

---

---

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

---

---

ПОСТРОЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХЕДЖИРОВАНИЯ  
ДЛЯ ВЫСОКОЛИКВИДНЫХ АКЦИЙ РОССИЙСКОГО РЫНКА  
НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ КЛАССА GARCH

© 2014 г. К.Г. Асатуров, Т.В. Теплова

(Москва)

В работе предложен оригинальный метод построения стратегии динамического хеджирования инвестиций в акции, основанный на многомерных GARCH-моделях, позволяющий оценить коэффициенты хеджа по фьючерсам на рассматриваемые акции (работоспособность метода продемонстрирована для акций российских компаний). Метод обеспечивает расчет динамических коэффициентов хеджирования вместо фиксированных коэффициентов, получаемых традиционным методом наименьших квадратов. В работе показано, что: 1) именно динамика фьючерсного рынка влияет на поведение цен акций российского рынка; 2) в условной корреляции доходности для всех пар “акция – фьючерс” отсутствует асимметрия; 3) в условной волатильности доходности рассматриваемых рынков имеет место асимметрия; 4) модели класса GARCH позволяют разработать метод расчета коэффициентов хеджирования для построения портфеля с лучшими характеристиками “риск – доходность”.

**Ключевые слова:** хеджирующие стратегии, коэффициент хеджирования, показатель эффективности хеджирования; динамическая корреляция; асимметричные шоки волатильности, акции, фьючерсы, многомерные модели GARCH.

**Классификация JEL:** C1, C13, C18, C4, C44, C5, C53, C6.

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы на финансовых рынках наблюдается нестабильность, обусловленная как ипотечным кризисом США 2007 г., так и проблемами макроэкономической динамики ведущих мировых стран в 2008–2009 гг., долговыми кризисами европейских стран 2009–2012 гг. и продолжающейся рецессией в РФ. Такая ситуация актуализирует вопросы построения инвестиционных портфелей с приемлемыми для инвестора характеристиками “риск–доходность”. Важной характеристикой, которую принимают инвесторы российского рынка при формировании портфелей, является ликвидность финансовых активов, так как объемы торгов акциями снижались на всем горизонте 2008–2013 гг. Даже попадание в официальный список 100 ликвидных инструментов биржи часто не гарантирует инвестору реальной возможности получить приемлемые результаты инвестирования<sup>1</sup>.

Одним из признанных инструментов снижения риска инвестирования в акции является добавление в портфель фьючерсов на эти акции. Но построение таких хеджированных портфелей требует понимания существующих взаимосвязей между фьючерсными и фондовыми (спотовыми) рынками, предполагает оценку направлений влияния изменений волатильности на этих рынках. Мы исходим из того, что математический анализ динамики взаимозависимости (взаимовлияние доходностей и волатильности) рассматриваемых рынков акций и фьючерсов позволяет рассчитать адекватные коэффициенты хеджирования для построения приемлемого портфеля.

Для анализа динамики взаимосвязей фьючерсных и фондовых рынков нами выбраны многомерные GARCH-модели, которые позволяют оценить динамическую корреляцию рынков и

---

<sup>1</sup> Например, в декабре 2009 г. в список 100 ликвидных акций российского рынка (на ФБ ММВБ) вошли акции компаний “Финкоминвеста” (в декабре было заключено сделок на 277 млн руб.) и “Интертрейдинвеста” (на 408,7 млн руб.), а в январе 2010 г. торги были приостановлены; 17 июня 2010 г. ФСФР аннулировала выпуск ценных бумаг этих компаний из-за недостоверности сведений в проспекте эмиссии. Акции прошли делистинг.

выявить эффекты асимметрии, которые наблюдаются на анализируемых сегментах финансовых рынков. Практическая и теоретическая ценность данного класса моделей подтверждалась во многих исследованиях, а новшество предложенного нами метода делает данный анализ своевременным и актуальным.

В рамках исследования четыре модели класса GARCH сравниваются между собой и с традиционным методом OLS, который используется для нахождения постоянной ставки хеджирования риска инвестирования в акции. Для выявления наилучшего метода оценки динамических ставок хеджирования нами сопоставляются следующие модели: модель динамической условной корреляции (DCC–GARCH), асимметричная модель динамической условной корреляции (ADCC–GARCH), модель динамической условной корреляции с учетом асимметрии в условной волатильности (DCC–GJR–GARCH) и асимметричная модель динамической условной корреляции с учетом асимметрии в условной волатильности (ADCC–GJR–GARCH). В работе предлагается двухэтапный алгоритм отбора наилучшей модели из четырех рассматриваемых (минимизирующей риск портфеля): на первом этапе по показателю среднеквадратической ошибки (MSE, mean squared error), а на втором – по показателю эффективности хеджирования (HER, hedging effectiveness ratio).

На примере трех пар высоколиквидных инструментов российского финансового рынка на исходном (2008–2012) и прогнозном (2013) временных отрезках доказана эффективность применения предложенного оригинального метода для формирования хеджированного портфеля.

Нами оцениваются и прогнозируются оптимальные ставки хеджирования (OHR, optimal hedge ratio) для трех высоколиквидных акций крупных компаний российского рынка: ОАО “Газпром”, ОАО “Лукойл” и ОАО “Сбербанк”. Выбор этих акций и фьючерсов на них вызван большой популярностью этих бумаг у российских и зарубежных инвесторов (приемлемые уровни корпоративного управления, потенциал роста цен акций с учетом низких текущих мультипликаторов P/E, EV/EBITDA), а также высокая ликвидность бумаг (торговые обороты как самих акций, так и фьючерсов на них, лидируют на российском рынке; данные бумаги показывают наименьшие показатели бид-аск спреда<sup>2</sup> (bid-ask spread), отсутствуют торговые дни с нулевой доходностью).

За основу нами были выбраны две известные модели класса GARCH: DCC–GARCH и ADCC–GARCH, которые в рамках нашего исследования модифицируются до вида DCC–GJR–GARCH и ADCC–GJR–GARCH.

## ИСТОРИЯ ПОСТРОЕНИЯ ХЕДЖИРУЮЩИХ СТРАТЕГИЙ НА ОСНОВЕ GARCH-МОДЕЛЕЙ

Хеджирующие стратегии, основанные на моделях GARCH, стали развиваться с 2000-х годов и были предложены для многих товарных рынков на основе срочных контрактов по этим товарам (фьючерсы на сырье). Не всегда исследования демонстрировали положительные результаты инвестирования. В (Haigh, Holt, 2002) приведена оценка коэффициентов хеджирования фьючерсами на энергоносители с помощью GARCH–BEKK и VEC-моделей. В (Hammoudeh et al., 2010) были построены стратегии хеджирования для рынков драгоценных металлов, где для каждой пары драгоценных металлов были рассчитаны оптимальные веса в портфеле и динамические ставки хеджирования. В (Chang et al., 2012) была доказана возможность применения GARCH-моделей для валютной пары и фьючерса на эту пару. В (Chang et al., 2011; Aroufi et al., 2012; Sadorsky, 2012) посредством многомерных GARCH исследовались коэффициенты хеджирования и эффективность стратегий (обоснован показатель эффективности хеджирования (HER, hedging effectiveness ratio)), где в качестве хеджа использовались нефтяные фьючерсные контракты. Результаты перечисленных исследований свидетельствуют о высокой эффективности построенных стратегий согласно показателю HER.

В работе (Wu, Guan, 2009) изучались взаимосвязи между нефтяными фьючерсами и фьючерсами на пшеницу. Авторы обнаружили, что ни одна из традиционно используемых моделей, включая GARCH, не позволяет снизить риски при включении данных активов в один портфель.

<sup>2</sup> Разности лучших цен продавцов и покупателей по рассматриваемому финансовому активу как показатель ликвидности этого актива.

Исследования, в которых акцентировалось внимание на возможности построения портфеля заданного уровня риска, составленного из активов фондовых и фьючерсных рынков, появились совсем недавно. В работе (Kolokolov, 2011) построен портфель из рыночных индексов и фьючерсных контрактов на них.

Мы задались вопросом, можно ли на основе моделей класса GARCH построить приемлемые хеджирующие стратегии (с помощью фьючерсов на акции) на отдельные высоколиквидные акции российского рынка с позиции рыночного инвестора, минимизирующего риск инвестирования в периоды высокой финансовой нестабильности. Критерием отбора модели является лучший по построенному портфелю результат снижения риска через подбор коэффициентов хеджирования и максимальный коэффициент Шарпа.

## ГИПОТЕЗЫ НАШЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Разработка модифицированных моделей и их спецификация проводились для проверки нескольких поставленных в рамках работы гипотез.

**Гипотеза 1.** Именно фьючерсный рынок (фьючерсы на акции) определяет поведение российского фондового рынка (динамику цен и доходностей акций). В академической литературе нет единого мнения о взаимозависимости фьючерсного и фондового рынков. Реакция и акций, и фьючерсов на внешние шоки достаточно быстрая, и из наблюдений изменений доходности не всегда очевидно, в какой последовательности меняются рассматриваемые инструменты в ответ на внешние вызовы. В ряде работ (например, (Shyy et al., 1996; Chris at al., 2001; Stoll, Whaley, 1990)) показано, что за счет более низких транзакционных издержек и более высокой ликвидности фьючерсные рынки быстрее реагируют на различные внешние шоки, тем самым определяя последующее движение доходности акций. Но есть и альтернативная точка зрения (она находит обоснование в работах (Chan, 1992; Wahab, Lashgari, 1993)), согласно которой фьючерсные цены следуют за динамикой акций.

**Гипотеза 2.** Существует асимметрия в условной (по прошлым значениям ряда) волатильности и условной корреляции двух рассматриваемых рынков (воздействие негативных и положительных новостей оказывает неодинаковое влияние на доходности и волатильности инструментов рассматриваемых рынков, на взаимосвязи между фьючерсным и фондовым рынками). В данной статье мы тестируем гипотезу, согласно которой инвесторы, торгующие на фондовых и фьючерсных рынках, склонны сильнее реагировать на негативные шоки смежных рынков, чем на положительные. В академической литературе вопрос о присутствии асимметрии в условной корреляции между рынками был поставлен относительно недавно (в 2000-е годы). Имеется ряд эмпирических подтверждений этой гипотезы (Capiello at al., 2006; Bekaert, Wu, 2000), и, в частности, для таких рынков, как фьючерсные и рынки их базовых активов, где обнаруживается очень сильная связь и любой шок может существенно повлиять на условную динамическую корреляцию. По нашему мнению, включение асимметрии в модель ADCC–GARCH позволяет получить более точную оценку условной корреляции. Однако асимметричные реакции могут существовать не только в условных корреляциях двух рынков, но и на исходных рядах доходностей акций и фьючерсов, чему есть ряд подтверждений (Wu, 2001; Crouchy, Rockinger, 1997). Чтобы учесть этот факт, нами была предложена спецификация модели GJR–GARCH (мы исходили из того, что (Brailsford, Faff, 1996; Taylor, 2004) доказали приемлемость GJR–GARCH для выявления эффекта асимметрии) для моделирования поведения условных волатильностей фондовых и фьючерсных рынков. Новая спецификация позволила учесть асимметрию в условной волатильности доходностей (тот факт, что инвесторы по-разному воспринимают проходящую негативную и позитивную информацию) и протестировать гипотезу, согласно которой негативные шоки больше усиливают волатильность рынков, чем положительные.

**Гипотеза 3.** Предложенный нами метод построения хеджирующей стратегии формирования портфеля акций эффективнее традиционного метода наименьших квадратов (ordinary least squares, OLS). Для проверки третьей гипотезы четыре предложенные модели (а именно: модель динамической условной корреляции (DCC–GARCH), асимметричная модель динамической условной корреляции (ADCC–GARCH), модель динамической условной корреляции с уче-

том асимметрии в уравнениях условной волатильности (DCC–GJR–GARCH) и асимметричная модель динамической условной корреляции с учетом асимметрии в условной волатильности (ADCC–GJR–GARCH)) сравниваются для определения ставок хеджирования с традиционным подходом OLS. Кроме того, все рассматриваемые в работе модели класса GARCH сравниваются между собой для выявления наилучших с точки зрения построения прогноза ставок хеджирования (речь идет о динамическом хеджировании). В качестве критерия для ранжирования моделей применяется показатель эффективности хеджирования (HER, hedging effectiveness ratio) как для исходного, так и для прогнозного анализируемого периода, а также с помощью теста Diebold–Mariano сравниваются величины среднеквадратических ошибок прогноза (MSE, mean squared errors).

Традиционный алгоритм оценки ставок хеджирования (алгоритм разработан в 1960–1970-е годы и базируется на методе OLS (первые работы – (Johnson, 1960; Stein, 1960; Ederington, 1979)), при хеджировании, например, позиции инвестора на спотовом фондовом рынке с помощью фьючерса строятся на расчете коэффициента при объясняющей переменной регрессии доходности акций от доходности фьючерса (поиск тангенса угла наклона регрессионной прямой). Впоследствии такой алгоритм подвергся критике (Baillie, Myers, 1991; Cecchetti et al., 1988), так как он не учитывает условной информации (различные ситуации на рынке – подъем, кризис, рецессия) и тем самым предполагает постоянными значения и волатильности доходностей финансовых инструментов, и ковариацию между ними. К тому же получаемая регрессионная оценка коэффициента хеджа игнорирует серийную корреляцию и гетероскедастичность в рядах доходностей, которые часто наблюдаются на финансовых рынках (Herbs et al., 1993; Park, Bera, 1987).

Преимущества GARCH-моделей относительно метода наименьших квадратов (OLS) были подтверждены в ряде работ. Так, (Kroner, Sultan, 1993) показали, что ставки хеджирования, оцененные в двумерной модели GARCH, дают лучшие результаты, чем ставки, оцененные с помощью регрессии по OLS; (Ku et al., 2007), применив модель DCC–GARCH, продемонстрировали ее превосходство над методом OLS с точки зрения эффективности хеджирования. Но есть работы, которые, с одной стороны, подтверждают эффективность применения моделей класса GARCH для построения хеджирующих стратегий, а с другой стороны, доказывают отсутствие абсолютного превосходства этих моделей (Chakraborty, Barkoulas, 1999; Lien et al., 2002). В рамках тестирования третьей гипотезы мы ставили целью выявить преимущества моделей класса GARCH и разработать спецификацию модели, которая бы показывала абсолютное превосходство над обсуждаемыми вариантами.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ GARCH-МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ХЕДЖИРОВАНИЯ

**Стратегия хеджирования фьючерсами и оценка эффективности хеджированного портфеля.** Так как фьючерсные цены и цены их базовых активов зачастую движутся в одном направлении, то теоретически инвесторы могут хеджировать свои позиции на фондовом рынке, занимая противоположные позиции на фьючерсном рынке. Представим инвестора, который открывает длинную позицию на рынке акций (покупает акции), и, соответственно, прибыль по его инвестированию будет составлять разницу между ценой покупки и ценой продажи ценной бумаги

$$PR_{port} = s_t - s_{t-1},$$

где  $s_t$  – цена акции в момент времени  $t$ ;  $s_{t-1}$  – цена акции в момент времени  $t - 1$ .

Если инвестор хеджирует свою длинную позицию, заняв короткую на фьючерсном рынке (продает без покрытия, “шортит” фьючерсы), то прибыль по портфелю будет рассчитана по формуле

$$PR_{port} = (s_t - s_{t-1}) - \gamma_t(f_t - f_{t-1}) = PR_{S,t} - \gamma_t PR_{F,t},$$

где  $f_t$  и  $f_{t-1}$  – стоимость фьючерса в момент времени  $t$  и  $t - 1$  соответственно;  $\gamma_t$  – ставка хеджирования (доля фьючерсных контрактов на единицу акций, которые инвестор должен продать для снижения риска).

Учитывая всю имеющуюся информацию к моменту времени  $t$ , выраженную информационным множеством  $\Omega_{t-1}$ , условная (по рядам прошлых данных) дисперсия доходности (обозначение для доходности –  $R$ ) сформированного портфеля будет рассчитана, исходя из дисперсий ( $\text{var}$ ) доходности акций и фьючерсов и ковариации ( $\text{cov}$ ) между ними:

$$\text{var}(R_{port} | \Omega_{t-1}) = \text{var}(R_{S,t} | \Omega_{t-1}) - 2\gamma_t \text{cov}(R_{S,t}, R_{F,t} | \Omega_{t-1}) + \gamma_t^2 \text{var}(R_{F,t} | \Omega_{t-1}),$$

где  $\text{var}(R_{S,t} | \Omega_{t-1})$  и  $\text{var}(R_{F,t} | \Omega_{t-1})$  – условные (по прошлым значениям ряда) дисперсии доходностей акций и фьючерсов соответственно, а  $\text{cov}(R_{S,t}, R_{F,t} | \Omega_{t-1})$  – условная ковариация между доходностями акций и фьючерсов.

Так как большинство стратегий хеджирования основано на снижении риска (волатильности) портфеля (например, (Chen et al., 2003)), то, минимизируя уравнение риска (дисперсии) портфеля, получаем оптимальную ставку хеджирования (OHR, optimal hedge ratio), при которой риск портфеля минимальный:

$$\gamma_t^* | \Omega_{t-1} = \frac{\text{cov}(R_{S,t}, R_{F,t} | \Omega_{t-1})}{\text{var}(R_{F,t} | \Omega_{t-1})}.$$

Для оценки эффективности построенной стратегии хеджирования может быть введен показатель эффективности хеджирования (HER, hedging effectiveness ratio), учитывающий получаемые выгоды в виде относительной оценки снижения волатильности:

$$HER = \frac{(\text{var}_{unhedged} - \text{var}_{hedged})}{\text{var}_{unhedged}},$$

где  $\text{var}_{hedged}$  – дисперсия построенного портфеля, а  $\text{var}_{unhedged}$  – дисперсия незахеджированного портфеля, которая может быть принята равной дисперсии доходности акций (аналогично в (Ripple, Moosa, 2007)).

## МОДЕЛИ МЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ СТАВОК ХЕДЖИРОВАНИЯ

Предложенный нами метод построения хеджированного портфеля с меняющимися во времени коэффициентами хеджирования основан на модели DCC–GARCH (Dynamic Conditional Correlation – Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) (Engle, 2002) и модели ADCC–GARCH (Asymmetric Dynamic Conditional Correlation – Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) (Capiello, Engle, Sheppard, 2006).

Модель GARCH как обобщение модели ARCH (Generalized ARCH) предполагает представление доходности финансового актива с учетом зависимости условной дисперсии этой доходности не только от квадратов прошлых значений (как в модели ARCH), но и от прошлых значений условной дисперсии. В модели GARCH параметры ( $p$ ,  $q$ ) в представлении  $GARCH(p, q)$  определяются следующим образом:  $p$  – порядок членов GARCH  $\sigma_2$  и  $q$  – порядок членов ARCH. Необходимым развитием этих моделей в приложении к моделированию процессов на финансовых рынках (рядам данных доходностей акций, фьючерсов) стал учет асимметрии как в волатильности, так и в корреляции рядов (что в рамках нашего исследования принципиально, так как формируется портфель из двух классов активов, риск которого определяется корреляцией рядов доходностей этих активов, а также волатильностью самих активов). В модели GJR–GARCH (Glosten, Jaganathan, Runkle, 1993) предполагаются разные коэффициенты для отрицательных и положительных прошлых значений ряда.

Класс динамических моделей (DCC) базируется на предположении о меняющихся во времени зависимостях. Преимущество модели ADCC–GARCH над DCC–GARCH заключается в возможности учесть асимметрию в условной корреляции доходностей рассматриваемых двух классов активов. Предлагаемым в нашей работе развитием подхода к построению меняющихся во времени коэффициентов хеджирования является использование моделей, учитывающих асимметрию в корреляции доходностей по двум финансовым активам (акции и фьючерсы), а также

в условных волатильностях доходностей рассматриваемых классов активов (базового актива и инструмента хеджирования (в нашем случае – фьючерса)), т.е. переход к моделям DCC–GJR–GARCH и ADCC–GJR–GARCH.

Ковариационно-вариационная матрица  $H_t$  в моделях DCC и ADCC имеет вид:

$$H_t = D_t R_t D_t,$$

или

$$\begin{pmatrix} h_{S,t} & h_{SF,t} \\ h_{SF,t} & h_{F,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{S,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{F,t}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & p_{SF,t} \\ p_{SF,t} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{h_{S,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{F,t}} \end{pmatrix},$$

где  $h_{S,t}$  и  $h_{F,t}$  – условные дисперсии остатков, а  $h_{SF,t}$  – условная ковариация этих остатков. Заметим, что корреляционная матрица  $R_t$  различным образом определяется в моделях DCC и ADCC. В моделях DCC она рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned} R_t &= (\text{diag}(Q_t))^{-1/2} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-1/2}, \\ Q_t &= (1 - \omega_1 - \omega_2) \bar{Q} + \omega_1 z_{t-1} z'_{t-1} + \omega_2 Q_{t-1}, \\ \bar{Q} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T z_t z'_t, \\ \omega_1 + \omega_2 &< 1, \quad \omega_1, \omega_2 > 0, \end{aligned}$$

где  $z_t$  – стандартизированные остатки в момент времени  $t$  ( $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ );  $Q_t$  – ковариационная матрица стандартизированных остатков;  $\bar{Q}$  – безусловная ковариационная матрица стандартизированных остатков.

Условия, налагаемые на параметры  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , обязательны: во-первых, они обеспечивают положительную определенность корреляционной матрицы, а во-вторых, сохраняют такую ее структуру, при которой однонаправленные колебания фондового и фьючерсного рынков будут увеличивать корреляцию.

В моделях ADCC в уравнение условной корреляции включен параметр, отражающий наличие асимметрии:

$$\begin{aligned} Q_t &= (1 - \omega_1 - \omega_2) \bar{Q} - \omega_3 \bar{N} + \omega_1 z_{t-1} z'_{t-1} + \omega_3 Q_{t-1} + \omega_3 \eta_{t-1} \eta'_{t-1}, \\ \bar{N} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \eta_t \eta'_t, \end{aligned}$$

где  $\eta_t = I[z_t < 0] \circ z_t$  и  $I$  – функция, равная 1, если  $z_t < 0$ , и 0 – в ином случае; символ “ $\circ$ ” обозначает поэлементное умножение;  $\bar{N}$  – безусловная ковариационная матрица  $\eta_t$ .

Параметр  $\omega_3$  отражает асимметрию в условной ковариации и корреляции соответственно, и его значимость показывает наличие этого эффекта между анализируемыми акциями и фьючерсами. Условия, налагаемые на параметры  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , обеспечивают положительную определенность ковариационной матрицы  $Q_t$  в модели ADCC:

$$\omega_1 + \omega_2 + \mu \omega_3 < 1,$$

где  $\mu$  – максимальное собственное значение матрицы  $\bar{Q}^{-1/2} \bar{N} \bar{Q}^{-1/2}$ .

Помимо различия моделей в определении условных корреляций и, следовательно, матрицы  $R_t$ , модели также отличаются в определении условных волатильностей  $h_{S,t}$  и  $h_{F,t}$  из матрицы  $D_t$ . Для моделирования поведения условных волатильностей предложено две спецификации. Первая – простая модель GARCH (simple GARCH) (Bollerslev, 1986):

$$\begin{cases} h_{S,t} = c_1 + a_1 \varepsilon_{S,t-1}^2 + g_1 h_{S,t-1}; \\ h_{F,t} = c_2 + a_2 \varepsilon_{F,t-1}^2 + g_2 h_{F,t-1}, \end{cases}$$

вторая – модель GJR–GARCH (Glosten, Jaganathan, Runkle, 1993) –

$$\begin{cases} h_{S,t} = c_1 + a_1 \varepsilon_{S,t-1}^2 + \lambda_1 \varepsilon_{S,t-1}^2 I[\varepsilon_{S,t-1} < 0] + g_1 h_{S,t-1}; \\ h_{F,t} = c_2 + a_2 \varepsilon_{F,t-1}^2 + \lambda_2 \varepsilon_{F,t-1}^2 I[\varepsilon_{F,t-1} < 0] + g_2 h_{F,t-1}, \\ \lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0, \end{cases}$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – параметры, определяющие асимметричные шоки волатильности (asymmetric volatility shocks);  $I$  – функция, равная 1, если  $\varepsilon_{t-1}$ , и равная 0 – в ином случае. Если параметры, отражающие эффекты асимметрии, значимы, это свидетельствует о наличии отрицательной асимметрии на анализируемом рынке, т.е. о большем влиянии негативных шоков на волатильность, чем положительных.

Условная ковариация  $h_{SF,t}$  рассчитывается на основе оценок корреляционной матрицы  $R_t$  и матрицы  $D_t$ , а впоследствии условная ковариация используется для определения оптимальных ставок хеджирования (OHR):

$$h_{SF,t} = p_{SF,t} \sqrt{h_{S,t} h_{F,t}},$$

$$\gamma_t^* | \Omega_{t-1} = \frac{\text{cov}(R_{S,t}, R_{F,t} | \Omega_{t-1})}{\text{var}(R_{F,t} | \Omega_{t-1})} = \frac{h_{SF,t}}{h_{F,t}}.$$

Логарифмическая функция максимального правдоподобия для всех рассмотренных моделей принимает вид:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= -0,5n \ln(2\pi) - 0,5 \sum_{t=1}^T (\ln |D_t R_t D_t| + \varepsilon_t' (D_t R_t D_t)^{-1} \varepsilon_t) = \\ &= \left( -0,5n \ln(2\pi) - 0,5 \sum_{t=1}^T (\ln |D_t^2| + \varepsilon_t' D_t^{-2} \varepsilon_t) \right) + \left( -0,5 \sum_{t=1}^T (\ln |R_t| + z_t' R_t^{-1} z_t - 0,5 z_t' z_t) \right) = \\ &= L(\theta_1) + L(\theta_2 | \theta_1), \end{aligned}$$

где  $n$  – число переменных в модели;  $\theta$  – вектор неизвестных параметров;  $\theta_1$  – вектор неизвестных параметров  $D_t$ ;  $\theta_2$  – вектор неизвестных параметров  $R_t$ .

## МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И РАНЖИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХЕДЖИРОВАНИЯ

Исходя из своей конструкции, модель ADCC–GJR–GARCH должна обеспечивать более точные прогнозы поведения цен финансового актива. Однако введение дополнительных переменных, учитывающих асимметрию в уравнениях условной корреляции и волатильностей, утяжеляя модель большим числом факторов влияния, может исказить оценки и породить системные ошибки. Для диагностирования выгод модели ADCC–GJR–GARCH и спецификации ее для российского рынка рассматриваемые модели класса GARCH сравниваются с регрессионным методом OLS и друг с другом для определения наилучшей – с точки зрения точности прогноза поведения доходностей и эффективности хеджирования.

Для сравнения эффективности стратегии хеджирования на основе моделей GARCH и оценок методом OLS показатель HER в нашей работе принимает вид

$$HER_{reg} = (\text{var}_{reg} - \text{var}_{hedged}) / \text{var}_{reg},$$

где  $\text{var}_{reg}$  – дисперсия портфеля, построенного на основе модели OLS, когда постоянная ставка хеджирования определяется из соотношения

$$R_{S,t} = \alpha + \gamma_{reg}^* R_{F,t-1} + \varepsilon_{S,t}.$$

Модели DCC–GARCH, ADCC–GARCH, DCC–GJR–GARCH, ADCC–GJR–GARCH используются нами для оценки и прогноза оптимальных ставок хеджирования (долей в портфеле фьючерсных контрактов на единицу акций).

Предлагаемый нами метод имеет следующие особенности.

1. Доходности акций и фьючерсов моделировались нами с помощью модели  $ARMA(p, q)$  с добавлением дополнительного регрессора: доходности базового актива предыдущего периода – для фьючерса и доходности фьючерсного контракта – для акции (т.е. моделировалось перекрестное влияние):

$$R_{S,t} = \alpha_S + \sum_{j=1}^p \beta_{S,j} R_{S,t-j} + \sum_{j=1}^q \gamma_{S,j} \varepsilon_{S,t-j} + \varphi_S R_{F,t-1} + \varepsilon_{S,t},$$

$$R_{F,t} = \alpha_F + \sum_{j=1}^p \beta_{F,j} R_{F,t-j} + \sum_{j=1}^q \gamma_{F,j} \varepsilon_{F,t-j} + \varphi_F R_{S,t-1} + \varepsilon_{F,t},$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, H_t),$$

где  $\varepsilon_{S,t}$  и  $\varepsilon_{F,t}$  – остатки в уравнении доходности акции и фьючерса соответственно в момент времени  $t$ , которые отражают отклонения или колебания соответствующего рынка;  $\Omega_{t-1}$  – матрица, отражающая информационное множество предыдущих значений;  $H$  – вариационно-ковариационная матрица.

2. Порядок авторегрессии  $p$  и порядок скользящей средней  $q$  определялся с помощью процедуры Бокса–Дженкинса на основе известного критерия Акаике ( $AIC$ ). Критерий  $AIC$  рассчитывается следующим образом:

$$AIC = 2k + T \ln(RSS),$$

где  $k$  – число переменных модели;  $T$  – число наблюдений;  $RSS$  – сумма квадрата остатков, которая отражает объясняющую силу модели. Чем меньше число переменных и  $RSS$ , тем моделью, с одной стороны, удобнее пользоваться, а с другой – она имеет наибольшую объясняющую силу. Таким образом, мы выбирали модель с такими порядками  $p$  и  $q$ , которые минимизируют значение критерия  $AIC$ .

Мы исходили из того, что включение в уравнение доходностей акций и фьючерсов по ним по предыдущим периодам позволяет моделировать более реалистичную ситуацию, когда инвестору уже известна информация о прошлых торгах по обоим инструментам инвестирования.

Исходя из рассматриваемых моделей, значимость параметров  $\varphi$  ( $\varphi_S$  для акций и  $\varphi_F$  для фьючерсов) будет показывать, что динамика стоимости акции (фьючерса) следует за поведением фьючерсного рынка (фондового рынка). Это позволит выявить в рамках спецификации модели, какой финансовый инструмент является ведомым, а какой – ведущим.

3. Определение лучшей прогнозной модели осуществлялось по индикатору  $MSE$  (mean squared error). Алгоритм поиска наилучшей прогнозной модели построен таким образом, что для 100 последних наблюдений из выборки прогнозируются значения доходностей обоих инструментов и ставки хеджирования на один шаг вперед рекурсивным методом с помощью моделей DCC–GARCH, ADCC–GARCH, DCC–GJR–GARCH, ADCC–GJR–GARCH и скользящей регрессии. Таким образом, наилучшая прогнозная модель определяется на основе двух критериев. Первый критерий – эффективность хеджирования построенного портфеля (сопоставление показателей  $HER$  и  $HER_{reg}$ ) для прогнозного периода на основе спрогнозированных ОНР. Второй критерий – ошибка прогноза для обоих рядов доходностей (акций и фьючерсов). В качестве измерителя второго критерия использован показатель среднеквадратической ошибки  $MSE$ , рассчитанный как

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t^{forecasted} - R_t)^2,$$

где  $e_t$  – величина ошибки прогноза для периода времени  $t$ .

Однако мы понимаем, что просто сравнивать величины прогнозных ошибок модели, оценивая разницу между  $MSE$  разных моделей, некорректно, эта оценка может быть статистически незначимой (что показано в работе (Harris, Sollis, 2003)). Для определения статистической значимости разности между  $MSE$  разных моделей нами используется тест Diebold–Mariano (Diebold, Mariano, 1995). Если принять, что  $e_{1,t}$  и  $e_{2,t}$  – ошибки прогноза модели 1 и 2 соответственно, то статистику  $S$  Diebold–Mariano можно представить как

$$S = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\text{var}(\bar{d})}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^T (e_{1,t}^2 - e_{2,t}^2) / \left[ \frac{1}{n} (\psi_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \psi_k) \right],$$

где  $\psi_k$  – коэффициент с номером  $k$  автоковариации  $d_t$ , оцениваемый по формуле

$$\psi_k = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^T (d_t - \bar{d})(d_{t-k} - \bar{d}).$$

Статистика  $S$  имеет стандартное нормальное распределение, т.е. если  $|S| > 1.96$ , то нулевая гипотеза о незначимости разностей ошибок прогноза различных моделей отвергается при 5%-ном уровне значимости.

Таким образом, предлагаемый нами алгоритм выбора наилучшей модели выполняется в два этапа. На первом этапе проверяется точность прогноза на основе показателя  $MSE$ . Если разность ошибок значима, то на втором этапе выбирается модель с наименьшим значением  $MSE$ . Если же разность ошибок прогноза моделей статистически незначима, то выбирается модель с наилучшим показателем  $HER$  и  $HER_{reg}$ .

## ВЫБОРКА РОССИЙСКИХ АКЦИЙ И ФЬЮЧЕРСОВ НА НИХ

В качестве тестируемых данных для демонстрации работоспособности построенного метода и алгоритма отбора оптимальной модели рассматривались дневные цены закрытия акций и фьючерсных контрактов трех российских компаний: ОАО “Сбербанк”, ОАО “Газпром” и ОАО “Лукойл”. Следует заметить, что в исследовании использовались “склеенные фьючерсы” трех компаний (ОАО “Сбербанк”, ОАО “Газпром” и ОАО “Лукойл”)<sup>3</sup>, составленные по нескольким фьючерсам данных эмитентов за анализируемый период времени. Небольшой период с начала обращения фьючерсов и до даты их экспирации не вошел в выборку, чтобы сделать предметом исследования наиболее ликвидный период обращения данных инструментов. Котировки акций и фьючерсов брались с биржи ММВБ-РТС, где представлены все выбранные активы. Период наблюдения – с 1 января 2008 г. по 10 марта 2012 г. Доходность каждого инструмента определялась по формуле

$$R_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100\%,$$

где  $P_t$  – цена закрытия акции или фьючерса в период времени  $t$ .

Для каждой пары инструментов (акция и фьючерс одной компании) данные были обработаны таким образом, чтобы для каждой даты из рассматриваемого периода имелись значения по обоим инструментам. Если данных по какому-либо инструменту не было в какой-то день, то эта дата исключалась из анализа. По выбранным инструментам рассчитаны средние и медианные значения доходностей, стандартное отклонение, асимметрия, эксцесс (табл. 1) и проведены тесты на стационарность (обобщенный тест Dickey–Fuller и тесты Phillips–Perron и Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin). Включение в анализ сразу нескольких статистик для проверки на стационарность позволяет избежать ошибки в связи с недостатками того или иного теста. В табл. 1 представлена описательная статистика для инструментов SBER, GAZP, LKOH, SR, GZ, LK.

<sup>3</sup> Соответствующие тикеры акций компаний: SBER (ОАО “Сбербанк”), GAZP (ОАО “Газпром”) и LKOH (ОАО “Лукойл”) – и фьючерсов на эти акции: SR (ОАО “Сбербанк”), GZ (ОАО “Газпром”) и LK (ОАО “Лукойл”). В дальнейшем в работе будет использоваться это краткое (тикерное) обозначение соответствующего инструмента.

**Таблица 1**, Описательная статистика выборки

Показатели	SBER	GAZP	LKOH	SR	GZ	LK
Среднее значение, %	-0,02	-0,11	-0,05	-0,01	-0,08	-0,02
Медиана, %	0,00	0,00	0,00	0,03	-0,01	0,08
Максимум, %	35,02	30,37	24,38	36,57	33,26	31,44
Минимум, %	-25,64	-28,00	-27,65	-24,95	-25,59	-31,81
Стандартное отклонение	0,0446	0,0462	0,0450	0,0438	0,0432	0,0427
Коэффициент асимметрии	0,3782	-0,0555	-0,2782	0,3163	0,2784	-0,1556
Коэффициент эксцесса	8,5385	6,9419	6,4154	9,7372	9,3421	10,4615
Тест Харки–Бера						
Статистика	3065,89	1443,55	1181,61	3972,14	2621,32	3118,06
P-значение (для статистической проверки гипотезы)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

**Таблица 2**, Тест ARCH финансовых инструментов выборки

Индексы	Нулевая гипотеза	Статистика ARCH-теста Энгла	P-значение
SBER	Отсутствует ARCH эффект	135,9644	0,00
GAZP		124,109	0,00
LKOH		126,2756	0,00
SR		203,8557	0,00
GZ		154,0465	0,00
LK		163,8699	0,00

Все анализируемые инструменты имеют приблизительно равные показатели как в отношении риска (стандартное отклонение), так и в отношении доходности (среднее, медиана, максимум, минимум). Все инструменты сильно волатильны и демонстрируют высокие экстремальные значения доходностей. Средняя доходность всех инструментов на рассматриваемом горизонте меньше нуля, что подтверждает вывод о необходимости хеджирования.

Согласно значению показателя эксцесса, функции распределения всех рядов доходностей остроконечны – следовательно, вероятность получения средней доходности выше, чем у нормального распределения.

Значения показателя асимметрии для рассматриваемых активов различаются: для GAZP, LKOH и LK они меньше нуля, в то время как распределения SBER, SR, GZ демонстрируют положительную асимметрию. Для первых это будет означать большую вероятность получения отрицательной доходности, а для второй группы, наоборот, – высокую вероятность получения положительной доходности. В рамках исследования получены оценки статистики Льюнга–Бокса (применяются к рядам доходностей для обоснования применения модели  $ARMA(p, q)$ ). Из оцененных значений p-value следует, что для большинства лагов гипотеза о наличии серийной корреляции подтверждается для всех изучаемых рядов доходностей, а значит, моделирование их поведения оправдано. В табл. 2 представлены результаты теста ARCH для остатков модели  $ARMA(p, q)$ . Этот тест позволяет определить наличие гетероскедастичности в остатках модели  $ARMA(p, q)$ .

Результаты теста ARCH говорят о том, что для доходностей всех инструментов можно отвергнуть нулевую гипотезу об отсутствии эффекта ARCH в модели.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ГИПОТЕЗ

**Эффекты асимметрии в условной волатильности и корреляции между фьючерсными и фондовыми рынками.** В табл. 3 показаны результаты тестирования модели DCC–GARCH, а также представлена статистика Льюнга–Бокса для стандартизированных остатков. Можно

**Таблица 3.** Оценка параметров модели DCC–GARCH и статистика Льюнга–Бокса для стандартизированных остатков

Модель DCC–GARCH						
Параметры	SBER – SR		GAZP – GZ		LKOH – LK	
	Коэффициенты	P-значение	Коэффициенты	P-значение	Коэффициенты	P-значение
Модель ARMA–GARCH						
$\alpha_S$	0,000	0,461	0,000	0,569	0,000	0,604
$\nu_{S,1}$	–0,519	0,000	–0,541	0,000	–0,417	0,000
$\varphi_S$	0,660	0,000	0,655	0,000	0,577	0,000
$c_1$	0,000	0,029	0,000	0,031	0,000	0,062
$a_1$	0,151	0,000	0,128	0,004	0,098	0,001
$g_1$	0,844	0,000	0,856	0,000	0,889	0,000
Модель ARMA–GARCH						
$\alpha_F$	0,000	0,536	0,000	0,824	0,001	0,468
$\beta_{F,1}$	–0,171	0,001	0,578	0,013	–0,166	0,452
$\beta_{F,2}$	0,000	0,990	–	–	–0,563	0,003
$\beta_{F,3}$	0,021	0,475	–	–	0,561	0,012
$\nu_{F,1}$	–	–	–0,672	0,001	0,038	0,833
$\nu_{F,2}$	–	–	–	–	0,479	0,002
$\nu_{F,3}$	–	–	–	–	–0,676	0,000
$\varphi_F$	0,079	0,149	0,059	0,394	0,137	0,052
$c_2$	0,000	0,237	0,000	0,029	0,000	0,062
$a_2$	0,098	0,000	0,113	0,000	0,106	0,001
$g_2$	0,897	0,000	0,872	0,000	0,883	0,000
Модель DCC						
$\omega_1$	0,033	0,031	0,026	0,032	0,040	0,220
$\omega_2$	0,900	0,000	0,938	0,000	0,890	0,000
Статистика Льюнга–Бокса						
Лаг 5	3,636	8,406	3,880	5,443	8,774	4,608
P-значение	0,603	0,135	0,567	0,364	0,118	0,466
Лаг 10	7,298	13,481	11,828	9,468	13,531	5,583
P-значение	0,697	0,198	0,297	0,488	0,195	0,849
Лаг 15	12,166	24,940	20,052	20,615	16,228	10,294
P-значение	0,666	0,051	0,170	0,150	0,367	0,801
Лаг 20	13,360	28,762	36,699	29,409	19,596	14,236
P-значение	0,861	0,093	0,013	0,080	0,483	0,818

заметить, что в отношении большинства лагов гипотеза о наличии серийной корреляция отвергается для всех анализируемых инструментов при 5%-ном уровне значимости – это говорит о том, что модель определена корректно.

Согласно результатам расчетов, представленным в табл. 3, при 5%-ном уровне значимости для каждой пары можно сделать вывод, что динамика цен акций подвержена влиянию динамики цен фьючерсов (фиксируются значимые параметры  $\varphi_S$ ), в то время как изменение доходности акций не влияет на поведение фьючерсов (получены незначимые параметры  $\varphi_F$ ). Также можно

сделать вывод о том, что волатильность всех инструментов зависит от своих предыдущих значений и прошлых колебаний соответствующих рынков (этот вывод делается на основании статистической значимости параметров  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $g_1$  и  $g_2$ ).

Аналогичные расчеты проведены для моделей ADCC–GARCH, DCC–GJR–GARCH, ADCC–GJR–GARCH. Результаты модели ADCC–GARCH подтверждают выводы DCC–GARCH касательно взаимозависимости фьючерсных и фондовых рынков. Во всех парах эта зависимость односторонняя: доходность акций определяется динамикой соответствующего фьючерсного рынка. Исходя из оцененной модели, асимметрия условной корреляции отсутствует (незначимый параметр  $\omega_3$ ) для каждой пары инструментов. Результаты модели DCC–GJR–GARCH, подобно моделям DCC–GARCH и ADCC–GARCH, свидетельствуют о влиянии фьючерсных рынков на фондовые за исключением пары LKOH – LK, где выявилось двустороннее влияние при изменении спецификации модели (значимый параметр  $\varphi_F$  для пары LKOH – LK).

Введение параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , отражающих асимметрию условной волатильности, позволяет обнаружить ее у акций SBER и LKOH (значимый параметр  $\lambda_1$ ) и фьючерса SR (значимый параметр  $\lambda_2$ ). Таким образом, негативные шоки на рынках данных инструментов в большей степени усиливают волатильность доходности, нежели положительные. Поэтому можно сделать вывод о наличии отрицательной асимметрии у инструментов SBER, LKOH и SR.

Модель ADCC–GJR–GARCH подтверждает результаты модели DCC–GJR–GARCH относительно взаимозависимости фьючерсных и фондовых рынков. Влияние фьючерсного рынка на фондовый подтверждено для всех пар, кроме пары LKOH – LK, где влияние рынков двустороннее. Результаты данной модели в отношении асимметрии в условной волатильности согласуются с выводами модели DCC–GJR–GARCH. Асимметрия условных волатильностей проявляется в случае акций SBER и LKOH (значимый параметр  $\lambda_1$ ) и для фьючерса LK (значимый параметр  $\lambda_2$ ) при 5%-ном уровне значимости. Что касается асимметрии в условных корреляциях, то она, аналогично модели ADCC–GARCH, не наблюдается ни для одной пары инструментов (незначимый параметр  $\omega_3$ ).

Из проведенного анализа можно сделать вывод об одностороннем влиянии фьючерсного рынка на котировки акций (это справедливо для всех пар акция–фьючерс, кроме пары LKOH – LK, где выявилась двусторонняя зависимость в моделях, учитывающих асимметрию в условных волатильностях – DCC–GJR–GARCH и ADCC–GJR–GARCH). Таким образом, ответом на первую поставленную гипотезу стал вывод о том, что скорее динамика фьючерсного рынка влияет на поведение цен акций, чем наоборот.

Можно сделать вывод о том, что в рамках нашей выборки асимметрия в условной корреляции не наблюдается для всех пар инструментов. Наличие асимметрии в условной волатильности следует признать в случае акций SBER и LKOH и фьючерса SR, так как для этих инструментов она наблюдалась для обеих моделей, способных оценить этот эффект.

**Эффективность стратегий хеджирования: проверка выводов на устойчивость.** В табл. 4 представлены оценки инвестирования по портфелю для исходно сформированной базы данных (рядов доходностей), свидетельствующие о возможности и эффективности хеджирования для трех пар инструментов на основе рассматриваемых четырех моделей класса GARCH.

Как видно из данных, представленных в табл. 4, предложенный нами алгоритм построения стратегии динамического хеджирования позволяет оценить коэффициенты хеджирования (первый столбец табл. 4), который дает положительную оценку показателя  $HER$  – оценка риска ниже как по сравнению с нехеджируемым портфелем (состоящим только из акций), так и по сравнению с портфелем, сформированным на основе оценки постоянных ставок хеджирования (второй столбец табл. 4) методом OLS (показатель  $HER_{reg}$  показывает выгоды инвестирования портфеля с неизменными коэффициентами  $OHR_{reg}$  по сравнению с нехеджированным портфелем). Следует отметить, что для пар GAZP – GZ и LKOH – LK модель DCC–GJR–GARCH предлагает наилучшую эффективность хеджирования с точки зрения минимизации риска, а для пары SBER – SR лучшие результаты показывает модель DCC–GARCH. Поэтому нельзя сделать однозначного вывода о том, что модели, учитывающие асимметрию в условной корреляции, всегда повышают эффективность хеджирования для рассматриваемой выборки.

Таблица 4. Эффективность хеджирования для исходного анализируемого периода

Акция – фьючерс	Среднее $OHR$	Среднее $OHR_{reg}$	$HER$ , %	$HER_{reg}$ , %
Модель DCC–GARCH				
SBER – SR	0,84	0,20	43,61	25,94
GAZP – GZ	0,84	0,24	49,42	28,82
LKOH – LK	0,77	0,26	34,10	12,19
Модель ADCC–GARCH				
SBER – SR	0,84	0,20	43,30	25,53
GAZP – GZ	0,84	0,24	49,42	28,82
LKOH – LK	0,77	0,26	34,10	12,19
Модель DCC–GJR–GARCH				
SBER – SR	0,84	0,20	43,33	25,57
GAZP – GZ	0,84	0,24	49,66	29,16
LKOH – LK	0,76	0,26	35,61	14,20
Модель ADCC–GJR–GARCH				
SBER – SR	0,85	0,20	42,67	24,71
GAZP – GZ	0,84	0,24	49,28	28,62
LKOH – LK	0,76	0,26	35,61	14,20

В табл. 4 также представлены значения оптимальной ставки хеджирования на основе регрессионного метода OLS ( $OHR_{reg}$ ) и моделей GARCH. Различия между ставками хеджирования существенные. Если учесть сравнительную эффективность предложенного метода (по параметру  $HER_{reg}$ ), то метод OLS несостоятелен для расчета коэффициентов хеджирования.

Заметим, что указанные выше оценки (см. табл. 4) и выводы относятся только к исходно анализируемому периоду времени. Для проверки выводов на устойчивость (насколько эффективен предложенный метод расчета коэффициентов хеджирования) сделан прогноз на один шаг вперед для 100 наблюдений и на основе данного прогноза рассчитаны показатели эффективности хеджирования. Ставки хеджирования методом OLS для прогнозного периода рассчитаны динамически как коэффициент  $\gamma_{reg}^*$  скользящей регрессии. В табл. 5 представлены показатели, отражающие эффективность хеджирования для всех пар инструментов и на основе четырех моделей для прогнозного периода.

Как следует из табл. 5, эффективность хеджирования предложенных нами моделей для прогнозного периода не такая высокая, как для исходного анализируемого горизонта времени, за исключением пары LKOH – LK. Тем не менее все четыре модели превосходят традиционный метод оценки коэффициента хеджирования OLS. Как и для исходного периода, модель DCC–GJR–GARCH позволяет построить наилучший портфель по риску для пар SBER – SR и GAZP – GZ, а модель DCC–GARCH – для пары LKOH – LK. Однако чтобы определить, не является ли этот вывод следствием случайного стечения обстоятельств, а отражает именно точность прогноза по обоснованной модели, следует сравнить ошибки прогноза по всем построенным моделям. В табл. 6 приведены значения среднеквадратических ошибок прогноза четырех моделей и статистика Diebold–Mariano для ошибок прогноза доходностей всех анализируемых инструментов.

Как следует из табл. 6, для всех пар акция–фьючерс статистика Diebold–Mariano свидетельствует о значимости разности ошибок для всех четырех моделей, следовательно, для них специфицирована модель с наименьшим показателем  $MSE$ . В случае пары SBER – SR статистика Diebold–Mariano указывает на значимость различий ошибок для инструмента SR, следовательно,

Таблица 5, Оценки эффективности хеджирования для прогнозного периода

Акция – фьючерс	Среднее $OHR$	Среднее $OHR_{reg}$	$HER$ , %	$HER_{reg}$ , %
Модель DCC–GARCH				
SBER – SR	0,57	0,22	26,13	12,17
GAZP – GZ	0,61	0,25	32,87	15,03
LKOH – LK	0,60	0,27	48,72	28,94
Модель ADCC–GARCH				
SBER – SR	0,57	0,22	25,78	11,76
GAZP – GZ	0,61	0,25	32,87	15,03
LKOH – LK	0,60	0,27	48,72	28,94
Модель DCC–GJR–GARCH				
SBER – SR	0,59	0,22	27,07	13,29
GAZP – GZ	0,64	0,25	33,00	15,19
LKOH – LK	0,59	0,27	46,32	25,61
Модель ADCC–GJR–GARCH				
SBER – SR	0,59	0,22	26,31	12,40
GAZP – GZ	0,64	0,25	33,00	15,19
LKOH – LK	0,59	0,27	46,32	25,61

Таблица 6, Среднеквадратические ошибки прогноза четырех моделей и статистика Diebold–Mariano

Среднеквадратические ошибки						
Тесты	SBER	SR	GAZP	GZ	LKOH	LK
DCC–GARCH %	0,2241	0,0959	0,2293	0,1464	0,1726	0,0895
ADCC–GARCH, %	0,2241	0,0959	0,2293	0,1464	0,1726	0,0895
DCC–GJR–GARCH, %	0,2188	0,0969	0,2296	0,1464	0,1722	0,0949
ADCC–GJR–GARCH, %	0,2188	0,0969	0,2296	0,1464	0,1722	0,0949
Тест Diebold–Mariano (p-значение, как вероятность отклонения гипотезы)						
DCC–GARCH /	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ADCC–GARCH						
DCC–GARCH /	0,00	0,12	0,35	0,66	0,43	0,17
DCC–GJR–GARCH						
DCC–GARCH /	0,00	0,12	0,35	0,66	0,43	0,17
ADCC–GJR–GARCH						
ADCC–GARCH /	0,00	0,12	0,35	0,66	0,43	0,17
DCC–GJR–GARCH						
ADCC–GARCH /	0,00	0,12	0,35	0,66	0,43	0,17
ADCC–GJR–GARCH						
DCC–GJR–GARCH /	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ADCC–GJR–GARCH						

именно для этого инструмента будет выбираться модель с наименьшим показателем  $MSE$ . В случае инструмента SR данный показатель наименьший для моделей DCC–GARCH и ADCC–GARCH, но модель DCC–GARCH предлагает более высокую эффективность хеджирования (показатели  $HER$  и  $HER_{reg}$  для прогнозного периода). Поэтому для пары SBER – SR модель DCC–GARCH является оптимальной. Для пары GAZP – GZ модели DCC–GARCH и ADCC–GARCH – наилучшие с точки зрения показателя  $MSE$ . Обе модели обеспечивают инвестору схожую эффективность хеджирования (показатели  $HER$  и  $HER_{reg}$  для прогнозного периода), но, учитывая, что параметр  $\omega_3$  оказался незначимым, для пары GAZP – GZ следует рекомендовать именно модель DCC–GARCH. Для пары LKOH – LK можно заметить, что разница между  $MSE$  по анализируемым моделям более значима для инструмента LK, чем для инструмента LKOH. Поэтому именно для фьючерса LK будут выбраны модели с наименьшим  $MSE$ . Расчеты показали (см. табл. 4 и 5), что это модели DCC–GARCH и ADCC–GARCH. Так как обе модели предлагают одинаковые значения показателей  $HER$  и  $HER_{reg}$  для прогнозного периода и параметр  $\omega_3$  незначим в оценках, то модель DCC–GARCH, по нашему мнению, является оптимальной для пары LKOH – LK.

Для наглядной демонстрации инвесторам получаемых нами выводов мы оценили показатели доходности и риска нескольких построенных на разработанном оригинальном методе портфелей для сравнения с “наивным хеджированием” методом OLS. Сопоставлялись результаты инвестирования для портфелей:

- 1) нехеджированного (только акции);
- 2) построенного с весами активов, выбираемых по регрессионной оценке ставки хеджирования (метод OLS);
- 3) построенного со ставками хеджирования, которые были рассчитаны в рамках нами выявленной оптимальной модели для каждой пары анализируемых инструментов.

Портфель, построенный в рамках обоснованной оптимальной модели, а именно DCC–GARCH, для пары GAZP – GZ обеспечивает наибольшую среднюю доходность и в то же время наименьший риск. Для пар LKOH – LK и SBER – SR портфель, построенный на основе модели DCC–GARCH, предлагает среднюю доходность несколько ниже, чем у других портфелей, однако при этом они являются менее рискованными (согласно показателю дисперсии). По обобщенному коэффициенту Шарпа (учитывает и риск, и доходность) наша стратегия хеджирования показала лучшие результаты.

Согласно всем представленным расчетам, можно сделать вывод, что предложенный в работе метод расчета динамических коэффициентов хеджирования эффективнее традиционного метода OLS. Этот вывод подтверждается как для исходно анализируемого, так и для прогнозного периода времени. Таким образом, подтверждается третья гипотеза – о возможности на базе класса моделей GARCH оценить коэффициенты хеджирования для построения портфеля с лучшими инвестиционными характеристиками (максимизация коэффициента Шарпа), что подтверждает сравнительную эффективность многомерных моделей GARCH для построения динамических стратегий хеджирования.

## ВЫВОДЫ

В работе предложен оригинальный метод построения стратегии динамического хеджирования, основанный на многомерных моделях класса GARCH. Модели DCC–GARCH, ADCC–GARCH, DCC–GJR–GARCH и ADCC–GJR–GARCH использовались для оценивания и прогнозирования оптимальных ставок хеджирования портфеля, состоящего из акций и фьючерсных контрактов на эти акции по трем российским компаниям с высоколиквидными финансовыми инструментами.

Результаты анализа показывают, что справедлива гипотеза о лидерстве в порождении волатильности со стороны фьючерсного рынка (цены акции следуют за динамикой цен фьючерсов). Данный вывод был подтвержден для всех рассмотренных пар акция–фьючерс, кроме LKOH – LK, где зависимость является двусторонней в рамках моделей DCC–GJR–GARCH и ADCC–GJR–GARCH. Эти выводы согласуются с выводами, сделанными в работах (Shyu et al., 1996; Chris et al., 2001; Stoll, Whaley, 1990).

Асимметрия в условной корреляции доходностей акций и фьючерсов для всех пар отсутствует, в то время как асимметрия в условной волатильности наблюдается для акций SBER и LKOH и фьючерса SR. Это означает, что негативные шоки существенно увеличивают волатильность указанных инструментов в отличие от положительных шоков.

Сравнительная эффективность хеджирования по анализируемым моделям над регрессионным методом расчета коэффициентов хеджирования (OLS) была подтверждена как для исходно анализируемого, так и для прогнозного периода времени, что согласуется с результатами работ (Kroner, Sultan, 1993; Ku et al., 2007). Модель DCC–GARCH определена нами как наилучшая для всех пар акция–фьючерс. Построенные на основе данной модели портфели показывают лучшие соотношения “риск – доходность”, чем нехеджированные портфели и портфели, построенные на методе OLS.

Данная работа вносит вклад в изучение российских фондовых и фьючерсных рынков, их взаимосвязей и взаимовлияния, в развитие количественных методов построения хеджирующих портфелей. Выводы нашего исследования позволяют участникам российского финансового рынка оценить взаимосвязи на двух сегментах финансового рынка и понять динамику доходности и волатильности, асимметрию реакций на внешние шоки на этих рынках по наиболее ликвидным инструментам. Помимо этого предлагаемый метод расчета коэффициентов хеджирования может быть полезен для работы банков, хедж-фондов, инвестиционных и трейдинговых компаний для построения эффективных портфелей и стратегий динамического хеджирования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Arouri M., Jouini J., Nguyen D.K.** (2012). On the Impacts of Oil Price Fluctuations on European Equity Markets: Volatility Spillover and Hedging Effectiveness // *Energy Economics*. Vol. 34. P. 611–617.
- Baillie R., Myers R.** (1991). Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge // *Journal of Econometrics*. Vol. 6. P. 109–124.
- Bekaert G., Wu G.** (2000). Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets // *Review of Financial Studies*. Vol. 13 (1). P. 1–42.
- Bodurtha J., Mark N.** (1991). Testing the CAPM with Time-Varying Risk and Returns // *Journal of Finance*. Vol. 46. P. 1485–1505.
- Bollerslev T.** (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // *Journal of Econometrics*. Vol. 31. P. 307–327.
- Brailsford T.I., Faff R.W.** (1996). An Evaluation of Volatility Forecasting Techniques // *Journal of Bank Finance*. Vol. 20. P. 419–438.
- Capiello L., Engle R.F., Sheppard K.** (2006). Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns // *Journal of Financial Econometrics*. Vol. 4. P. 537–572.
- Cecchetti S.G., Cumby R.E., Figlewski S.** (1988). Estimation of Optimal Futures Hedge // *Review of Economics and Statistics*. Vol. 70. P. 623–630.
- Chakraborty A., Barkoulas J.T.** (1999). Dynamic Futures hedging in Currency Markets // *The European Journal of Finance*. Vol. 5. P. 299–314.
- Chan K.S.** (1992). A Further Analysis of the Lead-Lag Relationship between the Cash Market and Stock Index Futures Market // *Rev. Financ. Stud.* Vol. 5(1). P. 123–152.
- Chang Ch.-L., González Serrano L.; Jiménez-Martin J.** (2012) Currency Hedging Strategies Using Dynamic Multivariate GARCH. SSRN Working Paper Series.
- Chang C., McAleer M., Tansuchat R.** (2011). Crude Oil Hedging Strategies Using Dynamic Multivariate GARCH // *Energy Economics*. Vol. 33. Issue 5. P. 912–923.
- Chen S., Lee C., Shrestha K.** (2003). Futures Hedge Ratios: A Review // *Quarterly Review of Economics and Finance*. Vol. 43. P. 433–465.
- Chris B., Alistar G.W., Stuart T.** (2001). A Trading Strategy Based on the Lead-Lag Relationship between the Spot Index and Futures Contracts for the FTSE100 // *Int. Journal of Forecasting*. Vol. 17. P. 31–44.
- Crouchy M., Rockinger M.** (1997). Volatility Clustering, Asymmetry and Hysteresis in Stock Returns: International Evidence // *Financial Engineering and the Japanese Markets*. Vol. 4(1). P. 1–35.

- Diebold F.X., Mariano R.S.** (1995). Comparing Predictive Accuracy // *Journal of Business and Economic Statistics*. Vol. 22. P. 253–263.
- Ederington L.H.** (1979). The Hedging Performance of the News Futures Markets // *Journal of Finance*. Vol. 34. P. 157–170.
- Engle R.** (2002). Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models // *Journal of Business and Economic Statistics*. Vol. 20. P. 339–350.
- Glosten L.R., Jaganathan R., Runkle R.** (1993). On the relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks // *Journal of Finance*. Vol. 48(5). P. 1779–1801.
- Haigh M.S., Holt M.** (2002). Crack Spread Hedging: Accounting for Time-Varying Spillovers in the Energy Futures Markets // *Journal of Applied Econometrics*. Vol. 17. P. 269–289.
- Hammoudeh S., Yuan Y., McAleer M., Thompson M.** (2010). Precious Metals-Exchange Rate Volatility Transmission and Hedging Strategies // *International Review of Economics and Finance*. Vol. 19. Issue 4. P. 633–647.
- Harris R., Sollis R.** (2003). *Applied Time Series Modelling and Forecasting*. N.Y.: John Wiley.
- Herbs A.F., Kare D.D., Marshall J.F.** (1993). A Time-Varying Convergence Adjusted, Minimum Risk Futures Hedge Ratio // *Advances in Futures and Option Research*. Vol. 6. P. 137–155.
- Johnson L.L.** (1960). The Theory of Hedging and Speculation in Commodity Futures // *Review of Economic Studies*. Vol. 27. P. 139–151.
- Kolokov A.** (2011). Futures Hedging: Multivariate GARCH with Dynamic Conditional Correlation // *Quantile*. Vol. 9. P. 61–75.
- Kroner K.F., Sultan J.** (1993). Time-Varying Distributions and Dynamic Hedging with Foreign Currency Futures // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 28. P. 535–551.
- Ku Y., Chen H., Chen K.** (2007). On the Application of the Dynamic Conditional Correlation Model in the Estimating Optimal Time-Varying Hedge Ratios // *Applied Economics Letter*. Vol. 14. P. 503–509.
- Lien D., Tse Y.K., Tsui A.K.** (2002). Evaluating the Hedging Performance of the Constant Correlation GARCH Model // *Applied Financial Economics*. Vol. 12. P. 791–798.
- Mills T.** (1999). *The Econometric Modeling of Financial Time Series*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Park H., Bera A.** (1987). Interest Rate Volatility, Basis, and Heteroscedasticity Model with Time-Varying Correlations // *American Real Estate and Urban Economics Association*. Vol. 15. P. 79–97.
- Ripple R.D., Moosa I.A.** (2007). Hedging Effectiveness and Futures Contract Maturity: The Case of NYMEX Crude Oil Futures // *Applied Financial Economics*. Vol. 17. P. 683–689.
- Sadorsky P.** (2012). Correlations and Volatility Spillovers between Oil Prices and the Stock Prices of Clean Energy and Technology Companies // *Energy Economics*. Vol. 34. P. 248–255.
- Shyy G., Vijayraghavan V., Scott-Quinn B.** (1996). A Further Investigation of the Lead-Lag Relationship between the Cash Market and Stock Index Futures Markets with the Use of Bid/Ask Quotes: the Case of France // *Journal of Futures Mark.* Vol. 16(4). P. 405–420.
- Stein J.L.** (1960). The Simultaneous Determination of Spot and Futures Prices // *American Economic Review*. Vol. 51. P. 1012–1025.
- Stoll H.R., Whaley R.E.** (1990). The Dynamics of Stock Index and Stock Index Futures Returns // *Journal of Financ. Quant. Anal.* 25(4). P. 441–468.
- Taylor J.W.** (2004). Volatility Forecasting with Smooth Transition Exponential Smoothing // *Int. Journal of Forecasting*. Vol. 20. P. 273–286.
- Wahab M., Lashgari M.** (1993). Price Dynamics and Error Correction in the Stock index and Stock Index Futures Markets: a Cointegration Approach // *Journal of Futures Mark.* Vol. 13(7). P. 711–742.
- Wu F., Guan Z.** (2009). The Volatility Spillover Effects and Optimal Hedging Strategy in the Corn Market, Selected Paper Prepared for Presentation at the Agricultural & Applied Economics Association 2009. AAEA & ACCI Joint Annual Meeting. Wisconsin.
- Wu G.** (2001). The Determinants of Asymmetric Volatility // *Review of Financial Studies*. Vol. 14(3). P. 837–855.

Поступила в редакцию  
17.03.2013 г.

## **Construction of a Hedge Ratio for Marketable Russian Stocks Based on GARCH Class Models**

**K.G. Asaturov, T.V. Teplova**

In the paper we propose an original method for constructing a dynamic hedging strategy based on multivariate GARCH models for the marketability of the Russian stocks. Hedging instruments include stock futures. The method provides a calculation of dynamic hedge ratios instead of the traditional method of ordinary least squares (OLS), which determines the constant hedge ratio. Analysis of spot and futures Russian markets showed that 1) it is the dynamics of the futures market that affects the behavior of the stocks' prices, 2) for all pairs of stock-futures there is no asymmetry in the conditional correlation of returns, 3) there is an asymmetry in the conditional volatility, and 4) GARCH class models allow to construct a method of calculating hedging ratio for portfolio with the best characteristics of "risk-return" profile.

**Keywords:** hedging strategy, hedge ratio, hedging effectiveness ratio, dynamic correlation, asymmetric volatility, stocks and futures for them, multivariate GARCH.

**JEL Classification:** C1, C13, C18, C4, C44, C5, C53, C6.