в редакцию
23.01.2015 г.

Dynamic Models of Systematic Risk: Evidence from the Indian Stock Market

K.G. Asaturov

The paper examines dynamic systematic risk nature of the Indian companies in the frame of the market model. The closing weekly prices of 89 Indian stocks and BSE 100 index as the market index during the period from January 2000 to December 2013 are analyzed with rolling OLS, multivariate GARCH models, semiparametric regression and a Kalman Filter. According to the results for the analyzed period, in 44 out of 89 cases Kalman Filter is the best model, while semiparametric regressions – in the other 45 cases. As for the forecasted period, for 41 out of 89 stocks multivariate GARCH-models surprisingly outperform both semiparametric models (33 out of 89) and a Kalman Filter technique (15 out of 89). Moreover, analysis of the betas dynamic shows that for 5% significance level 59 and 62 out of 89 time-varying betas processes are non-stationary according to ADF and Philips–Perron tests respectively and the only one of the processes is stationary according to KPSS test.

Keywords: time-varying beta; Indian stock market; DCC–GARCH-model; Kalman Filter; semiparametric regression.

JEL Classification: C14, C22, C58, G10, G12.