ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2014, том 50, № 2, с. 58–72

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МОДЕЛИ МЕХАНИЗМОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ*

© 2014 г. Н.П. Пильник, И.Г. Поспелов

(Москва)

С помощью идеи декомпозиции задачи о благосостоянии делается попытка прояснить вопрос о том, как следует описывать поведение фирмы и ее взаимоотношения с собственниками в динамических моделях общего равновесия. Предложена общая схема декомпозиции, порождающая механизмы взаимодействия экономических агентов, одним из которых является механизм акционерного общества, позволяющий в рамках динамических моделей общего равновесия описывать фондовый рынок.

Ключевые слова: общее экономическое равновесие, декомпозиция задачи благосостояния, акционерный капитал.

Классификация JEL: D50.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье с помощью идеи декомпозиции задачи о благосостоянии делается попытка прояснить вопрос о том, как следует описывать поведение фирмы и ее взаимоотношения с собственниками в динамических моделях общего равновесия. Может показаться, что актуальность данной темы полностью нивелируется очевидностью ответа, поскольку практически во всех микроэкономических моделях и моделях общего равновесия фирма рассматривается как самостоятельный экономический агент, принимающий рациональные решения о размерах и способах производства товаров и услуг. Соответственно, на основании каждой такой модели, часто без специального обсуждения, выдаются какие-то конкретные предположения относительно целей деятельности фирмы.

Тем не менее единства и определенности в этом вопросе экономическая теория не достигла. Похоже, стороны дискуссии просто исчерпали аргументы, и автор очередной новой модели выбирает один из принятых вариантов описания целей деятельности фирмы, сообразуясь с собственным мнением и задачами моделирования.

Основная часть микроэкономических моделей – статические, и целью деятельности фирмы в них обычно считается максимизация прибыли

$$\pi = p(q)q - c(q) \to \max_q . \tag{1}$$

Несмотря на широкое распространение идеи о максимизации фирмой собственной прибыли, оговаривается и спорность такой предпосылки, особенно в связи с анализом структуры отраслевых рынков (Тироль, 1996; Хэй, Моррис, 1999).

В динамических микроэкономических моделях целью фирмы обычно считается максимизация ожидаемой дисконтированной (приведенной) прибыли, или *NPV*, которая в случае дискретного времени имеет вид

$$NPV = \sum_{t=0}^{T} \pi_t (1+r)^{-t} \to \max_{\{q_t\}_{t=0}^{T}}, \tag{2}$$

---

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00916-а (2011-2012), 12-01-31333, 12-01-31189). Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2013 г. и гранта факультета экономики 2012 г.

где обычно (но не всегда) дисконтирующий фактор $r > 0$ отождествляется с безрисковой ставкой процента, а прибыль вычисляется в каждом периоде согласно (1).

Вид функционала (2) обосновывается соображениями об альтернативах вложения средств у собственника фирмы. Функционал (2) широко используется не только в моделях, но и в прикладных методиках финансового анализа. И.Г. Поселов (1988) с учетом общих предложений показал, что решение (2) дает приближенное решение задачи о минимизации вероятности разорения фирмы. Это позволяет рассматривать *NPV* как критерий отбора фирм, способных выжить в условиях конкуренции и угрозы финансового разорения.

Однако следует отметить, что использование функционала (2) для описания поведения фирмы в рамках моделей общего равновесия, в которых должны определяться не только цены, но и ставки процента, часто приводит к вырождению системы соотношений модели (Гуриев, Поспелов, 1998).

В модели Эрроу–Дебре (Arrow, Debreu, 1954) идея максимизации прибыли реализуется в рамках модели общего равновесия. В исходной постановке эта модель статическая, хотя, как правило, переход к динамической конструкции осуществляется за счет представления одного товара в разные моменты времени как разных товаров. Модель описывает поведение конечного множества потребителей и производителей. В модели производители максимизируют суммарный объем прибыли, который делится в заданных (возможно, разных – в разные моменты времени) пропорциях между потребителями. Тем не менее динамической стандартная новая формулировка модели Эрроу–Дебре является лишь формально. По сути модель представляет собой последовательность статических моделей, не связанных между собой. Вполне естественно считать, что указанная связь должна описываться с помощью финансовых потоков, характеризующих инвестиционную деятельность производителей и сбережения потребителей, а следовательно, и механизмы управления долгосрочными средствами производства, однако их добавление сталкивается с рядом принципиальных трудностей.

Последовательный переход к динамическому случаю удалось сделать И.Г. Поспелову в модели с управлением капиталом (Поспелов, 2003). В данной модели потребители определяют траектории собственных вложений в фирмы (капиталы) с учетом обещанной фирмой доходностью. Цель деятельности фирмы в данной модели – максимизация собственного курса в начальный момент времени, который определяется отношением капитализации фирмы к начальному уровню капитала.

В модели с управлением капиталом собственник не влияет на развитие производства. Он строит свои планы, опираясь исключительно на финансовые показатели – курс и доходность. Тем не менее с содержательной точки зрения модель оставляет неудовлетворенность тем, что, во-первых, курсы определяются фирмой, а не рынком капитала, а во-вторых, капиталовложения имеют приемлемую содержательную интерпретацию только в том случае, если фирма не выпускает новых акций.

Другим вариантом описания взаимодействия фирмы и ее собственников для динамического случая является модель Сидравского (Sotskov, 2003). В данной конструкции потребитель максимизирует полезность не только потребления, но и реальных денежных остатков. Производственные фонды фактически отождествляются со сбережениями и находятся под прямым управлением потребителя. Фирме же остается задача распределения ресурсов между технологиями и определения объема производства в каждый отдельный момент времени. По сути, это та же конструкция с многочисленными надстройками, но незначительными изменениями – она применяется в большинстве моделей равновесия, выделяющих фирму-производителя как отдельного агента (Acemoglu, 2007; Barro, Sala-i-Martin, 2004).

Тем не менее такой подход представляется не слишком корректным, когда речь идет о построении моделей динамического равновесия, отражающих фактически сложившиеся экономические механизмы и институты. В современных условиях собственники капитала не только не управляют, но, как правило, и не знают состава, назначения и реальной ценности основных фондов принадлежащих им предприятий.

Следует отметить, что отождествление сбережений и основных фондов исключает возможность исследовать вопрос о структуре источников финансирования инвестиций в базовой конструкции. В связи с этим исходная модель начинает усложняться за счет добавления дополнительных нелинейных соотношений (в первую очередь из-за включения других переменных в функционалы агентов) или введения стохастических переменных, специфика варьирования по которым приводит к появлению серии нетривиальных ограничений. С нашей точки зрения, вынужденная сложность итоговых конструкций связана не столько с особенностями описываемых явлений, сколько с дефектом базовой конструкции.

Особенно сложным вопрос о целях фирмы становится в динамических моделях, в которых необходимо описывать инвестиционную деятельность и выбор источников ее финансирования: использование собственных накоплений, выпуск акций или выпуск облигаций. Старый вопрос о целях деятельности фирмы снова приобретает актуальность в связи с появлением моделей равновесия рациональных ожиданий, учитывающих специфику фактически сложившихся в экономике отношений (Поспелов и др., 2006).

В данной работе предлагается формализованный подход к определению целей деятельности фирмы и описанию взаимодействия с ее собственником. С помощью обобщения в игру Нэша нескольких экономических агентов хорошо известной (Макаров, Рубинов, 1973) декомпозиции задачи благосостояния получен целый спектр механизмов, одним из которых является механизм акционерного общества, позволяющий в рамках динамических моделей общего равновесия описывать фондовый рынок.

2. ЗАДАЧА БЛАГОСОСТОЯНИЯ

2.1. Формулировка задачи благосостояния. Рассмотрим экономическую систему, в которой производится и потребляется конечное число благ и которая функционирует конечное число периодов времени $t \in \tau = \langle 1, \ldots, T \rangle$. Все векторы имеют размерность, равную числу благ, верхний индекс относится к экономическому агенту, а нижний – к периоду времени. Нижний индекс τ показывает, что речь идет о траектории.

Производство осуществляется множеством P производственных единиц, каждая из которых характеризуется своим множеством Y^j, $j \in P$ допустимых траекторий чистых выпусков $y_\tau^j = \langle y_1^j, \ldots, y_T^j \rangle$. Подразумевается, что описание множества Y^j учитывает возможности расширения будущего производства за счет сегодняшних инвестиций, которые, в свою очередь, сокращают сегодняшний чистый выпуск. Ресурсы, поступающие в экономику из внешней среды, мы для простоты изложения не рассматриваем.

Целью производства является удовлетворение потребностей конечного множества потребителей H, причем каждый из них оценивает ожидаемую траекторию своего потребления $\mathbf{c}_\tau^i$, $i \in H$ функцией полезности $\omega^i(\mathbf{c}_\tau^i)$. Эти функции будем считать достаточно "хорошими", чтобы обеспечить требуемую регулярность решения возникающих оптимизационных задач[1].

Для формулировки задачи благосостояния требуется задать набор коэффициентов $\alpha^i, i \in H$, характеризующих важность предпочтений каждого конкретного потребителя при определении оптимальной траектории чистых выпусков. Тогда задача благосостояния состоит в максимизации линейной комбинации полезностей

$$\sum_{i=1}^{H} \alpha^i \omega^i(\mathbf{c}_\tau^i) \to \max \tag{3}$$

за счет выбора траекторий производства (чистых выпусков)

$$\mathbf{y}_\tau = \langle \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_T \rangle \in Y \triangleq \sum_{j \in P} \mathrm{Y}^j \; \mathbf{y}_\tau = \sum_{j \in P} \mathbf{y}_\tau^j, \mathbf{y}_\tau^j \in \mathrm{Y}^j$$

[1] Подходящее условие сильной ненасыщаемости приведено в (Андреев, Поспелов, 2008) в виде $\forall \mathbf{q} \geq 0 \; \mathbf{c} \in \operatorname{Arg\,max} \{ \omega^i(\mathbf{c}) - \mathbf{qc} \} \Rightarrow \mathbf{qc} > 0$. Максимизация такой функции полезности при бюджетном ограничении всегда дает строго положительную точку, лежащую на этом ограничении.

и потреблений $\mathbf{c}_\tau^i$, в рамках балансов

$$\mathbf{y}_t \geq \sum_{i \in H} \mathbf{e}_t^i, t \in \tau. \tag{4}$$

Решением этой задачи являются траектории потреблений $\hat{\mathbf{c}}_\tau^i, i \in H$, и чистых выпусков $\hat{\mathbf{y}}_\tau$, которые мы будем называть *эффективными*.

Как показано в (Андреев, Поспелов, 2008), при достаточно регулярных функциях полезности и технологическом множестве изменение коэффициентов $\alpha^i > 0, i \in H$ позволяет получить в качестве решения задачи (3) все оптимальные по Парето траектории потребления $\mathbf{c}_\tau^i$, на которых ни у одного потребителя никогда не возникает нулевого потребления.

В дальнейшем для простоты изложения будем считать, что потребитель в экономике только один. Обобщение результатов на случай многих потребителей, как правило, не представляет проблемы. Случаи, когда рассмотрение многих потребителей существенно влияет на результат, нами будут описаны специально.

Итак, рассмотрим простейший случай, когда задача благосостояния состоит в максимизации единой полезности $\omega^h(\mathbf{c}_\tau)$ за счет выбора траекторий производства (чистых выпусков) $\mathbf{y}_\tau$ и потребления $\mathbf{c}_\tau$ в рамках балансов $\mathbf{y}_t \geq \mathbf{c}_t, t \in \tau$ и технологического ограничения $\mathbf{y}_\tau \in Y$:

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau) \to \max_{\mathbf{c}_\tau, \mathbf{y}_\tau \in Y, \mathbf{c}_\tau \leq \mathbf{y}_\tau}. \tag{5}$$

Задача (5) – задача прямого планирования производства потребителем на уровне технологических процессов. Такая схема управления экономикой реализуется только в изолированном натуральном домохозяйстве. Во всех более сложных случаях возникает разделение управленческих решений между разными агентами, и в первую очередь – между потребителем и производителем. Координация этих решений в рамках балансов определяется особыми механизмами передачи информации, главную роль среди которых играют финансовые инструменты. Понять, как могут возникать такие инструменты, позволяет декомпозиция задачи благосостояния.

2.2. Декомпозиция задачи благосостояния. Идея декомпозиции задачи благосостояния состоит в том, чтобы раздать планируемые переменные в управление разным агентам и определить им целевые функционалы и экзогенные информационные переменные так, чтобы решение задачи благосостояния определялось как совокупность решений задач отдельных агентов. Принципиальную возможность такой декомпозиции доказывают многочисленные теоремы об эффективности различных моделей общего экономического равновесия, которые означают, что модель равновесия, будучи совокупностью взаимосвязанных задач агентов, реализует решение задачи благосостояния. Однако в данной статье мы будем исходить именно из задачи благосостояния, чтобы исследовать возможные способы декомпозиции, которые можно интерпретировать как эффективные схемы организации децентрализованного управления экономикой.

Естественный путь декомпозиции оптимизационной задачи открывает применение метода Лагранжа. Как известно, при некоторых $\mathbf{\Lambda}_\tau^* \geq 0$ решение задачи (5) эквивалентно решению задачи максимизации функционала Лагранжа

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau) + \sum_{t=1}^{T} \mathbf{\Lambda}_\tau^*(\mathbf{y}_t - \sum_{i=1}^{H} \mathbf{c}_t) \to \max_{\mathbf{c}_\tau \geq 0, \mathbf{y}_\tau \in Y} \tag{6}$$

без балансовых ограничений.

Задача (6) допускает следующую декомпозицию:

1) потребитель выбирает траекторию потребления $\mathbf{c}_t^h$, максимизирующую так называемый потребительский избыток

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau) - \sum_{t=1}^{T} \mathbf{\Lambda}_\tau^* \mathbf{c}_t^h \to \max_{\mathbf{c}_\tau^h \geq 0}, \tag{7}$$

в котором предметы потребления $\mathbf{c}_t^h$ оцениваются по “ценам” $\mathbf{\Lambda}_\tau^*$;

2) производитель выбирает траекторию чистых выпусков $\mathbf{y}_t^p$, которая максимизирует полную прибыль в заданных ценах при технологических ограничениях

$$\sum_{t=1}^{T} \mathbf{\Lambda}_\tau^* \mathbf{y}_t^p \to \max_{\mathbf{y}_\tau^p \in Y}; \tag{8}$$

3) “цены” $\mathbf{\Lambda}_\tau^*$ служат *информационными переменными*, которыми агенты не управляют[2].

Очевидно, что решения задач (7) и (8) при правильных информационных переменных $\mathbf{\Lambda}_\tau^*$ совпадают соответственно с эффективными траекториями $\hat{\mathbf{c}}_\tau$ и $\hat{\mathbf{y}}_\tau$, полученными из задачи благосостояния (5).

Однако с экономической точки зрения такая декомпозиция представляется не совсем корректной. Если множители $\mathbf{\Lambda}_\tau^*$ сопоставлять с наблюдаемыми ценами, то из (7) получится, что полезность изменяется в деньгах (*трансферабельная полезность*). Хотя такая конструкция часто используется в теоретических моделях, но для описания реалистичных экономических механизмов она кажется мало пригодной. С одной стороны, решение оказывается не инвариантным к монотонному преобразованию (*калибровке*) полезности, а с другой – не инвариантным к изменению масштаба денежной единицы (*деноминации*). Между тем наблюдения показывают, что реальные экономические механизмы, с одной стороны, не полагаются на измерение “интенсивности желаний” (сравнение индивидуальных полезностей), а с другой – легко выдерживают деноминацию. Поэтому мы будем искать другие схемы декомпозиции.

Для этого будем добавлять в функционал Лагранжа (6) выражения, зависящие от новых дополнительных переменных, а затем разделять эти переменные на информационные и управляющие переменные агентов, чтобы выделить из общей задачи максимизации модифицированного функционала Лагранжа задачи отдельных агентов. При этом должны одновременно выполняться следующие требования.

Т1. Задача благосостояния с добавлением новых инструментов имеет своим решением эффективные траектории потребления и чистых выпусков.

Т2. Каждая из полученных задач агентов разрешима.

Т3. Решение задач агентов инвариантно к деноминации и калибровке предпочтений потребителя.

С экономической точки зрения добавление новых переменных означает введение в модель новых механизмов обмена информацией, передающих сигналы о предпочтениях одного агента другому при разделении компетенций управления между этими агентами.

3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПЕРЕДАЧЕЙ ПРИБЫЛИ: *P*-МОДЕЛЬ

3.1. Декомпозиция задачи благосостояния в *P*-модель. Чтобы отделить полезность от денег и одновременно получить возможность масштабировать цены, естественно представить двойственные переменные $\mathbf{\Lambda}_\tau^*$ в виде $\mathbf{\Lambda}_\tau^* = \lambda_t^* \mathbf{p}_t^*,\ t \in \tau$, где векторные переменные $\mathbf{p}_\tau^*$ будут отвечать за материальные балансы (4) и интерпретироваться как наблюдаемые цены продуктов. Что же касается скаляров $\lambda_t^*,\ t \in \tau$, то их можно будет использовать как двойственные переменные к финансовому балансу в задачах агентов.

---

[2] Согласно теореме о седловой точке “цены” $\mathbf{\Lambda}_\tau^*$ можно найти из задачи максимизации прибыли $\sum_{t=1}^{T} \mathbf{\Lambda}_\tau^*(\hat{\mathbf{c}}_t - \hat{\mathbf{y}}_t) \to \max_{\mathbf{\Lambda}_t \geq 0}$ еще одного агента – торговца, который покупает продукты у производителя и продает их потребителю. Таким образом, задача благосостояния полностью превращается в некооперативную игру трех лиц: потребителя, производителя и торговца, каждый из которых выбирает значения своих управляющих переменных при заданных значениях управляющих переменных других агентов. Подобные вариационные принципы для информационных переменных в динамических моделях общего равновесия достаточно подробно рассмотрены в (Поспелов, 2003). Мы этим здесь заниматься не будем, а будем рассматривать обозначаемые индексом “*” информационные переменные как заданные для агентов величины, возможно, связанные с управляющими переменными определенными равенствами.

Добавим к функционалу Лагранжа выражение $\sum_{t=1}^{T}\tilde{\lambda}_{\tau}^{*}(\pi_t^1-\pi_t^2)$, которое будем трактовать как описание баланса двух потоков $\pi_t^1=\pi_t^2$, где π_t^1, π_t^2 – финансовые потоки потребителя и производителя. Добавим ограничение $\pi_t^1=\pi_t^2$ к ограничениям задачи, а множитель $\tilde{\lambda}_t^*$ – чтобы обеспечить инвариантность к деноминации. Естественно, что решение задачи (6) от этого никак не изменилось. Теперь будем распределять переменные π_t^1, π_t^2 по компетенциям агентов. Возможно несколько вариантов: либо каждый агент выбирает это значение самостоятельно, а баланс исключается из решения задачи и обеспечивается подходящим выбором двойственной переменной (взаимодействие типа обмена), либо один из агентов назначает эту величину, а второй получает ее как информационную переменную (взаимодействие типа передача). Воспользуемся тем, что группа членов

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau)+\sum_{t=1}^{T}(-\lambda_t^*\mathbf{p}_t^*\mathbf{c}_t+\tilde{\lambda}_t^*\pi_t^1) \qquad (9)$$

при $\tilde{\lambda}_t^*=\lambda_t^*$ соответствует функционалу Лагранжа для задачи максимизации полезности $\omega^h(\mathbf{c}_\tau)$ при бюджетном ограничении $\mathbf{p}_t^*\mathbf{c}_t\le\pi_t^1$. Такая задача в отличие от (8) инвариантна к деноминации и калибровке полезности. По логике этой задачи доход потребителя π_t^1 должен быть задан, поэтому полагаем, что $\pi_t^1=\pi_t^*$, и эта величина определяется производителем $\pi_t^2=\pi_t^p$.

Теперь в компетенции производителя остается вектор чистых выпусков $\mathbf{y}_t^p$ и выплачиваемая им прибыль π_t^p. Однако группа членов, содержащих эти переменные, $\sum_{t=1}^{T}\lambda_t(\mathbf{p}_t\mathbf{y}_t^p-\pi_t^p)$ не имеет максимума по π_t^p.

Задачу производителя можно изменить, добавив в нее и к функционалу Лагранжа (5) некоторую функцию от “проблемной” переменной π_t^p:

$$\omega^p(\pi_\tau^p)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*(\mathbf{p}_t^*\mathbf{y}_t^p-\pi_t^p)\to\max_{\pi_\tau^p,\,\mathbf{y}_\tau^p\in Y}. \qquad (10)$$

В данном случае к функции $\omega^p(\cdot)$ предъявляется только одно требование – она должна обеспечить существование максимума задачи производителя. Добавленная функция $\omega^p(\pi_\tau^p)$ интерпретируется как функция полезности производителя от прибыли в каждый момент времени.

Таким образом, нами получена декомпозиция задачи благосостояния в модель, состоящую из задачи потребителя и задачи производителя. Задача потребителя имеет вид $\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h)\to\max\limits_{\mathbf{c}_\tau^h}$ за счет выбора траектории потребления $\mathbf{c}_\tau^h$ в рамках финансового баланса

$$0=-\mathbf{p}_t^*\mathbf{c}_t^h+\pi_t^*. \qquad (11)$$

Задача производителя $\omega^p(\pi_\tau^p)\to\max\limits_{\Phi_\tau^p,\,\pi_\tau^p,\,\mathbf{y}_\tau^p\in Y}$ за счет выбора траекторий переменных $\pi_\tau^h, \mathbf{y}_\tau^h$ в рамках финансового баланса $0=\mathbf{p}_t^*\mathbf{y}_t^h-\pi_t^p$. Кроме того, в равновесии должен быть выполнен баланс $\hat{\mathbf{y}}_t^p\ge\hat{\mathbf{c}}_t^h$ и правило передачи информации относительно объема прибыли

$$\pi_t^*=\hat{\pi}_t^p, \qquad (12)$$

позволяющие согласовать решения задач агентов. Однако такая декомпозиция не удовлетворяет требованию инвариантности к калибровке предпочтений потребителя и деноминации.

Рассмотрим производные функций Лагранжа (9) и (10) по переменным π_t^p и $\mathbf{c}_t^h$:

$$\omega^{p'}(\pi_t^p)=\lambda_t^*,\quad \nabla\omega^h(\mathbf{c}_t^h)=\lambda_t^*\mathbf{p}_t^*. \qquad (13)$$

Если задача потребителя инвариантна по отношению к калибровке его предпочтений, то задачи с разными функциями полезности $\omega^{h1}(\cdot)$ и $\omega^{h2}(\cdot)$ при одном и том же векторе цен p_t должны давать один и тот же вектор потребления $\mathbf{c}_t^h$. Такая подстройка возможна только за счет разных значений двойственных переменных λ_t^{1*} и λ_t^{2*}. Но при одной и той же функции полезности производителя $\omega^p(\cdot)$ мы получим разные объемы прибыли π_t^{p1} и π_t^{p2}, что противоречит требованию инвариантности.

Для того чтобы добиться такой инвариантности, ограничиваясь уже введенными переменными, мы можем изменять только аргументы функции полезности производителя $\omega^p(\pi_\tau^p)$ на $\omega^p(\lambda_\tau^*\pi_\tau^p)$. Аналогично (12) запишем функцию Лагранжа задачи фирмы как

$$\omega^p(\lambda_\tau^*\pi_\tau^p)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*(\mathbf{p}_t\mathbf{y}_t^p-\pi_t^p)\to\max_{\pi_\tau^p,\,\mathbf{y}_\tau^p\in Y}.$$

Поскольку двойственные переменные к финансовому балансу, как правило, в экономических моделях убывают со временем, то добавленный нами множитель может быть интерпретирован как дисконт-фактор. При этом он не задается изначально как некоторая безрисковая ставка, а определяется в равновесии как результат взаимодействия экономических агентов.

Именно в этом состоит трудность постановки задачи. Дело в том, что λ_t^*, являясь двойственной переменной, определяется только в равновесии и на момент постановки неизвестна. При постановке задачи в функционал следует поставить некоторую неизвестную переменную, которая в процессе нахождения равновесия приравнивается к двойственной переменной к финансовому балансу соответствующего агента. Другая возможность (укладывающаяся в стандартное понимание равновесия) состоит в том, что мы угадываем переменную, стоящую в функции полезности агента так, чтобы она совпала с равновесным значением двойственной переменной.

С учетом всех изменений мы приходим к задаче максимизации модифицированного функционала Лагранжа

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*(\mathbf{p}_t^*\mathbf{y}_t^p-\mathbf{p}_t^*\mathbf{c}_t^h)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*(\pi_t^*-\pi_t^p)+\omega^p(\lambda_\tau^*\pi_\tau^p)\to\max_{\pi_\tau^p,\,\mathbf{c}_\tau^h,\,\mathbf{y}_\tau^p\in Y}, \tag{14}$$

где информационные переменные $\mathbf{p}_t^*$, π_t^* определяются соответственно из условий $\hat{\mathbf{y}}_t^p\ge\hat{\mathbf{c}}_t^h$, $\pi_t^*=\hat{\pi}_t^p$. Однако даже в такой постановке модель дает эффективную траекторию чистых выпусков, только если параметры функции полезности производителя согласованы с параметрами функции полезности потребителя $\omega^{p'}(\lambda_t^*\hat{\pi}_t^p)\mathbf{p}_t^*=\lambda_t^*\mathbf{p}_t^*=\nabla\omega^h(\hat{\mathbf{c}}_t^h)$, т.е. с учетом (11), (12),

$$\omega^{p'}\left(\hat{\mathbf{c}}_t^h\nabla\omega^h(\hat{\mathbf{c}}_t^h)\right)=1. \tag{15}$$

Следовательно, для того чтобы получить эффективную траекторию равновесия, необходимо, чтобы вид и параметры функции полезности производителя были выбраны специальным образом – с учетом функции полезности потребителя. Этот факт обесценивает идею введения независимых агентов, обменивающихся информацией. Указанный дефект (требование к параметрам) появляется в силу неявного требования к потребителю сразу расходовать все полученные доходы, поэтому ситуация может быть исправлена добавлением запасов (остатков) финансовых инструментов.

Аналогично (9) воспользуемся некоторыми переменными Φ_t^1, Φ_t^2. Поскольку речь идет о запасе, то наравне с Φ_t^1, Φ_t^2 нужно использовать выражение от запаздывающего значения этих же переменных $\sigma(\Phi_{t-1}^1)$, $\sigma(\Phi_{t-1}^2)$. Будем считать, что вся нелинейность функций, входящих в функцию Лагранжа, относится только к функциям полезности агентов, а участвующие в балансовых ограничениях переменные входят в них линейно. Поэтому имеет смысл допустить, что $\sigma(\Phi_{t-1}^1)=\kappa_t\Phi_{t-1}^1$ и $\sigma(\Phi_{t-1}^2)=\kappa_t\Phi_{t-1}^2$:

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*(\mathbf{p}_t^*\mathbf{y}_t^p-\mathbf{p}_t^*\mathbf{c}_t^h)+\lambda_t^*\pi_t^p+\lambda_t^*\pi_t^*+\omega^p(\lambda_\tau^*\pi_\tau^p)+$$
$$+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*(\Phi_t^1-\kappa_t^*\Phi_{t-1}^1)-\lambda_t^*(\Phi_t^2-\kappa_t^*\Phi_{t-1}^2)\to\max_{\substack{\Phi_\tau^1,\,\Phi_\tau^2,\,\pi_\tau^p,\\ \mathbf{c}_\tau^h,\,\mathbf{y}_\tau^p\in Y}}, \tag{16}$$

где информационные переменные $\mathbf{p}_t^*,\ \pi_t^*,\ \kappa_t^*$ определяются соответственно из условий $\hat{\mathbf{y}}_t^p \geq \hat{\mathbf{c}}_t^h$, $\pi_t^* = \hat{\pi}_t^p,\ \hat{\Phi}_t^1 = \hat{\Phi}_t^2$.

Заметим, что для удобства записи можно использовать представление $v_t^* = \lambda_t^* \kappa_t^*$. Управление добавленными переменными разделим между агентами симметричным образом, т.е. $\Phi_t^h = \Phi_t^1$, $\Phi_t^p = \Phi_t^2$. Тогда функцию Лагранжа можно записать как

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^*(\mathbf{p}_t^* \mathbf{y}_t^p - \mathbf{p}_t^* \mathbf{c}_t^h) - \lambda_t^* \pi_t^p + \lambda_t^* \pi_t^* + \omega^p(\lambda_\tau^* \pi_\tau^p) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* \Phi_t^h - \nu_t^* \Phi_{t-1}^h) - (\lambda_t^* \Phi_t^p - \nu_t^* \Phi_{t-1}^p) \to \max_{\Phi_\tau^h,\, \Phi_\tau^p,\, \pi_\tau^p,\, \mathbf{c}_\tau^h,\, \mathbf{y}_\tau^p \in Y}, \qquad (17)$$

где информационные переменные $\mathbf{p}_t^*,\ \pi_t^*,\ \nu_t^*$ определяются соответственно из условий $\hat{\mathbf{y}}_t^p \geq \hat{\mathbf{c}}_t^h$, $\pi_t^* = \hat{\pi}_t^p,\ \hat{\Phi}_t^h = \hat{\Phi}_t^p$.

Если $\nu_t^* = \lambda_t^*$, переменные Φ_t^h, Φ_t^p представляют беспроцентный финансовый инструмент, запасы которого могут принимать отрицательные значения. Такой инструмент интерпретируется как векселя. Для простоты изложения далее при формулировке модели будем использовать именно этот случай.

Если $\nu_t^* = \lambda_t^*$, то комбинацию $\lambda_t^* \Phi_t^h - v_t^* \Phi_{t-1}^h$ можно переписать в виде $\lambda_t^*(\Phi_t^h - \Phi_{t-1}^h v_t^* / \lambda_t^*)$. А если обозначить $r_t^* = (\nu_t^* - \lambda_t^*)/\lambda_t^*$, то $- \lambda_t^*(\Phi_t^h - \Phi_{t-1}^h - r_t^* \Phi_{t-1}^h)$. В силу последнего перехода активы Φ_t^h, Φ_t^p интерпретируются как остатки по кредитному счету, а r_t – как процент. При этом переменные Φ_t^h, Φ_t^p могут принимать и отрицательные значения, превращаясь тем самым в остатки депозитного счета.

Наконец, если $\nu_t^* < \lambda_t^*$, то комбинация $\lambda_t^* \Phi_t^h - \nu_t^* \Phi_{t-1}^h$ переписывается как $\nu_t^*(\Phi_t^h - \Phi_{t-1}^h) + (\lambda_t^* - \nu_t^*)\Phi_t^h$, а после замены $\tilde{\Phi}_t^h = \Phi_t^h \nu_t^* / \lambda_t^*$ и $\kappa_t^* = \lambda_t^*(\lambda_t^*/\nu_t^* - 1)$ – в виде $\lambda_t^*(\tilde{\Phi}_t^h - \tilde{\Phi}_{t-1}^h) + \kappa_t^* \tilde{\Phi}_t$. Таким образом, получен беспроцентный финансовый инструмент, на который ставится ограничение неотрицательности, снимаемое двойственной переменной κ_t^*. Поэтому переменные Φ_t^h, Φ_t^p могут быть интерпретированы как денежные остатки.

После этого решение задачи максимизации функции Лагранжа (17) может быть проведено в два этапа: максимизация функции Лагранжа потребителя

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^*(-\mathbf{p}_t^* \mathbf{c}_t^h + \pi_t^*) + \sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* \Phi_t^h - \lambda_t^* \Phi_{t-1}^h) \to \max_{\mathbf{c}_\tau^h,\, \Phi_\tau^h} \qquad (18)$$

и максимизация функции Лагранжа производителя

$$\omega^p(\lambda_t^* \pi_\tau^p) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^*(\mathbf{p}_t^* \mathbf{y}_t^p - \pi_t^p) - \sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* \Phi_t^p - \lambda_t^* \Phi_{t-1}^p) \to \max_{\Phi_\tau^p,\, \pi_\tau^h,\, \mathbf{y}_\tau^p \in Y}.$$

Однако при варьировании (18) по Φ_T^h мы получим соотношение

$$\lambda_T = 0, \qquad (19)$$

вариация же по переменной $\mathbf{c}_T^h$ даст соотношение

$$\nabla \omega^h(\mathbf{c}_T^h) = \lambda_T \mathbf{p}_T,$$

которое при условии, что дополнительное потребление всегда дает прирост полезности (строго положительная производная функции полезности по любому положительному направлению вектора $\mathbf{c}_t^h$), противоречит (19). То есть потребитель, зная, что период T последний, попытается "загнать" переменную Φ_T^h в бесконечность, чтобы получить бесконечное потребление $\mathbf{c}_T^h$. Аналогичная ситуация с поправкой на знак переменной Φ_T^p возникает и в задаче производителя.

Для разрешимости задач агентов при симметричном разделении управлений необходимо добавить и отнять соответственно произведения $\mu\Phi_T^h$ и $\mu\Phi_T^p$, которые интерпретируются как терминальное ограничение, означающее, что к концу планового периода все долги должны быть погашены. Тогда исходная функция Лагранжа (5) примет вид

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^* \mathbf{p}_t^* (\mathbf{y}_t^p - \mathbf{c}_t^h) - \lambda_t^* \pi_t^p + \lambda_t^* \pi_t^* + \omega^p(\lambda_\tau^* \pi_\tau^p) +$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^* \Phi_t^h - \lambda_t^* \Phi_{t-1}^h - \mu^* \Phi_T^h - \sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* \Phi_t^h - \lambda_t^* \Phi_{t-1}^h) + \mu^* \Phi_T^p \to \max_{\Phi_\tau^h,\, \Phi_\tau^p,\, \pi_\tau^p,\, \mathbf{c}_\tau^h,\, \mathbf{y}_\tau^p \in Y}, \tag{20}$$

где информационные переменные $\mathbf{p}_t^*$, π_t^* определяются из условий $\hat{\mathbf{y}}_t^p \geq \hat{\mathbf{c}}_t^h$, $\pi_t^* = \hat{\pi}_t^p$, $\hat{\Phi}_t^h = \hat{\Phi}_t^p$.

Решение задачи максимизации функции Лагранжа (20) может быть проведено в два этапа:

1) для потребителя

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^* (-\mathbf{p}_t^* \mathbf{c}_t^h + \pi_t^*) + \sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* \Phi_t^h - \lambda_t^* \Phi_{t-1}^h) - \mu^* \Phi_T^h \to \max_{\mathbf{c}_\tau^h,\, \Phi_\tau^h};$$

2) для производителя

$$\omega^p(\lambda_t^* \pi_\tau^p) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^* (\mathbf{p}_t^* \mathbf{y}_t^p - \pi_t^p) - \sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* \Phi_t^p - \lambda_t^* \Phi_{t-1}^p) + \mu^* \Phi_T^p \to \max_{\Phi_\tau^p,\, \pi_\tau^p,\, \mathbf{y}_\tau^p \in Y}.$$

Таким образом, получены задачи потребителя и производителя и доказано следующее утверждение.

Утверждение 1 (*P*-модель). *P-модель является декомпозицией задачи благосостояния, удовлетворяющей требованиям T1–T3, и в рамках этих требований не может быть упрощена.*

В рамках *P*-модели потребитель максимизирует свою функцию полезности $\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h) \to \max_{\mathbf{c}_\tau^h,\, \Phi_\tau^h}$ за счет выбора траектории потребления $\mathbf{c}_\tau^h$ и остатков, полученных от производителя векселей Φ_τ^h в рамках финансового баланса $-\Phi_t^h = -\Phi_{t-1}^h - \mathbf{p}_t^* \mathbf{c}_t^h + \pi_t^*$ и граничного условия $\Phi_T^h \leq 0$.

В свою очередь, производитель максимизирует функцию полезности от прибыли π_t^p $\omega^p(\lambda_\tau^* \pi_\tau^p) \to \max_{\Phi_\tau^p,\, \pi_\tau^p,\, y_\tau^p \in Y}$, где λ_t^* – заданная траектория коэффициентов (дисконт-фактор) за счет выбора траекторий переменных $\Phi_\tau^p, \pi_\tau^p, \mathbf{y}_\tau^p$ в рамках финансового баланса $\Phi_t^p = \Phi_{t-1}^p + \mathbf{p}_t^* \mathbf{y}_t^p - \pi_t^p$ и граничного условия $\Phi_T^p \geq 0$.

В равновесии должны быть выполнены баланс продуктов $\hat{\mathbf{y}}_t^p \geq \hat{\mathbf{c}}_t^h$, баланс векселей $\hat{\Phi}_t^h = \hat{\Phi}_t^p$ и равенство, описывающее передачу информации о размере прибыли $\pi_t^* = \hat{\pi}_t^p$.

3.2. *P*-модель для случая многих агентов. Мы можем перенести эту конструкцию на случай многих потребителей и многих фирм. Пусть в экономике действует *H* потребителей и *P* производителей, каждый из которых характеризуется своей функцией полезности $\omega^{hi}(\mathbf{c}_\tau^{hi})$, $i = 1, \ldots, H$ и $\omega^{pj}(\pi_t^{pj})$, $i = 1, \ldots, P$, соответственно. Тогда задачи агентов можно переписать следующим образом.

Потребитель *i* максимизирует свою функцию полезности

$$\omega^{hi}(\mathbf{c}_\tau^{hi}) \to \max_{\mathbf{c}_\tau^{hi},\, \Phi_\tau^{hi}}$$

за счет выбора траектории потребления $\mathbf{c}_\tau^{hi}$ и остатков полученных от производителя векселей Φ_τ^{hi} в рамках финансового баланса

$$-\Phi_t^{hi} = -\Phi_{t-1}^{hi} - \mathbf{p}_t^* \mathbf{c}_t^{hi} + \sum_{j=1}^{P} \pi_t^{*ji} \tag{21}$$

и граничного условия $\Phi_T^{hi} \le 0$. Переменная π_t^{*ji} в данной записи означает сумму денег (прибыли), перечисленных производителем j потребителю i.

Производитель j максимизирует функцию полезности от суммарной прибыли π_t^{pj}

$$\omega^{pj}(\lambda_\tau^* \pi_\tau^{pj}) \to \max_{\Phi_\tau^{pj},\, \pi_\tau^{pj},\, \mathbf{y}_\tau^{pj} \in Y}$$

за счет выбора траекторий переменных Φ_τ^{pj}, π_τ^{pj}, $\mathbf{y}_\tau^{pj}$ в рамках финансового баланса $\Phi_\tau^{pj} = \Phi_{t-1}^{pj} + \mathbf{p}_t^* \mathbf{y}_t^{pj} - \pi_t^{pj}$ и граничного условия $\Phi_T^{pj} \ge 0$.

В равновесии должны быть выполнены три баланса: продукты $\sum_{j=1}^{P} \hat{\mathbf{y}}_t^{pj} \ge \sum_{i=1}^{H} \hat{\mathbf{c}}_t^{hi}$, векселя $\sum_{i=1}^{H} \hat{\Phi}_t^{hi} = \sum_{j=1}^{P} \hat{\Phi}_t^{pj}$ и выплаченные прибыли

$$\hat{\pi}_t^{pj} = \sum_{i=1}^{H} \pi_t^{*ji}, \quad j = 1, \ldots, P. \tag{22}$$

Данная конструкция является неполной, так как в ней отсутствует описание распределения прибыли производителя j между потребителями. Простейшим способом устранить эту неполноту поможет задание долей α_{ji}^*, $j = 1, \ldots, P$, $i = 1, \ldots, H$. Доля α_{ji}^* описывает долю прибыли производителя j, которая достается потребителю i:

$$\pi_t^{*ji} = \alpha_{ji}^* \pi_t^{pj}. \tag{23}$$

Естественно, что доли α_{ji}^*, должны удовлетворять условию нормировки $\sum_{i=1}^{H} \alpha_{ji}^* = 1$, $j = 1, \ldots, P$.

Выражение (23) может быть подставлено в финансовый баланс потребителя (21), и тогда балансы выплаченных прибылей (22) становятся ненужными.

Заметим, что модель Эрроу–Дебре без ресурсов в том виде, в котором она описана в (Поспелов, 2003), является частным случаем данной конструкции для случая линейных функций полезности производителей. При этом сохраняется и одна из основных проблем модели Эрроу–Дебре: доли распределения прибыли производителя между потребителями α_{ji}^* никак не зависят от поведения агентов и могут быть изменены только экзогенно. Этот факт сильно ограничивает возможности модели для описания современных экономических процессов. Поэтому нам необходимо найти другой способ декомпозировать задачу благосостояния.

4. ДЕКОМПОЗИЦИЯ УПРАВЛЕНИЕМ ФОНДАМИ. *B*-МОДЕЛЬ

4.1. Декомпозиция задачи благосостояния в *B*-модель. Другой способ декомпозиции задачи благосостояния, который будет лишен указанных недостатков *P*-модели, можно получить, если к функции Лагранжа (5), в которой сделана замена $\mathbf{\Lambda}_t^* = \lambda_t^* \mathbf{p}_t^*$, вводить не переменные типа “поток”, а переменные типа “запас”. По аналогии с добавлением комбинации $\lambda_t^* \Phi_t^h - \nu_t^* \Phi_{t-1}^{*h}$ к функции Лагранжа (5) прибавляются и отнимаются соответственно комбинации $\sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* B_t^1 - \eta_t B_{t-1}^1)$ и $\sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* B_t^2 - \eta_t B_{t-1}^2)$.

Заметим, что активы Φ_t^h, Φ_t^p для этих целей использоваться не могут в силу симметричности деления его управлений между агентами. Под симметрией в данном случае понимается наличие у потребителя и производителя управляемой переменной определенного типа (например, Φ_t^p, Φ_{t-1}^p, Φ_T^p). Следовательно, переменных, которые могли бы быть подставлены в функцию полезности производителя, не остается. В противном случае, если симметрично управляемая переменная войдет в функцию полезности, в качестве достаточных условий оптимальности в задаче потребителя и производителя мы получим два противоречащих друг другу соотношения. Это противоречие может быть снято только за счет несовпадения двойственных переменных к финансовым балансам агентов λ_t^*, что тут же исключит всякую возможность эффективности.

Таким образом, для того чтобы модель была эффективной, необходимо, чтобы одна из переменных – B_t^1 или B_t^2 – не являлась управлением в задаче соответствующего агента. Функция Лагранжа примет вид

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*\mathbf{p}_t^*(\mathbf{y}_t^p-\mathbf{c}_t^h)+\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*B_t^1-\eta_t B_{t-1}^1)-\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*B_t^2-\eta_t B_{t-1}^2)\to\max_{B_\tau^1,\,B_\tau^2,\,\mathbf{c}_\tau^h,\,\mathbf{y}_\tau^p\in Y}.$$

Если управление новой переменной B_t^2 отдать производителю, то аналогично P-модели в случае многих потребителей возникнет проблема распределения между ними средств, выплачиваемых производителем. Поэтому управление аналогичной переменной B_t^1 следует отдать потребителю. Таким образом, $B_t^1=B_t^h$, $B_t^2=B_t^*$ при выполнении условия $B_t^*=\hat{B}_t^h$. Но производителю тоже нужна некоторая управляемая переменная, которую можно было бы поставить в функцию полезности. Используем следующее преобразование

$$\lambda_t^*B_t^*-\eta_t B_{t-1}^*=\lambda_t^*(B_t^*-(1+\rho_t^p)B_{t-1}^*),$$

т.е. введем новую переменную $1+\rho_t^p=\eta_t/\lambda_t^*$. Только такое преобразование позволит выделить новую переменную, остаться в рамках идеи линейности финансового баланса по управляемым переменным и сохранить число этих переменных, не добавляя новых. Теперь, не нарушив идеи об использовании теоремы о седловой точке, мы можем отдать производителю управление переменной ρ_t^p. Сама же эта переменная может быть интерпретирована как доходность принадлежащих потребителю фондов B_t^h. Предполагается, что функция полезности фирмы имеет аргументом разность $B_t^*-(1+\rho_t^p)B_{t-1}^*$. Аналогично (14) для выполнения требования инвариантности к калибровке и деноминации домножим аргумент функции полезности производителя на двойственную переменную λ_t^*.

Как и в P-модели, для снятия согласованности параметров функций полезности агентов добавим инструменты Φ_t^h, Φ_t^p – для простоты – в форме векселей $(\lambda_t^*=\nu_t^*)$. Также отнимем произведение $\mu_B^*B_T^h$, обеспечив тем самым разрешимость задачи потребителя (производителю это слагаемое не нужно, так как он данной переменной не управляет). Тогда функция Лагранжа примет вид

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*\mathbf{p}_t^*(\mathbf{y}_t^p-\mathbf{c}_t^h)+\omega^p\left(\lambda_\tau^*B_\tau^*-(1+\rho_\tau^p)B_{\tau-1}^*\right)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*(B_t^h-(1+\rho_t^*)B_{t-1}^h)-\mu_B^*B_T^h-$$

$$-\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*(B_t^*-(1+\rho_t^p)B_{t-1}^*)+\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*\Phi_t^h-\lambda_t^*\Phi_{t-1}^h)-\mu^*\Phi_T^h-\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*\Phi_t^p-\lambda_t^*\Phi_{t-1}^p)+\mu^*\Phi_T^p\to\max_{\substack{\Phi_\tau^h,\,\Phi_\tau^p,\,B_\tau^h,\\ \rho_\tau^p,\,\mathbf{c}_t^h,\,\mathbf{y}_\tau^p\in Y}},$$

где информационные переменные $\mathbf{p}_t^*$, B_t^*, ρ_t^* определяются соответственно из условий $\hat{\mathbf{y}}_t^p\ge\hat{\mathbf{c}}_t^h$, $B_t^*=\hat{B}_t^h$, $\rho_t^*=\hat{\rho}_t^p$, $\hat{\Phi}_t^h=\hat{\Phi}_t^p$. Полученную конструкцию назовем B-моделью.

Потребитель владеет фондами B_t^h, обеспечивающими финансовую сторону деятельности производителя, а производитель управляет собственной доходностью ρ_t^p. По аналогии с P-моделью агенты для эффективности модели также используют векселя.

Формулировка *B*-модели. Задачу потребителя сформулируем как максимизацию полезности потребления $\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h)\to\max\limits_{\mathbf{c}_\tau^h,\,B_\tau^p,\,\Phi_\tau^h}$ в рамках финансового баланса $-\Phi_t^h=-\Phi_{t-1}^h-\mathbf{p}_t^*\mathbf{c}_t^h+B_t^h-(1+\rho_t^*)B_{t-1}^h$ и терминальных ограничений $\Phi_T^h\le 0$, $B_T^h\ge 0$.

Задача производителя – максимизировать полезности исходящего денежного потока в рамках финансового баланса $\omega^p\left(\lambda_\tau^*\left(B_\tau^* - \left(1+\rho_\tau^p\right)B_{\tau-1}^*\right)\right) \to \max\limits_{\Phi_\tau^p,\, \rho_\tau^p,\, \mathbf{y}_\tau^h \in Y}$ и терминальных ограничений $\Phi_t^p = \Phi_{t-1}^p + \mathbf{p}_t^* \mathbf{y}_t^p - B_t^* + (1+\rho_t^p)B_{t-1}^*$ и $\Phi_T^p \geq 0$.

В равновесии должны быть выполнены баланс продуктов $\hat{\mathbf{y}}_t^p \geq \hat{\mathbf{c}}_t^h$, баланс векселей $\hat{\Phi}_t^h = \hat{\Phi}_t^p$ и правила передачи информации о доходности и объемах фондов $B_t^* = \hat{B}_t^h$, $\rho_t^* = \hat{\rho}_t^p$.

Утверждение 2. *B-модель является декомпозицией задачи благосостояния, удовлетворяющей требованиям Т1–Т3, причем в рамках этих требований она не может быть упрощена.*

4.2. *B*-модель для случая нескольких агентов. В случае H потребителей и P производителей задача потребителя i имеет вид:

$$\omega^{hi}(\mathbf{c}_\tau^{hi}) \to \max_{\mathbf{c}_\tau^{hi},\, B_\tau^{hij},\, \Phi_\tau^{hi}},$$

$$-\Phi_t^{hi} = -\Phi_{t-1}^{hi} - \mathbf{p}_t^* \mathbf{c}_t^{hi} + \sum_{j=1}^{P} B_t^{hij} - (1+\rho_t^{*j}) B_{t-1}^{hij}, \quad \Phi_T^{hi} \leq 0, \quad B_T^{hij} \geq 0,$$

а задача производителя j –

$$\omega^{pj}\left(\lambda_\tau^*\left(\sum_{i=1}^{H} B_\tau^{*ij} - \left(1+\rho_\tau^{pj}\right)\sum_{i=1}^{H} B_{\tau-1}^{*ij}\right)\right) \to \max_{\Phi_\tau^{pj},\, \rho_\tau^{pj},\, \mathbf{y}_\tau^{pj} \in Y},$$

$$\Phi_t^{pi} = \Phi_{t-1}^{pi} + \mathbf{p}_t^* \mathbf{y}_t^{pi} - \sum_{j=1}^{P} B_t^{*ij} + (1+\rho_t^{pj}) \sum_{i=1}^{H} B_{t-1}^{*ij}, \quad \Phi_T^{pj} \geq 0.$$

В равновесии должны быть выполнены баланс продуктов $\sum_{j=1}^{P} \hat{\mathbf{y}}_t^{pj} \geq \sum_{i=1}^{H} \hat{\mathbf{c}}_t^{hj}$, баланс векселей $\sum_{i=1}^{H} \hat{\Phi}_t^{hi} = \sum_{j=1}^{P} \hat{\Phi}_t^{pj}$ и правила передачи информации о доходности и объемах фондов $B_t^{*ij} = \hat{B}_t^{hij}$, $\rho_t^{*j} = \hat{\rho}_t^{pj}$.

Заметим, что в случае с B-моделью распределение выплат производителя между потребителями определяется автоматически как решение их задач.

5. ОБЩАЯ СХЕМА ДЕКОМПОЗИЦИИ ФИНАНСОВЫМИ ПОТОКАМИ

P-модель и B-модель – это два крайних варианта разделения управлений финансовыми потоками между потребителем-собственником и производителем-фирмой. В случае P-модели управление осуществляется производителем-фирмой и используются переменные типа “поток”, в случае B-модели управление осуществляется потребителем-собственником и используется переменная типа “запас”. Поскольку переменные других типов нам неизвестны, мы можем записать общую схему описания механизмов управления. Для этого используем следующую конструкцию:

$$\begin{gathered}\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t^* \mathbf{p}_t^* (\mathbf{y}_t^p - \mathbf{c}_t^p) + \sum_{t=1}^{T} (\odot \pi_t - \odot \pi_t) + \omega^p(\lambda_\tau^* \otimes) + \\ + \sum_{t=1}^{T} (\odot B_t - \odot B_{t-1}) - \odot B_T - \sum_{t=1}^{T} (\odot B_t - \odot B_{t-1}) + \odot B_T + \\ + \sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* \Phi_t - \nu_t^* \Phi_{t-1}) - \mu^* \Phi_T - \sum_{t=1}^{T} (\lambda_t^* \Phi_t - \nu_t^* \Phi_{t-1}) + \mu^* \Phi_T \to \max_{\Phi_\tau,\, B_\tau,\, \pi_\tau,\, \mathbf{c}_\tau^h,\, \mathbf{y}_\tau^p \in Y},\end{gathered} \tag{24}$$

где $\odot$ и $\otimes$ – поля, подлежащие заполнению.

Для описания механизма взаимодействия необходимо выполнить следующие действия.

1. Ввести соотношение для двойственной переменной v_t. В зависимости от этого в модели может быть получен, как минимум, один из следующих трех инструментов: деньги, векселя или кредиты.

2. Ввести соотношения для двойственных переменных, т.е. заполнить непротиворечивым образом поля, обозначенные символом $\odot$. При этом должны выполняться требования разрешимости задач агентов и эффективности полученных моделей.

3. Определить аргумент целевой функции, т.е. заполнить непротиворечивым образом поле, обозначенное символом $\otimes$.

4. Определить агента, управляющего каждой переменной. Для этого необходимо разбить функцию Лагранжа на две части и к каждой переменной дописать соответствующий индекс h, p или “*” (для переменных, используемых в качестве механизма передачи информации).

5. Дописать неснятые двойственными переменными балансовые ограничения на π_t, B_t, Φ_t и двойственные переменные, не являющиеся управлениями в задачах агентов.

В рамках данной схемы может быть записана и P-модель, которая своим частным случаем имеет динамический аналог модели Эрроу–Дебре без ресурсов, и B-модель, которая в силу специфики разделения компетенций агентов может быть интерпретирована как аналог модели Сидравского.

6. ДЕКОМПОЗИЦИЯ АКЦИОНЕРНЫМ КАПИТАЛОМ. S-МОДЕЛЬ

В качестве варианта, промежуточного между P-моделью и B-моделью из общей схемы, может быть получена модель межвременного равновесия с управлением капиталом, предложенная И.Г. Поспеловым (Поспелов, 2003) и успешно использованная при построении прикладных моделей российской и казахстанской экономики, а также модели экономики Кировской области (Поспелов и др., 2006). Однако финансовые активы, возникающие в этой модели, не имеют ясных аналогов в реальной экономике, поэтому в этом разделе мы будем использовать схему (24), которую можно трактовать как управление финансовыми потоками за счет акционерного капитала (S-модель):

$$\begin{gathered}\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*\mathbf{p}_t^*(\mathbf{y}_t^p-\mathbf{c}_t^h)+\omega^p(\lambda_\tau^*\pi_\tau^p)+\sum_{t=1}^{T}(-\lambda_t^*\pi_t^p)-\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*\theta_t^*B_t^h-\lambda_t^*(\theta_t^*+d_t^*)B_{t-1}^h)+\\+\mu_B^*B_T^h+(\lambda_t^*\theta_t^*B_t^h-\lambda_t^*\theta_t^*B_{t-1}^*)+\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*\Phi_t^h-\lambda_t^*(1+r_t^*)\Phi_{t-1}^h)-\mu^*\Phi_T^h-\qquad(25)\\-\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*\Phi_t^p-(1+r_t^*)\Phi_{t-1}^p)+\mu^*\Phi_T^p\to\max_{\Phi_{h\tau},\,\Phi_{p\tau},\,\pi_\tau,\,B_\tau,\,\mathbf{c}_\tau,\,\mathbf{y}_\tau\in Y},\end{gathered}$$

где информационные переменные θ_t^*, d_t^*, B_t^*, r_t^* определяются соответственно из условий $\hat{\mathbf{y}}_t^p\geq\hat{\mathbf{c}}_t^h$, $B_t^*=\hat{B}_t^h$, $d_t^*\hat{B}_{t-1}^h=\hat{\pi}_t^p$, $\hat{\Phi}_t^h=\hat{\Phi}_t^p$. Часть этой функции Лагранжа, имеющая отношения к потребителю, имеет вид

$$\begin{gathered}\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h)-\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*\mathbf{p}_t^*\mathbf{c}_t^h-\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*\theta_t^*B_t^h-\lambda_t^*(\theta_t^*+d_t^*)B_{t-1}^h)+\mu_B^*B_T^h+\\+\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*\Phi_t^h-(1+r_t^*)\Phi_{t-1}^h)-\mu^*\Phi_T^h\to\max_{\Phi_\tau^h,\,B_\tau^h,\,\mathbf{c}_\tau^h},\end{gathered}$$

а для производителя –

$$\begin{gathered}\omega^p(\lambda_\tau^*\pi_\tau^p)+\sum_{t=1}^{T}\lambda_t^*\mathbf{p}_t^*\mathbf{y}_t^p+\sum_{t=1}^{T}(-\lambda_t^*\pi_t^p)+\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*\theta_t^*B_t^h-\lambda_t^*\theta_t^*B_{t-1}^h)-\\-\sum_{t=1}^{T}(\lambda_t^*\Phi_t^p-(1+r_t^*)\Phi_{t-1}^p)+\mu^*\Phi_T^p\to\max_{\Phi_\tau^p,\,\pi_\tau^p,\,\mathbf{y}_\tau^p\in Y}.\end{gathered}$$

Сами же задачи могут быть сформулированы и интерпретированы следующим образом. Потребитель-собственник максимизирует полезность собственного потребления $\mathbf{c}_\tau^h$

$$\omega^h(\mathbf{c}_\tau^h) \to \max_{\Phi_\tau^h,\, B_\tau^h,\, \mathbf{c}_\tau^h}$$

за счет выбора траектории остатков кредитного счета Φ_τ^h и числа купленных акций B_τ^h, зная траекторию ставки процента r_t^*, цен $\mathbf{p}_t^*$, курса θ_t^* и нормы дивидендов d_t^* в рамках финансового баланса

$$-\Phi_t^h = -(1+r_t^*)\Phi_{t-1}^h - \mathbf{p}_t^*\mathbf{c}_t^h - \theta_t^* B_t^h + (\theta_t^* + d_t^*)B_{t-1}^h$$

при граничных условиях $\Phi_T^h \le 0$, $B_T^h \ge 0$.

Производитель-фирма максимизирует полезность потока дивидендов π_τ^p

$$\omega^p(\lambda_\tau^* \pi_\tau^p) \to \max_{\Phi_\tau^p,\, \pi_\tau^p,\, \mathbf{y}_\tau^p \in Y}$$

за счет выбора траектории остатков депозитного счета Φ_τ^p и чистых выпусков $\mathbf{y}_t^p$, зная траекторию ставки процента r_t^*, цен $\mathbf{p}_t^*$, курса θ_t^* и траекторию объема требуемых потребителем-собственником акций B_τ^*, в рамках финансового баланса

$$\Phi_t^p = (1+r_t^*)\Phi_{t-1}^p + \mathbf{p}_t^*\mathbf{y}_t^p - \pi_t^p + \theta_t^* B_t^* - \theta_t^* B_{t-1}^*$$

при граничном условии $\Phi_T^p \ge 0$.

Кроме того, в равновесии должны быть выполнены следующие соотношения: баланс продуктов $\hat{\mathbf{y}}_t^p \ge \hat{\mathbf{c}}_t^h$, баланс кредитов $\hat{\Phi}_t^h = \hat{\Phi}_t^p$, баланс дивидендов $\hat{\pi}_t^p = d_t^* \hat{B}_{t-1}^h$ и способ передачи информации о числе акций $B_t^* = \hat{B}_t^h$.

Заметим, что в схеме (25) принципиально важным является выражение $(1+r_t^*)$, стоящее перед переменными Φ_{t-1}^h, Φ_{t-1}^p, позволяющее интерпретировать их как объем кредита. Если взять исходную схему (24) и заменить в ней все поля аналогично (25), кроме переменной ν_t^*, то при варьировании функции Лагранжа задачи потребителя по B_t^h и Φ_t^h получим соотношения $\lambda_t^*\theta_t^* - \lambda_{t+1}^*(\theta_{t+1}^* + d_{t+1}^*) = 0$, $\lambda_t^* - \nu_{t+1}^* = 0$ соответственно. После разрешения этой системы имеем $\nu_{t+1}^*/\lambda_{t+1}^* = (\theta_{t+1}^* + d_{t+1}^*)/\theta_t^*$. Из этого соотношения видно, что растущая динамика курса акций θ_t^* возможна, только если числитель левой дроби больше знаменателя. Следовательно, можно записать $\nu_t^* = \lambda_t^*(1+r_t^*)$, и, как показано выше, в данном случае активы Φ_t^h, Φ_t^p трактуются как остатки на кредитных счетах.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что с помощью декомпозиции задачи благосостояния на основе некоторой общей схемы может быть получен ряд модельных описаний взаимодействия собственника и его фирмы, обеспечивающих эффективность равновесия. Часть из них известна в теории, но трудно интерпретируется в рамках современной экономики. Полученные *P*- и *B*-модели представляют случаи, близкие к модели Эрроу–Дебре и модели Сидравского, обобщенные на динамический случай в максимально простых постановках.

Другая часть моделей не была ранее использована в теории, но может быть сопоставлена с существующими экономическими механизмами. В качестве примера такого механизма рассматривается взаимодействие между собственником и его фирмой посредством акционерного капитала. Подтверждением применимости данной конструкции в прикладных моделях может служить результат моделирования динамики фондового рынка KAZE в рамках динамической модели общего равновесия экономики Республики Казахстан (Пильник, Поспелов, 2013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Андреев М.Ю., Поспелов И.Г. (2008). Принцип рациональных ожиданий: обзор концепций и примеры моделей. М.: ВЦ РАН.

Гуриев С.М., Поспелов И.Г. (1998). Неэффективные равновесия в экономике переходного периода. В кн.: "*Управление экономикой переходного периода*". М.: Наука. Вып. 2.

Макаров В.Л., Рубинов А.М. (1973). Математическая теория экономической динамики в равновесии. М.: Наука.

Пильник Н.П., Поспелов И.Г. (2013). Динамическая модель общего равновесия экономики Республики Казахстан // *Труды МФТИ*.

Поспелов И.Г. (1988). Динамическая модель рынка // *Экономика и мат. методы*. Т. 24. № 3.

Поспелов И.Г. (2003). Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов. М.: ВЦ РАН.

Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.Ю., Шипулина Г.Е. (2006). Новые принципы и методы разработки макромоделей экономики и модель современной экономики России. М.: ВЦ РАН.

Тироль Ж. (1996). Рынки и рыночная власть: Теория организации промышленности. СПб.: Экономическая школа.

Хэй Д., Моррис Д. (1999). Теория организации промышленности. СПб.: Экономическая школа.

Acemoglu D. (2007). Introduction to Modern Economic Growth. Cambridge: MIT Press.

Arrow K.J., Debreu G. (1954). Existence of a Competitive Equilibrium for a Competitive Economy // *Econometrica*. Vol. 22. No. 3.

Barro R., Sala-i-Martin X. (2004). Economic Growth. Cambridge: MIT Press.

Sotskov A.I. (2003). Time-Consistent Government Policies in the Sidrausky's Model. Working paper # 2003/034. M.: New Economic School.

Поступила в редакцию
17.03.2013 г.

Models of the Mechanisms Providing the Effectiveness of the General Equilibrium

N.P. Pilnik, I.G. Pospelov

The article is an attempt to clarify the way of firm's behavior description and its relations with the owners in the general equilibrium models with the help of welfare problem decomposition. The general scheme of decomposition is suggested. The scheme generates a range of mechanisms, including the mechanism of share capital, which allows to describe stock market in the general equilibrium models.

Keywords: general economic equilibrium, welfare problem decomposition, share capital.
JEL Classification: D50.