ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2014, том 50, № 1, с. 110–116

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ИГРЫ ТРЕХ ЛИЦ

© 2014 г. Е.Г. Гольштейн

(Москва)

Описан численный алгоритм решения конечной бескоалиционной игры трех лиц в смешанных стратегиях. Алгоритм основан на минимизации некоторой функции, которая имеет большое число локальных минимумов, и опирается на линейное программирование.

Ключевые слова: бескоалиционная игра, точка Нэша, конечная игра, чистая стратегия, смешанная стратегия, игра с выпуклой структурой, вариационное неравенство.

Классификация JEL: C02, C72.

Рассмотрим бескоалиционную игру Г трех лиц, которая определяется множествами X_1, X_2, X_3 стратегий игроков и функциями f_1, f_2, f_3 их выигрышей. Предполагается, что X_i – подмножество евклидова пространства $\mathbf{E}_i$, функция f_i определена вещественными значениями на множестве $X = X_1 \times X_2 \times X_3$, $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \mathbf{E}_3$.

Пусть $X^* \subset X$ – множество точек Нэша игры Г. В предположении супердифференцируемости функции f_i по $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, 3$, с игрой Г можно связать точечно-множественное отображение $T_\Gamma\colon X \to \mathbf{E}$, определяемое соотношением

$$T_\Gamma(x) = \{t = (t_1, t_2, t_3)\colon -t_i \in \partial_{x_i} f_i(x), \quad i = 1, 2, 3\}, \quad x \in X, \tag{1}$$

где $\partial_{x_i} f_i(x)$ – супердифференциал f_i по x_i в точке x. Отображение T_Γ порождает вариационное неравенство

$$t \in T_\Gamma(x), \quad x \in X, \ \langle t, x' - x \rangle \geq 0 \quad \forall x' \in X. \tag{2}$$

Под решением вариационного неравенства (2) понимается такая точка $x^* \in X$, что для некоторого $t^* \in T_\Gamma(x^* t)$ и любых точек $x' \in X$ имеет место неравенство $\langle t^*, x' - x^* \rangle \geq 0$. Из определения точки Нэша вытекает, что множество решений вариационного неравенства (2) совпадает с множеством X^* точек Нэша игры Г.

Игра Г трех лиц называется *выпуклой*, если функции f_1, f_2, f_3 и множество X удовлетворяют следующим требованиям: функция f_1 определена и непрерывна на множестве $\tilde{X}_1 \times X_2 \times X_3$, вогнута по $x_1 \in \tilde{X}_1$ при любых $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$, функция f_2 определена и непрерывна на множестве $X_1 \times \tilde{X}_2 \times X_3$, вогнута по $x_2 \in \tilde{X}_2$ при любых $x_1 \in X_1$, $x_3 \in X_3$, функция f_3 определена и непрерывна на множестве $X_1 \times X_2 \times \tilde{X}_3$, вогнута по $x_3 \in \tilde{X}_3$ при любых $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, X – выпуклый компакт, $\tilde{X}_i$ – выпуклое открытое множество, содержащее X_i, $i = 1, 2, 3$. Любая выпуклая игра Г имеет непустое множество X^* точек Нэша и, кроме того, отображение T_Γ, задаваемое соотношением (1), полунепрерывно сверху на X, причем $\cup_{x \in X} T_\Gamma(x)$ – ограниченное множество. Однако множество X^* точек Нэша выпуклой игры может быть и невыпуклым.

Дальнейшее сужение класса бескоалиционных игр связано с понятием “выпуклая структура игры”. Будем говорить, что выпуклая игра Г трех лиц *имеет выпуклую структуру*, если связанное с ней согласно (1) отображение T_Γ обладает свойством монотонности, т.е. для любых x', $x'' \in X$, $t' \in T_\Gamma(x')$, $t'' \in T_\Gamma(x'')$ справедливо неравенство $\langle t' - t'', x' - x'' \rangle \geq 0$. У игры с выпуклой структурой множество точек Нэша представляет непустой выпуклый компакт.

Рассмотрим вариационное неравенство

$$t \in T(u), \quad u \in G, \quad \langle t, u' - u \rangle \geq 0 \quad \forall u' \in G, \tag{3}$$

которое порождается точечно-множественным отображением T точек множества G в подмножества некоторого евклидова пространства, содержащего G.

При анализе вариационного неравенства (3) используются следующие допущения относительно отображения T.

1. Множества G, $T(u)$ $\forall u \in G$ – выпуклые компакты; отображение T полунепрерывно сверху на G, т.е. если $u_0 = \lim_{i \to \infty} u_i$, $u_i \in G$, $t_0 = \lim_{i \to \infty} t_i$, $t_i \in T(u_i)$, то $t_0 = T(u_0)$; множества $T(u)$, $u \in G$, равномерно ограниченны.

2. Отображение T является монотонным.

В (Гольштейн, 2002) описан численный метод решения вариационного неравенства (3) и показано, что при соблюдении двух допущений, приведенных выше, метод порождает последовательность, сходящуюся к множеству решений вариационного неравенства (3), причем скорость сходимости допускает теоретическую оценку, указывающую на достаточную эффективность метода. Игра Г трех лиц, имеющая выпуклую структуру, удовлетворяет условиям 1 и 2, поэтому для ее решения может быть использован отмеченный выше численный метод.

Отметим установленное в (Гольштейн, 2009а) условие, при соблюдении которого выпуклая игра имеет выпуклую структуру: функция $f_1(x_1, x_2, x_3)$ выпукла относительно $(x_2, x_3) \in X_2 \times X_3$ при любом фиксированном $x_1 \in \tilde{X}_1$, функция $f_2(x_1, x_2, x_3)$ выпукла относительно $(x_1, x_3) \in X_1 \times X_3$ при любом фиксированном $x_2 \in \tilde{X}_2$, функция $f_3(x_1, x_2, x_3)$ выпукла относительно $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ при любом фиксированном $x_3 \in \tilde{X}_3$, функция суммарного выигрыша всех игроков $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ вогнута относительно $x \in X = X_1 \times X_2 \times X_3$.

Сформулированное условие является лишь достаточным, для того чтобы выпуклая игра Г имела выпуклую структуру, но, как будет следовать из дальнейшего, заведомо не необходимым.

Введем функцию

$$N(x) = N(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \max_{x_i \in X} f_i(x_1, x_2, x_3) - f(x), \tag{4}$$

определенную на множестве $X = X_1 \times X_2 \times X_3$, где $f(x) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x)$. Очевидно, что при любом $x \in X$ имеет место неравенство

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x_1, x_2, x_3) - f_i(x_1, x_2, x_3) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Из определения точки Нэша игры Г вытекает, что $x^* \in X^*$ в том и только в том случае, если все три неравенства (5) обращаются в равенства при $x = (x_1, x_2, x_3) = x^*$. Следовательно, множество X^* точек Нэша игры Г совпадает с множеством точек минимума функции $N(x)$ на X. Таким образом, решение игры Г оказывается эквивалентным поиску точек глобального минимума функции $N(x)$ на множестве X, причем значение глобального минимума N на X равно нулю. Заметим, что значение функции $N(x)$ при любом $x \in X$ является естественной мерой отклонения набора стратегий x от множества X^*. Функция $N(x)$ была введена в работе (Mills, 1960) для случая, когда Г – биматричная игра.

Далее мы сосредоточим свое внимание на конечных бескоалиционных играх трех лиц, в которых каждый игрок имеет конечное число стратегий. Для описания таких игр удобно пользоваться таблицами, элементы которых нумеруются при помощи индексов s_1, s_2, s_3, принимающих значения от единицы до n_1, n_2, n_3 соответственно, где n_i – число стратегий игрока i, $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим конечную игру трех лиц, в которой функция выигрышей игрока i задается таблицей $A_i = \left(a^{(i)}_{s_1 s_2 s_3}\right)$, где $a^{(i)}_{s_1 s_2 s_3}$ – выигрыш игрока i в предположении, что игрок α выбирает стратегию s_α, $\alpha = 1, 2, 3$. Если расширить множества стратегий игроков за счет смешанных стратегий, то приходим к выпуклой игре Г с тремя участниками, в которой

$$X_i = \left\{ x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in_i}: \sum_{s_i=1}^{n_i} x_{is_i} = 1, \quad x_{is_i} \geq 0, \quad s_i = 1, \ldots, n_i \right\};$$

$$f_i(x) = \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_2=1}^{n_2} \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_1 s_2 s_3}^{(i)} x_{1s_1} x_{2s_2} x_{3s_3}, \quad i = 1, 2, 3; \tag{6}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in X = X_1 \times X_2 \times X_3 .$$

Заметим, что в случае конечной игры Г в смешанных стратегиях, определяемой соотношениями (6), отображение T_Γ является точечно-точечным, поскольку f_i линейно зависит от x_i. В интересующем нас случае конечной игры Г трех игроков в смешанных стратегиях вычисление функции $N(x)$ в любой точке $x \in X$ может быть упрощено. Действительно, если f_i, X_i, $i = 1, 2, 3$, определяются соотношениями (6), то

$$\max_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2, x_3) = \max_{1 \leq s_1 \leq n_1} \sum_{s_2=1}^{n_2} \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_1 s_2 s_3}^{(1)} x_{2s_2} x_{3s_3},$$

$$\max_{x_2 \in X_2} f_2(x_1, x_2, x_3) = \max_{1 \leq s_2 \leq n_2} \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_1 s_2 s_3}^{(2)} x_{1s_1} x_{3s_3},$$

$$\max_{x_3 \in X_3} f_3(x_1, x_2, x_3) = \max_{1 \leq s_3 \leq n_3} \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_2=1}^{n_2} a_{s_1 s_2 s_3}^{(3)} x_{1s_1} x_{2s_2}.$$

Отсюда и из (4) с учетом (6) получаем

$$N(x) = \max_{1 \leq s_1 \leq n_1} \sum_{s_2=1}^{n_2} \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_1 s_2 s_3}^{(1)} x_{2s_2} x_{3s_3} + \max_{1 \leq s_2 \leq n_2} \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_1 s_2 s_3}^{(2)} x_{1s_1} x_{3s_3} +$$

$$+ \max_{1 \leq s_3 \leq n_3} \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_2=1}^{n_2} a_{s_1 s_2 s_3}^{(3)} x_{1s_2} x_{2s_2} - \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_2=1}^{n_2} \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_1 s_2 s_3} x_{1s_1} x_{2s_2} x_{3s_3}, \tag{7}$$

где $a_{s_1 s_2 s_3} = \sum_{i=1}^{3} a_{s_1 s_2 s_3}^{(i)}$ для всех s_1, s_2, s_3.

Для класса игр, множества стратегий и функции выигрышей которого задаются соотношениями (6), в работе (Гольштейн, 2009а) установлены необходимые и достаточные условия, для того чтобы соответствующая игра Г имела выпуклую структуру: конечная бескоалиционная игра Г трех лиц в смешанных стратегиях, задаваемая соотношениями (6), имеет выпуклую структуру в том и только в том случае, если таблицы $A_i = \left(a_{s_1 s_2 s_3}^{(i)} \right)$ могут быть представлены в виде

$$A_i = A_{i1} + A_{i2} + A_{i_3}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

где элементы $a_{s_1 s_2 s_3}^{(i)}$ таблицы A_{ij} зависят лишь от индексов s_i и s_j, если $i \neq j$, и не зависят от индекса s_i, если $i = j$, причем

$$A_{12} + A_{21} = A_{13} + A_{31} = A_{23} + A_{32} = O, \tag{9}$$

где O – таблица, все $n_1 n_2 n_3$ элементов которой равны нулю.

Сравним необходимые и достаточные условия наличия выпуклой структуры у конечных игр в смешанных стратегиях с приведенными выше достаточными условиями. В работе (Гольштейн,

2012) установлено, что эти достаточные условия применительно к классу игр, определяемых соотношениями (6), помимо необходимых и достаточных условий включают следующее ограничение: каждая из таблиц A_{11}, A_{22}, A_{33}, элементы которых зависят от двух индексов, допускает представление в виде суммы двух таблиц с элементами, зависящими лишь от одного индекса.

Элементы таблиц A_{ij} из соотношения (9) зависят только от двух индексов. Поэтому эти таблицы определяются соответствующими матрицами, которые мы обозначим $\bar{A}_{ij}$. Соотношения (9) в терминах этих матриц имеют вид

$$\bar{A}_{21} = -\bar{A}_{12}^{\tau}, \quad \bar{A}_{31} = -\bar{A}_{13}^{\tau}, \quad \bar{A}_{32} = -\bar{A}_{23}^{\tau},$$

где τ обозначает операцию транспонирования.

Введем кососимметричную матрицу $\bar{A}$ порядка $n_1 + n_2 + n_3$ вида

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} O_{n_1} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ -\bar{A}_{12}^{\tau} & O_{n_2} & \bar{A}_{23} \\ -\bar{A}_{13}^{\tau} & -\bar{A}_{23}^{\tau} & O_{n_3} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где по диагонали стоят нулевые квадратные матрицы O_{n_i} соответствующих порядков.

Рассмотрим антагонистическую игру R, в которой множества стратегий обоих игроков одинаковы и совпадают с множеством $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ из (6), а функция выигрышей первого игрока представляет билинейную функцию $x'\bar{A}(x'')^{\tau}$, $x', x'' \in X$, где $\bar{A}$ – кососимметричная матрица (10).

Как установлено в (Гольштейн, 2012), седловое множество антагонистической игры R совпадает с $X^* \times X^*$, где X^* – множество точек Нэша игры Г, которая определяется соотношениями (6), причем таблицы A_1, A_2, A_3, в этих соотношениях удовлетворяют требованиям (8), (9), гарантирующим наличие выпуклой структуры у игры Г. Таким образом, решение конечных игр, имеющих выпуклую структуру, сводится к анализу простейших антагонистических игр. Заметим, что анализ антагонистической игры R легко сводится к линейному программированию. Поэтому класс конечных игр трех лиц в смешанных стратегиях, имеющих выпуклую структуру, обладает полиномиальной сложностью. Что касается всех подобных игр, эта совокупность, скорее всего, имеет сверхполиномиальную вычислительную сложность.

Перейдем к изложению численного метода решения произвольных конечных игр в смешанных стратегиях, который основан на минимизации функции $N(x)$, определяемой формулой (7). Хотя задача минимизации функции $N(x)$ по $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = X_1 \times X_2 \times X_3$ весьма сложна из-за наличия у нее многочисленных локальных минимумов, не совпадающих с глобальным, минимизация этой функции по одной из трех переменных, составляющих вектор x, легко сводится к линейному программированию. Этим мы и воспользуемся.

Если зафиксировать векторные переменные $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$ и положить для $1 \le s_i \le n_i$, $i = 1, 2, 3$,

$$a_{s_1 s_2}^{(2)}(x_3) = \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_1 s_2 s_3}^{(2)} x_{3 s_3}, \quad a_{s_1 s_3}^{(3)}(x_2) = \sum_{s_2=1}^{n_2} a_{s_1 s_2 s_3}^{(3)} x_{2 s_2}, \quad a_{s_1}(x_2, x_3) = \sum_{s_2=1}^{n_2} \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_1 s_2 s_3} x_{2 s_2} x_{3 s_3},$$

то задача минимизации функции $N(x)$ по $x_1 \in X_1$ имеет вид

$$\max_{1 \le s_2 \le n_2} \sum_{s_1=1}^{n_1} a_{s_1 s_2}^{(2)}(x_3) x_{1 s_1} + \max_{1 \le s_3 \le n_3} \sum_{s_1=1}^{n_1} a_{s_1 s_3}^{(3)}(x_2) x_{1 s_1} - \sum_{s_1=1}^{n_1} a_{s_1}(x_2, x_3) x_{1 s_1} \to \min, \tag{11}$$

$$x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{1 n_1}) \in X_1.$$

Очевидно, что задача (11) эквивалентна задаче линейного программирования $P_1(x_2, x_3)$ вида

$$v_{11} + v_{21} - \sum_{s_1=1}^{n_1} a_{s_1}(x_2, x_3) s_{1 s_1} \to \min,$$

$$
\sum_{s_1=1}^{n_1} a^{(2)}_{s_1 s_2}(x_3) x_{1s_1} \le v_{11}, \quad s_2 = 1, \ldots, n_2,
$$
$$
\sum_{s_1=1}^{n_1} a^{(3)}_{s_1 s_3}(x_2) x_{1s_1} \le v_{21}, \quad s_3 = 1, \ldots, n_3, \tag{12}
$$
$$
\sum_{s_1=1}^{n_1} x_{1s_1} = 1, \quad x_{1s_1} \ge 0, \quad s_1 = 1, \ldots, n_1.
$$

При любых фиксированных $x_1 \in X_1$, $x_3 \in X_3$ задача минимизации функции $N(x)$ по $x_2 \in X_2$ приводится к задаче линейного программирования $P_2(x_1, x_3)$:

$$
\begin{gathered}
v_{12} + v_{22} - \sum_{s_2=1}^{n_2} a_{s_2}(x_1, x_3) x_{2s_2} \to \min, \\
\sum_{s_2=1}^{n_2} a^{(1)}_{s_1 s_2}(x_3) x_{2s_2} \le v_{12}, \quad s_1 = 1, \ldots, n_1, \\
\sum_{s_2=1}^{n_2} a^{(3)}_{s_2 s_3}(x_1) x_{2s_2} \le v_{22}, \quad s_3 = 1, \ldots, n_3, \\
\sum_{s_2=1}^{n_2} x_{2s_2} = 1, \quad x_{2s_2} \ge 0, \quad s_2 = 1, \ldots, n_2,
\end{gathered} \tag{13}
$$

где

$$
a^{(1)}_{s_1 s_2}(x_3) = \sum_{s_3=1}^{n_3} a^{(3)}_{s_1 s_2 s_3} x_{3s_3}, \quad a^{(3)}_{s_2 s_3}(x_1) = \sum_{s_1=1}^{n_1} a^{(3)}_{s_1 s_2 s_3} x_{1s_1}, \quad a_{s_2}(x_1, x_3) = \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_1 s_2 s_3} x_{1s_1} x_{3s_3}.
$$

Аналогично, задача минимизации функции $N(x)$ по $x_3 \in X_3$ при фиксированных $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ сводится к задаче линейного программирования $P_3(x_1, x_2)$:

$$
\begin{gathered}
v_{13} + v_{23} - \sum_{s_3=1}^{n_3} a_{s_3}(x_1, x_2) x_{3s_3} \to \min, \\
\sum_{s_3=1}^{n_3} a^{(1)}_{s_1 s_3}(x_2) x_{3s_3} \le v_{13}, \quad s_1 = 1, \ldots, n_1, \\
\sum_{s_3=1}^{n_3} a^{(2)}_{s_2 s_3}(x_1) x_{3s_3} \le v_{23}, \quad s_2 = 1, \ldots, n_3, \\
\sum_{s_3=1}^{n_3} x_{3s_3} = 1, \quad x_{3s_3} \ge 0, \quad s_3 = 1, \ldots, n_3,
\end{gathered} \tag{14}
$$

где

$$
a^{(1)}_{s_1 s_3}(x_2) = \sum_{s_2=1}^{n_2} a^{(2)}_{s_1 s_2 s_3} x_{2s_2}, \quad a^{(2)}_{s_2 s_3}(x_1) = \sum_{s_1=1}^{n_1} a^{(2)}_{s_1 s_2 s_3} x_{1s_1}, \quad a_{s_3}(x_1, x_2) = \sum_{s_1=1}^{n_1} \sum_{s_2=1}^{n_2} a_{s_1 s_2 s_3} x_{1s_1} x_{2s_2}.
$$

Пусть X' – множество точек $x \in X$, являющихся точками локального минимума функции $N(x)$ на X, а множество X'' состоит из таких точек $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$, что x_1 – решение задачи линейного программирования $P_1(x_2, x_3)$, x_2 – решение задачи $P_2(x_1, x_3)$, x_3 – решение задачи $P_3(x_1, x_2)$.

Очевидно, что имеет место включение $X'' \supset X' \supset X^*$, где X^* – введенное ранее множество точек Нэша игры Г. Можно показать, что любая точка $x = (x_1, x_2, x_3) \in X''$ содержится в X', если хотя бы одна из трех задач линейного программирования $P_1(x_2, x_3)$, $P_2(x_1, x_3)$, $P_3(x_1, x_2)$ имеет единственное решение. Поэтому, как правило, точки $x \in X''$ содержатся в множестве X'.

Зафиксируем произвольную пару стратегий $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ первого и второго игроков игры Г и определим последовательность точек $x^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k) \in X$ следующим образом: $x_1^1 = x_1$, $x_2^1 = x_2$, x_3^1 – решение задачи $P_3(x_1^1, x_2^1)$, x_1^{k+1} – решение задачи $P_1(x_2^k, x_3^k)$, x_2^{k+1} – решение задачи $P_2(x_1^{k+1}, x_3^k)$, x_3^{k+1} – решение задачи $P_3(x_1^{k+1}, x_2^{k+1})$, $k = 1, 2,\ldots$ Очевидно, что $N(x^{k+1}) \le N(x^k)$ для любых $k = 1, 2,\ldots$. Следовательно, существует $\lim\limits_{k \to \infty} N(x^k) = q_1(x_1, x_2) \ge 0$, где x_1 и x_2 – любая пара стратегий первого и второго игроков игры Г. Легко убедиться, что все предельные точки последовательности $\{x^k\}$ содержатся в множестве X'' и значение функции $N(x)$ в каждой из них равно $q_1(x_1, x_2)$.

По аналогичным правилам можно построить еще две последовательности троек стратегий игроков конечной игры Г, отправляясь либо от $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$, либо от $x_1 \in X_1$, $x_3 \in X_3$. Первой последовательности отвечает функция $q_2(x_2, x_3)$, $(x_2, x_3) \in X_2 \times X_3$, второй – функция $q_3(x_1, x_3)$, $(x_1, x_3) \in X_1 \times X_3$.

Численный метод решения конечной игры Г трех лиц, множества стратегий и функции выигрышей игроков которой задаются соотношениями (6), основан на приближенном вычислении значении функций q_i, $i = 1, 2, 3$, при заранее выбранном конечном наборе аргументов этих функций. Зафиксируем любые стратегии $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ первого и второго игроков игры Г. Согласно приведенному определению, значение функции q_1 в точке (x_1, x_2) равно $\lim\limits_{i \to \infty} N(x^i)$, где при любом $k \ge 1$ член x^{k+1} последовательности $\{x^i\}$ вычисляется по x^k в результате решения трех задач линейного программирования P_1, P_2 и P_3. В качестве приближенного значения $\tilde{q}_1(x_1, x_2)$ функции q_i в точке (x_1, x_2) принимается $N(x^k)$, если $N(x^k) - N(x^{k+1})$ оказывается меньше заранее выбранного достаточно малого числа $\varepsilon > 0$. Аналогично вычисляются приближенные значения $\tilde{q}_2(x_2, x_3)$ и $\tilde{q}_3(x_1, x_3)$ функций q_1 и q_2.

Пусть X_i^0 – множество чистых стратегий игрока i игры Г. В процессе решения игры Г данным методом вычисляется $n_1 n_2$ чисел $\tilde{q}_1(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in X_1^0 \times X_2^0$, $n_2 n_3$ чисел $\tilde{q}_2(x_2, x_3)$, $(x_2, x_3) \in X_2^0 \times X_3^0$, и $n_1 n_3$ чисел $\tilde{q}_3(x_1, x_3)$, $(x_1, x_3) \in X_1^0 \times X_3^0$. Из этих чисел выбирается минимальное, и соответствующий этому минимуму набор стратегий трех игроков выдается в качестве приближенного решения игры Г. Пусть, например,

$$\min\left\{\min_{(x_1, x_2) \in X_1^0 \times X_2^0} \tilde{q}_1(x_1, x_2), \min_{(x_2, x_3) \in X_2^0 \times X_3^0} \tilde{q}_2(x_2, x_3), \min_{(x_1, x_3) \in X_1^0 \times X_3^0} \tilde{q}_3(x_1, x_3)\right\} =$$

$$= \min_{(x_1, x_2) \in X_1^0 \times X_2^0} \tilde{q}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{q}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2),\ \tilde{x}_1 \in x_1^0,\ \tilde{x}_2 \in x_2^0.$$

Тогда в качестве приближенного решения игры Г выбирается такое $x^k \in X$, что $N(x^k) = \tilde{q}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Общее число задач линейного программирования, которое придется решить для получения приближенного решения игры Г предлагаемым методом, равно $3(n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_3) l$, где l – среднее число троек задач линейного программирования, необходимое для вычисления приближенных значений функций q_i, $i = 1, 2, 3$. Имеющийся у нас опыт использования аналогичного метода для конечных игр с двумя игроками (биматричных игр), описанный в (Гольштейн, Малков, Соколов, 2013), дает основание рассчитывать, что число l окажется в пределах от 10 до 20.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гольштейн Е.Г. (2002). Метод решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. Т. 42. № 7.

Гольштейн Е.Г. (2009а). Об одной задаче равновесия, связанной с бескоалиционными играми // *Экономика и мат. методы*. Т. 45. № 4.

Гольштейн Е.Г. (2009б). О монотонности отображения, связанного с бескоалиционной игрой многих лиц // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. Т. 49. № 9.

Гольштейн Е.Г. (2012). Об одном классе антагонистических игр // *Экономика и мат. методы*. Т. 48. № 3.

Гольштейн Е.Г., Малков У.Х., Соколов Н.А. (2013). Об одном численном методе решения биматричных игр // *Экономика и мат. методы*. Т. 49. № 4.

Mills H. (1960). Equilibrium Points in Finite Games // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. Vol. 8. No. 2.

Поступила в редакцию
15.07.2013 г.

An Approximate Method for Solving Finite Three-Person Games

Ye.G. Golshtein

The paper describes a numerical algorithm for solving a finite non-cooperative three-person game in mixed strategies. The algorithm is based on linear programming and is connected with minimization of a function having numerous local minima.

Keywords: non-cooperative game, Nash equilibrium, pure strategy, mixed strategy, game with convex structure, variational inequality.

JEL Classification: C02, C72.