
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ЗАМКНУТОГО ОДНОТОВАРНОГО РЫНКА*

© 2014 г. М.М. Вороновицкий

(Москва)

В работе сформулирована агент-ориентированная модель замкнутого рынка, т.е. рынка, на котором в каждый момент времени имеется одно и то же количество товара и одно и то же количество денег. Участники этого рынка в каждый момент времени могут быть продавцами или покупателями товара или не участвовать в торговле. Однако в следующий момент покупатель может превратиться в продавца или перестать участвовать в торговле (аналогичная ситуация возможна как для продавца, так и для того, кто в данный момент не вовлечен в торговлю). Используя только собственную информацию о результатах торговли в предыдущий момент времени, участники торговли меняют свой статус и назначают новые цены. Математическая модель такого рынка была реализована в виде компьютерной программы, с помощью которой исследованы основные свойства рассматриваемой модели замкнутого рынка.

Ключевые слова: математическая модель, замкнутый рынок, однотоварный рынок, динамика цен, траектория.

Классификация JEL: C51, D01.

1. ВВЕДЕНИЕ

Торговля активами на бирже является примером рынка, каждый участник которого в разные моменты времени может быть или покупателем, или продавцом, или не участвовать в торговле. Цены на активы на этом рынке зависят от спроса и предложения на них. Процесс купли-продажи регламентируется некоторыми правилами и нормами, а решения, принимаемые участниками, определяют несколько логически связанных обменов, направленных на извлечение прибыли за счет разницы в ценах на активы на этом рынке в разные моменты времени. Огромное значение рынков активов в функционировании экономической системы является причиной большого интереса к ним со стороны науки.

Первой из немногих работ, в которых поведение автономных участников рынка активов моделируется развивающимся во времени случайным процессом, была статья Ричарда Тополя (Topol, 1991). Автор формально представляет финансовый рынок как торговлю единственным активом, поэтому в модели рассматриваются не полностью не зависимые друг от друга торговцы или представительные агенты, а индивидуальные инвесторы (продавцы или покупатели), введенные в рынок, где может существовать коллективное мнение.

Математический вопрос состоит в том, чтобы описать наблюдаемые биржевые цены посредством ненаблюдаемого микроэкономического процесса, отражающего динамику индивидуального поведения, т.е. процесса установления предлагаемых и запрашиваемых цен, которые являются переменными модели. Предполагается, что каждый участник рынка в разные моменты времени может быть или продавцом, или покупателем. Согласно предположению Р. Тополя, в сознании каждого участника есть цена, ниже которой он не согласен продать имеющиеся у него активы, и есть цена, выше которой он не согласен заплатить за единицу актива при покупке. Кроме того, он знает цену, определенную на основе своего информационного множества, и “агент-эффективную цену”, обусловленную фундаментальной ценностью (fundamental value). Эти цены

* Работа выполнена в Институте проблем рынка РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-06-00500).

различны для разных агентов, а для одного агента они отличаются и в разные моменты времени, и являются переменными динамической модели. Набор их значений в последовательные моменты времени – траектория модели. Рыночные цены получаются при предположении, что в данный момент времени встречаются два агента, торгуются и, если они одновременно согласны на какую-то цену, между ними происходит обмен. Формальные правила корректировки своих цен агентом при использовании цен, предлагаемых другими агентами, и результаты сделок составляют правила перехода от состояния в данный момент времени к состоянию в следующий момент времени. Вследствие неопределенности выбора участников и благодаря случайному характеру их встреч и торговли между ними поведение участников биржевых торгов моделируется случайным процессом. Вместо начального состояния модели присутствует начальное распределение вероятностей каждого из возможных состояний. По этой же причине в качестве траектории системы мы имеем в каждый момент времени распределение вероятностей на множестве возможных состояний системы. Чтобы исследовать эту модель, Р. Тополь использует довольно непростой математический аппарат: теорию случайных процессов (Пуассоновских) и уравнения Фокер–Планка. Анализ модели показывает, что некоторое распределение вероятностей, при котором стадное поведение (подражание, увлечение) оказывается наиболее вероятным и стационарным для случайного процесса, представляющего динамику этой модели.

Существенно в работе Р. Тополя то, что он исследовал повышенную изменчивость цен на достаточно коротких промежутках времени, когда внешние условия почти не меняются (это выражается в малых изменениях фундаментальной цены), но при этом наблюдается значительное изменение цен на бирже, что он объясняет влиянием коллективного поведения участников, точнее – их стадным поведением (когда участники при выборе решения руководствуются не собственной информацией, а выбором, который сделали другие), “увлечением” или “заражением”. Главная цель работы Р. Тополя состояла в том, чтобы показать возможность стадного поведения на бирже, т.е. поведения, когда выбор участников определяется не собственной информацией, а известной каждому участнику информацией о поведении других участников.

Работы (Bikhandany, Hirsheifer, Welch, 1992; Banerjee, 1992) были посвящены объяснению, согласно теории информационных каскадов, стадного поведения при последовательном принятии решения участниками, расположенными в линейном порядке (BHW-модель). Эта теория оказала большое влияние на исследование поведения участников финансового рынка. В то время как в работе Р. Тополя рассматривалось взаимодействие участника рынка с несколькими другими участниками, с которыми он сталкивается в процессе торговли, теория информационных каскадов предполагает его взаимодействие с участником, принявшим решение до него, и влияние его выбора только на участника, принимающего решение после него. Поэтому в определенном смысле непосредственное приложение теории информационных каскадов к объяснению стадного поведения на финансовых рынках может показаться шагом назад. Попытки применить эту модель к изучению финансового рынка проводились, например, в работе (Avery, Zemsky, 1998), в которой сформулированная и исследованная модель поведения участников финансового рынка сохраняет основные черты BHW-модели при добавлении к ней ценового механизма. В этой модели участники рынка взаимодействуют поочередно с так называемым рыночным оператором, регулирующим цены. Главное предположение авторов относительно участников рынка состоит в том, что выбор участников является рациональным, поэтому характер поведения рынка в целом определяется степенью полноты и определенности информации, поступающей к его участникам (в BHW-модели это сигнал, получаемый участником). В моделях биржи М. Киприани и А. Гуарино (Cipriani, Guarino, 2001; Cipriani, Guarino, 2006) также используются разновидности модели последовательного принятия решения.

Кроме того, в последние годы широко распространяются попытки применять для анализа и объяснения стадного поведения на фондовом рынке методы теоретической физики (см., например, (Cai, Zhou, Yang et al., 2006; Kim K., Yoon, Kim K.Y., 2004), в которых предприняты попытки объяснить некоторые свойства динамики биржевых цен).

Современное развитие вычислительной техники позволяет рассматривать как наиболее перспективный подход к формулировке и исследованию математических моделей коллективного поведения агент-ориентированные модели (АОМ). Такой подход описан в работах В.Л. Макарова, А.Р. Бахтизина и А. Кирмана (Макаров, 2012; Бахтизин, 2008; Kirman, 2011).

Этот метод моделирования динамики системы основывается на формальном описании алгоритма выбора решения отдельным агентом. АОМ – компьютерное моделирование системы как коллектива автономных взаимодействующих существ. Идея состоит в определении природы участвующих агентов (т.е. правил поведения и взаимодействия), а затем – в реализации компьютерной модели динамики всей системы и проведении необходимых экспериментов с моделью. Компьютерное моделирование обучения показывает, как индивид, применяя простые правила принятия решения, выбирает из них те, которые работают лучше всего. Используя этот подход, экспериментатор видит то, каким будет результат взаимодействий между агентами.

Вероятно, первая значительная агент-ориентированная модель биржи была представлена и исследована в работе Б. ЛеБарона, Б. Артура и Р. Палмера (LeBaron et al., 1999). Это так называемая модель искусственной биржи Санта Фе (Santa Fe Artificial Stock Market).

Компьютерная модель демонстрировала динамику рынка, включая его эволюцию, основанную на процессе обучения участников. Рассматривался рынок с фиксированным числом участников и двумя активами: 1) рискованным, для которого дивиденд определяется некоторым случайным процессом; 2) свободным от риска с постоянной нормой роста актива. Участник рынка в каждый момент принимает решение о продаже или покупке каждого актива, исходя из желания повысить свою полезность, которая характеризуется отвращением к риску. Рыночный оператор назначает цену, уравнивая спрос и предложение. При принятии решения каждый участник учитывает имеющееся у него количество активов и свой прогноз цен, которые будут на рынке в следующий момент. Прогноз участника возникает как результат применения некоторого набора правил в соответствии с имеющейся у каждого участника информацией о прошлом и прогноза на следующий момент. В результате сравнения прогноза с реализовавшимся в следующий момент состоянием этот набор правил корректируется, т.е. происходит как бы обучение участников рынка. Авторы (LeBaron et al., 1999) исследовали свойства реализованной компьютерной модели, в частности установление равновесия на рынке при различных начальных состояниях, и процесс обучения агентов. Процесс эволюции модели изучался при различных правилах прогноза и выбора действий участниками и при разных параметрах модели. Также рассматривалась различная динамика набора правил прогноза, состоящая в исключении одних правил и формировании других в процессе движения по траектории модели. Получаемые в ходе экспериментов временные ряды иногда демонстрировали хорошее соответствие временным рядам для реальных бирж.

В дальнейшем рассматривались различные приложения и модификации этой агент-ориентированной модели фондовой биржи к объяснению динамики различных эмпирических характеристик поведения биржи (см., например, (Chen, Liao, 2005; Yu, Li, 2008; Cui et al., 2012)). Но попытки полностью отразить в моделях все характеристики и механизмы фондовой биржи, наряду с желанием сразу использовать эти агент-ориентированные модели в практических целях, привели к необычайной сложности и необозримости этих моделей. Несомненно, в этом направлении будут предприниматься новые шаги и строиться новые агент-ориентированные модели фондовой биржи с теми или иными усовершенствованиями и корректировками.

Нас интересует иной подход к этой проблеме, а именно: вычленение отдельных механизмов фондовой биржи и исследование простых моделей этих механизмов. Это рассматривается нами как первый шаг в построении агент-ориентированных моделей, подобных тем, которые исследовались как Б. ЛеБароном, Б. Артуром и Р. Палмером, так и последующими авторами.

Значительное продвижение в математическом описании и исследовании коллективного поведения в биологии, в частности в области управления движениями, было достигнуто в 1950–1960-е годы И.М. Гельфандом, М.Л. Цетлиным и их сотрудниками (Цетлин, 1969). В рамках этих исследований изучались модели коллективного поведения автоматов, причем для математического анализа моделей использовался аппарат цепей Маркова и понятия теории игр нескольких лиц.

Идеи и подходы этих исследований играли основную роль в формулировке и исследовании динамики незамкнутого однотоварного рынка, где рынок представлен как система взаимодействующих автоматов, причем действие каждого определяется небольшим количеством инфор-

мации о результатах его действия в предшествующий момент времени (Вороновицкий, 1974). Рынок является незамкнутым, поскольку предполагается, что в равновесии через него в каждый момент времени проходит единица денег (в одном направлении) и единица товара (в противоположном). На протяжении рассматриваемого времени каждый участник может быть либо продавцом, либо покупателем. Цены, запрашиваемые продавцами, или цены, предлагаемые покупателями, так же, как и запасы товара или денег в каждый момент времени, рассматриваются в качестве переменных модели. Обмены происходят в результате договоренности между каждой парой встретившихся продавцов и покупателей. Доказана глобальная устойчивость траектории рынка, т.е. исследованная модель рынка при любом начальном состоянии за конечное время приходит в окрестность стационарного состояния системы, характеризующееся равновесием спроса и предложения на рынке. При этом состояние системы, близкое к равновесному состоянию, достигается посредством взаимодействий участников так, что каждый участник в каждый момент времени использует весьма малую (собственную) часть информации о состоянии всей системы.

В предлагаемой работе изучается замкнутый однотоварный рынок, в который не поступают ни товар, ни деньги, и в течение рассматриваемого времени внутри него обращается неизменное количество товара и неизменное количество денег. Состояние отдельного участника в данный момент времени, как и в модели незамкнутого рынка, характеризуется количествами имеющегося у него товара и денег, а также его ценой. В отличие от модели незамкнутого рынка каждый участник в данный момент времени имеет определенный статус, т.е. может быть либо продавцом, либо покупателем, либо не участвовать в рыночной торговле, ожидая более выгодной для него ситуации. При этом цена означает разное для покупателя и продавца: для продавца – это цена, дешевле которой он не согласен продать товар (нижняя цена), для покупателя – дороже которой он не согласен платить за товар (верхняя цена). Каждый момент времени состоит как бы из двух тактов.

В первый такт происходит обмен между продавцами и покупателями: покупатель с наиболее высокой предлагаемой ценой обменивается товаром с продавцом, запрашивающим самую низкую цену. При этом обмену подлежит весь имеющийся у продавца товар и для оплаты каждой сделки предназначены все имеющиеся у покупателя деньги. Если после этого обмена у покупателя еще остаются деньги, он обращается для обмена к продавцу со следующей (большей) по величине, но не большей цены, которую он согласен заплатить. Если же у продавца еще остался товар, то он обращается для обмена к покупателю со следующей (меньшей) по величине, но не меньшей, чем запрашиваемая, ценой. Поскольку для обмена всегда предлагается весь имеющийся у продавца товар и все имеющиеся у покупателя деньги, других вариантов нет. Обмен заканчивается в двух случаях: 1) когда уже нет предлагаемой цены выше запрашиваемой, 2) когда у потенциальных продавцов продан весь товар или у потенциальных покупателей истрачены все деньги. Все происходящие сделки регистрируются, и в результате всем участникам сообщается средняя (по всем произошедшим сделкам) цена сделки за предшествующий момент. На основе средней цены сделки за два предшествующих момента все участники строят прогноз средней цены в предстоящий момент. Для простоты предполагается, что прогноз один и тот же для всех участников и имеет простейшую линейную форму. На этом завершается первый такт данного момента времени.

На следующем такте данного момента времени участники, исходя из результатов предшествующего обмена и из прогноза средней по всему рынку цены обмена, изменяют свои статусы и в зависимости от их нового статуса назначают свои цены. При этом участник, находящийся в этот момент в статусе ожидания, переходит в другое состояние или остается в прежнем, исходя из прогноза средней цены обмена в данный момент и цены последнего обмена, в котором он участвовал. Затем начинается первый такт следующего момента времени.

В такой модели участник обладает (и использует) только частью информации о системе. Например, продавец знает только цены покупателей, количества товара и денег, имеющиеся лично у него, и среднюю цену последней сделки. Аналогично, покупателю известны только цены продавцов, количества товара и денег, имеющиеся лично у него, и средняя цена обменов, произошедших на рынке на первом такте. Агент, не участвующий в данный момент в сделках (ожидающий), на втором такте этого момента времени может стать продавцом, покупателем или остаться

ожидающим и, соответственно, установить свою цену, используя для принятия этого решения прогноз средней цены сделки на рынке и цену своей последней сделки.

Таким образом, мы рассматриваем модель замкнутого рынка в качестве модели коллективного поведения, т.е. модель, в основе которой лежит модель поведения участника (агента), и формализованные простые механизмы взаимодействия участников. При принятии решений участники используют только часть информации о состоянии системы в данный момент времени: среднюю цену на рынке в предшествующий момент и часть своей собственной информации. Предполагается нулевая память у автоматов, с помощью которых моделируется поведение участников, поэтому на этом этапе исследования процесс обучения участников не изучается.

То, в какой степени такая модель отражает поведение участников биржи и динамику ее цен, является вопросом, на который довольно трудно дать однозначный ответ. Фондовая биржа не является замкнутым рынком, на нее все время поступает добавочный товар (активы) и денежные средства, причем и те и другие постоянно изымаются из обращения на бирже. Кроме этого, на поведение участников биржи большое влияние оказывает внешняя ситуация, выраженная посредством фундаментальной ценности (*fundamental value*), и многое другое. Поэтому предлагаемая модель если и описывает (довольно приближенно) поведение участников биржи и динамику биржевых цен, то это относится к небольшим по времени периодам, например к биржевому дню. Причем такому, когда из обращения не изымаются и не добавляются значительные количества активов и денежных средств, и когда внешняя ситуация почти не меняется.

Но даже если таких биржевых дней не существует, можно надеяться, что предлагаемая модель является нулевым приближением к моделям, адекватно описывающим реальную ситуацию.

В разд. 2 приводится формальная математическая модель замкнутого рынка. Рассматривается дискретное время $t = 0, 1, \dots$. Так же как и в модели биржи ЛеБарона–Артура–Палмера (*Santa Fe Artificial Stock Market*), в нашей модели при выборе в момент t своего статуса и своей цены участник использует прогноз средней цены сделок в следующий момент времени. Но из соображений упрощения модели этот прогноз предполагается самым простым – линейным прогнозом на основе средних цен сделок в моменты t и $t - 1$ и одинаковым для всех участников. Отношение участников к этому прогнозу характеризуется одинаковой для всех вероятностью доверия к прогнозу. При этих предположениях описывается логически оправданный алгоритм изменения статуса (продавец, покупатель, ожидающий) каждым участником и изменения им своей цены. При этом полагаем, что цена за один момент времени может уменьшаться или увеличиваться на фиксированную малую величину или не меняться совсем. Эта величина, а также величина, определяющая линейный прогноз и вероятность доверия, являются внешними параметрами модели.

В разд. 3 проведен анализ экспериментов с данной моделью и обсуждаются основные свойства модели, рассматривается стадное поведение участников модели и анализируются результаты компьютерных экспериментов. В заключении обсуждаются перспективы развития и совершенствования нашей модели.

Результаты данной работы получены посредством компьютерного моделирования. Высказанные в работе утверждения являются гипотезами, истинность которых подтверждается результатами большого количества численных примеров. То, что нам не удалось строго математически доказать эти утверждения, не означает, что их доказательства невозможны в дальнейшем. Предлагаемая модель является первой подобной упрощенной моделью замкнутого однотоварного рынка. Мы надеемся, что этот подход поможет понять механизмы поведения коллектива участников и динамику рынка, но при этом понимаем ограниченность наших результатов. В ходе будущих исследований, в том числе и аналитических, может оказаться, что найденные в этой работе закономерности обусловлены классом рассматривавшихся нами начальных условий, величин параметров или некоторых предположений, поэтому мы осознаем, что при последующем изучении могут быть обнаружены иные закономерности.

Автор приносит глубокую благодарность В.Л. Макарову и его сотрудникам, работы которых по агент-ориентированным моделям сыграли решающую роль в возвращении автора к попыткам исследовать однотоварный рынок, используя модели коллективного поведения автоматов.

2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим динамическую модель однотоварного замкнутого рынка с N участниками. Замкнутость рынка означает, что в каждый момент времени на рынке присутствуют единица товара и единица денег, которые распределены между его участниками. Предполагается, что в течение всего рассматриваемого периода времени количества товара и денег, обращающихся на рынке, неизменны и для определенности каждое из них равно единице. Предположим время дискретным $t = 0, 1, \dots$. Пронумеруем участников рынка (индекс $i, i = 1, \dots, N$) и будем полагать, что в каждый момент времени участник i может выполнять только одну функцию на рынке, т.е. иметь определенный статус, и поэтому одной из характеристик покупателя является величина $\alpha_i(t)$, принимающая значения $0, 1, -1$. Это означает, что в момент времени t участник может быть продавцом ($\alpha_i(t) = 1$), покупателем ($\alpha_i(t) = -1$) или не участвовать в торговле ($\alpha_i(t) = 0$). Состояние участника i в момент времени t характеризуется количеством товара $x_i(t)$ деньгами $y_i(t)$, которыми он обладает (при любом значении $\alpha_i(t)$), и ценой $v_i(t)$. В случае $\alpha_i(t)$ (продавец) $v_i(t)$ означает цену, ниже которой продавец не согласен продать имеющийся у него товар, а в случае $\alpha_i(t) = -1$ (покупатель) – цену, выше которой данный покупатель не согласен платить за товар.

Так же в момент времени t каждый участник характеризуется некоторой внутренней переменной $w_i(t)$, которая означает среднюю цену последнего по времени обмена, заключенного этим участником, возможно, между ним и несколькими другими участниками. Поэтому $\alpha_i(t)$, $x_i(t)$, $y_i(t)$, $v_i(t)$ $w_i(t)$ являются переменными состояниями участника, а их полный набор ($i = 1, \dots, N$) описывает состояние рынка в момент времени t .

Каждый момент времени предполагается состоящим из двух тактов. В течение первого такта, в соответствии со значениям $\alpha_i(t)$ и $v_i(t)$, между продавцами и покупателями происходит обмен товара и денег, причем каждый продавец предлагает к обмену весь свой товар и каждый покупатель готов истратить в процессе обмена все свои деньги. Пусть $\alpha_i(t) = 1$ только при $i = i_1, \dots, i_k$ и пусть $v_{i_1}(t) \leq v_{i_2}(t) \leq \dots \leq v_{i_k}(t)$, и также $\alpha_j(t) = -1$ только при $j = j_1, \dots, j_l$ и пусть $v_{j_1}(t) \geq \dots \geq v_{j_l}(t)$. Тогда первая сделка происходит между продавцом с номером i_1 и покупателем с номером j_1 , причем цена торговли равна $(v_{i_1}(t) + v_{j_1}(t))/2$ (предполагается некоторое равенство сил у покупателя и продавца в процессе установления цены сделки)¹. Для определенности будем считать, что у продавца i_1 после торговли остался еще товар, а у продавца j_1 не осталось денег, тогда он (продавец) будет заключать следующую сделку с продавцом j_2 (ситуация симметричная: если у продавца i_1 не осталось товара, а у продавца j_1 еще остались деньги). Сделка между продавцом i_1 и покупателем j_2 будет проходить по цене $(v_{i_1}(t) + v_{j_2}(t))/2$.

Если несколько участников (продавцов или покупателей) имеют одинаковые цены, то они участвуют в торговле как один покупатель или продавец с суммой товара или денег их всех, а выручка или купленный товар делятся между ними согласно принятому в модели правилу рационализации. В этой модели выручка (купленный товар) распределяется между продавцами (покупателями) пропорционально доле предложенного к продаже товара (имевшихся перед сделкой денег). Потом, в зависимости от результата этой сделки, заключается следующая сделка между продавцом i_1 и покупателем j_3 или между продавцом i_2 и покупателем i_2 . Конечно при каждой сделке соответствующее количество товара переходит к покупателю, а стоимость этого товара переходит к продавцу (изменяются их величины $x_i(t)$, $y_i(t)$).

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено одно из двух условий:

- 1) у продавцов больше не осталось товара или у покупателей больше не осталось денег;
- 2) цена продавца, у которого еще есть товар, больше цены покупателя, у которого еще остаются деньги.

После завершения этого этапа торговли у каждого участника рынка оказывается конкретное количество товара или денег, соответствующие моменту $t+1$, а именно: $x_1(t+1)$, $y_1(t+1)$, ..., $x_n(t+1)$, $y_n(t+1)$. При этом для тех i , для которых $\alpha_i(t) = 0$ будет $x_i(t+1) = x_i(t)$, $y_i(t+1) = y_i(t)$. После

¹ В моделях незамкнутого рынка рассматривалась цена сделки, являющаяся выпуклой функцией цен, участвующих в этой сделке продавца и покупателя. Все результаты, полученные при цене сделки $(v_{i_1}(t) + v_{j_1}(t))/2$, имели место и в случае, когда цена сделки предполагается произвольной выпуклой функцией двух цен. (Вороновицкий, 1984).

завершения первого такта момента времени t можно определить среднюю цену обмена для каждого участника обмена:

$$w_i(t) = \begin{cases} (y_i(t+1) - y_i(t))/(x_i(t) - x_i(t+1)), & \text{если } \alpha_i(t) = 1; \\ (y_i(t) - y_i(t+1))/(x_i(t+1) - x_i(t)), & \text{если } \alpha_i(t) = -1. \end{cases}$$

В случае если участник i не действовал в обмене в момент t (например, ожидал более подходящей для него ситуации или его цена не соответствовала условиям участия в обмене на первом такте момента t), то сохраняется его последняя цена обмена: $w_i(t+1) = w_i(t)$. Можно также определить общие характеристики обмена на этом такте

$$\Delta Y(t) = \sum_{j=j_1}^{j=j_l} (y_j(t) - y_j(t+1)); \quad \Delta X(t) = \sum_{i=i_1}^{i=i_k} (x_i(t) - x_i(t+1))$$

и среднюю по рынку цену обмена (конечно, в случае, когда такой обмен произошел, т.е. $\Delta X(t) > 0$): $U(t) = \Delta Y(t)/\Delta X(t)$.

Как было сказано выше, предполагается, что существует некоторый общий для рынка центр (оператор), который регистрирует все сделки, вычисляет их среднюю цену $u(t)$ и сообщает ее всем участникам рынка. Эта величина является единственной усредненной по всему рынку ценой, известной каждому участнику.

В течение второго такта каждый участник рынка на основании результатов предшествующей торговли меняет свое положение на рынке, т.е. определяет $\alpha_i(t+1)$, $i = 1, \dots, n$ и устанавливает новые цены $v_i(t+1)$, $i = 1, \dots, n$. Для этого каждому участнику надо иметь хотя бы какое-то представление о состоянии системы в момент $t+1$. Самая необходимая часть данного представления – это предположение о том, какими будут цены других участников (впрочем, участники не могут точно их знать, а могут иметь лишь общее предположение о будущем уровне цен). Для простоты будем предполагать, что все участники используют одинаковый прогноз средней цены на рынке в следующий момент времени.

На первом этапе исследований мы полагаем этот прогноз линейным $u(t+1) = U(t) + g(U(t) - U(t-1))$, где g – некоторая константа. Так как прогноз средней цены $u(t+1)$ – одинаковая величина для всех участников рынка, то агент i выбирает значения своих переменных ($\alpha_i(t+1)$, $v_i(t+1)$) на основе простого сравнения $u(t+1)$ со средней ценой своей последней сделки $w_i(t)$.

При этом будем считать, что с общей для всех участников вероятностью q каждый участник доверяет этому прогнозу и с вероятностью $1 - q$ не доверяет. Поскольку действия участника при полном доверии к прогнозу логически обоснованы, возможна интерпретация вероятности q как вероятности выбора рационального решения участником рынка.

На втором такте момента времени t каждый участник, исходя из собственной информации, а также из прогноза и доверия к прогнозу, устанавливает величины $\alpha_i(t+1)$, $v_i(t+1)$ следующим образом (простейшим из логически оправданных способов).

Участник i сравнивает цену своей последней сделки $w_i(t)$ ($w_i(t) = v_i(t - \tau)$, $\tau = 0, 1, \dots$, где $t - \tau$ – последний момент, когда агент i участвовал в ненулевом обмене, с $u(t+1)$ – прогнозом средней цены обмена в момент $t+1$. Если прогнозная цена $u(t+1)$ больше $w_i(t)$ – цены сделки, то в момент $t+1$ участнику рынка выгодно продавать. В противном случае (для удобства включим в него равенство) этому агенту в момент $t+1$ выгодно покупать. Но при этом выбор участника зависит от его доверия к прогнозу, поэтому с вероятностью q ему выгодно продавать при $u(t+1) > w_i(t)$, а с вероятностью $(1 - q)$ – выгодно покупать. Аналогично, при $u(t+1) \leq w_i(t)$ с вероятностью q ему выгодно покупать, а с вероятностью $(1 - q)$ – продавать.

Следует заметить, что если в момент времени t продавец продал весь товар, то в момент $t+1$ он не может оставаться продавцом, а может быть либо покупателем, либо ожидающим. Точно так же, если в момент времени t покупатель истратил все свои деньги, то в следующий момент он не может оставаться покупателем, а может стать либо продавцом, либо ожидающим.

Для удобства положим $p_i(t) = q$, если $u(t+1) > w_i(t)$ и $p_i(t) = 1 - q$, если $u(t+1) \leq w_i(t)$. В первом случае $p_i(t)$ – вероятность того, что участник доверяет прогнозу, во втором – не доверяет. Выбор агента i определится результатом торговли.

Если продавец ($\alpha_i(t) = 1$) в момент t продал весь свой товар ($x_i(t+1) = 0$), то в момент $t+1$ он с вероятностью $p_i(t)$ станет ожидающим ($\alpha_i(t+1) = 0$) и с вероятностью $1 - p_i(t)$ – покупателем ($\alpha_i(t+1) = -1$). Если продавец ($\alpha_i(t) = 1$) в момент t продал только часть своего товара или ничего не продал ($x_i(t+1) > 0$), то в момент $t+1$ он с вероятностью $p_i(t)$ останется продавцом ($\alpha_i(t+1) = 1$) и с вероятностью $1 - p_i(t)$ станет ожидающим ($\alpha_i(t+1) = 0$).

Если покупатель ($\alpha_i(t) = -1$) в момент t истратил все свои деньги ($y_i(t+1) = 0$), то в момент $t+1$ он с вероятностью $1 - p_i(t)$ станет ожидающим ($\alpha_i(t+1) = 0$) и с вероятностью $p_i(t)$ – продавцом ($\alpha_i(t+1) = 1$). Если же покупатель ($\alpha_i(t) = -1$) в момент t истратил только часть своих денег или не истратил ничего ($y_i(t+1) > 0$), то в момент $t+1$ он с вероятностью $p_i(t)$ станет ожидающим ($\alpha_i(t+1) = 0$) и с вероятностью $1 - p_i(t)$ останется покупателем ($\alpha_i(t+1) = -1$).

Если $\alpha_i(t) = 0$, т.е. участник в момент t оказался в числе ожидающих, то, как и в предыдущих случаях, играют роль количество товара и денег, которыми он обладает: $x_i(t+1)$ и $y_i(t+1)$. При $x_i(t+1) = 0$ он не может стать продавцом, а при $y_i(t+1) = 0$ – не может стать покупателем.

Таким образом, если $x_i(t+1) > 0$ и $y_i(t+1) = 0$, то с вероятностью $p_i(t)$ он становится продавцом ($\alpha_i(t+1) = 1$), а с вероятностью $1 - p_i(t)$ – остается ожидающим ($\alpha_i(t+1) = 0$), т.е. участник в момент t оказался в числе ожидающих, то, как и в предыдущих случаях, играют роль количество товара и денег, которыми он обладает, $x_i(t+1)$ и $y_i(t+1)$. При $x_i(t+1) = 0$ он не может стать продавцом, а при $y_i(t+1) = 0$ – не может стать покупателем.

Если $x_i(t+1) = 0$ и $y_i(t+1) > 0$, то с вероятностью $1 - p_i(t)$ он становится покупателем ($\alpha_i(t+1) = -1$), а с вероятностью $p_i(t)$ – остается ожидающим ($\alpha_i(t+1) = 0$).

Наконец, если $x_i(t+1) > 0$ и $y_i(t+1) > 0$, то с вероятностью $p_i(t)$ он становится продавцом ($\alpha_i(t+1) = 1$), а с вероятностью $1 - p_i(t)$ – становится покупателем ($\alpha_i(t+1) = -1$).

Так происходит определение величин $\alpha_i(t+1)$.

Принцип изменения цен $v_i(t)$ состоит в следующем. Для участника i

$$v_i(t+1) = \begin{cases} w_i(t), & \text{если } \alpha_i(t+1)\alpha_i(t) = -1 \text{ или } \alpha_i(t+1)\alpha_i(t) = 0; \\ v_i(t) - \alpha_i(t)d, & \text{если } \alpha_i(t+1)\alpha_i(t) = 1. \end{cases}$$

Смысл данных соотношений состоит в том, что при переходе из продавца в покупателя он повышает свою цену (теперь это максимальная цена, которую он согласен заплатить). Аналогично, становясь продавцом он уменьшает свою цену (теперь это минимальная цена, которую он согласен получить). Если участник остается продавцом, он, естественно, уменьшает запрашиваемую цену; если остается покупателем – увеличивает предлагаемую цену; если остается ожидающим или из ожидающего становится продавцом или покупателем, то в качестве цены он использует цену своей последней сделки $v_i(t+1) = w_i(t)$; если остается ожидающим, то не меняет свою цену.

Пусть в момент t число продавцов равно $n_1(t)$, а число покупателей – $n_2(t)$. Предыдущее описание динамики нашей системы строилось при предположениях, что $n_2(t) > 0$, $n_2(t) > 0$, и $v_{j_1}(t) \geq v_{i_1}(t)$.

Если имеет место хотя бы одно из трех условий $n_1(t) = 0$, $n_2(t) = 0$, $v_{j_1}(t) < v_{i_1}(t)$, то в момент t никаких сделок вообще происходить не может. Поэтому прогноз строится следующим образом: $u(t+1) = u(t)$. В случае $n_1(t) = 0$ все покупатели снижают свои цены $v_i(t)$ на величину d . В случае $n_2(t) = 0$ все продавцы повышают свои цены на d . Если среди ожидающих участников есть такие, для которых $x_i(t+1) > 0$, то с вероятностью, близкой к единице, наступит момент $t_2 > t$, когда будет $n_1(t_2) > 0$. В противном случае (для всех i , у которых $\alpha_i(t) = 0$, выполняется $x_i(t+1) = 0$) мы имеем дело со стационарным состоянием. Если $n_2(t) = 0$ и среди ожидающих участников (т.е. участников для которых $\alpha_i(t) = 0$) есть такие, для которых $y_i(t+1) = 0$, то с вероятностью, близкой к единице, наступит момент $t_3 > t$, когда будет $n_2(t_3) > 0$. В противном случае (для i , у которых $\alpha_i(t) = 0$, выполняется $y_i(t) = 0$) мы имеем дело со стационарным состоянием. Таким образом, мы полностью описали динамику замкнутого однотоварного рынка.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Сформулированная выше модель однотоварного замкнутого рынка исследовалась с помощью компьютерных экспериментов. В модели число участников играет определенную роль. При малом числе участников (до 50) и почти при любых значениях q система попадает в стационарные состояния, и ее развитие имеет экзотический характер, по нашему мнению, – алогичный. Поэтому в экспериментах рассматривался рынок, для которого число участников равнялось 300 и 400, большая часть компьютерных экспериментов проводилась при $N = 300$.

Состояние нашей системы в момент времени t описывается посредством $5N$ переменных: $x_1(t), \dots, x_N(t), y_1(t), \dots, y_N(t), v_1(t), \dots, v_N(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_N(t), w_1(t), \dots, w_N(t)$, – т.е. каждого участника определяет количество товара $x_i(t)$ и денег $y_i(t)$, цена $v_i(t)$, назначаемая им за товар, статус $\alpha_i(t)$ (продавец/покупатель/ожидающий) и средняя цена его последней (по времени) сделки $w_i(t)$.

При этом переменные $x_i(t)$ и $y_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) связаны равенствами $\sum_{i=1}^N x_i(t) = 1$ и $\sum_{i=1}^N y_i(t) = 1$.

Таким образом, траектория системы целиком находится в положительном октанте $5N$ -мерного пространства на части подпространства, отвечающего этим равенствам. При этом переменные $v_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) кратны d , а $\alpha_i(t)$ равны $\{1, -1, 0\}$. Область, в которой может находиться точка траектории системы, будем называть допустимой областью.

Начальное состояние системы $x_1(0), \dots, x_N(0), y_1(0), \dots, y_N(0), v_1(0), \dots, v_N(0), \alpha_1(0), \dots, \alpha_N(0), w_1(0), \dots, w_N(0)$, выбиралось случайно, при равной вероятности всех наборов значений

$x_i(0), \dots, x_N(0)$, и $y_i(0), \dots, y_N(0)$, и при условиях $\sum_{i=1}^N x_i(0) = 1$ и $\sum_{i=1}^N y_i(0) = 1$; $v_i(0), \dots, v_N(0)$ кратны d

и каждое равномерно распределено на отрезке $[0, 2]$, каждое $w_1(0), \dots, w_N(0)$, равномерно распределено на отрезке $[0, 2]$; $\alpha_i(0)$, равные $\{1, -1, 0\}$ с вероятностью $1/3$. При $t > 0$ состояние системы последовательно рассчитывалось согласно процедуре, описанной в разд. 2. Вычислялись усредненные характеристики состояния системы. Цены характеризовались средней ценой сделки в момент времени t , т.е. $u(t)$ и описанными ниже параметрами набора цен в этот момент.

Наконец распределение статусов участников $\alpha_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) мы будем характеризовать числом продавцов $n_1(t)$, числом покупателей $n_2(t)$ и числом ожидающих участников $n_3(t)$ в момент времени t :

$$n_1(t) = \sum_{i=1, \alpha_i(t)=1}^{i=N} 1; \quad n_2(t) = \sum_{i=1, \alpha_i(t)=-1}^{i=N} 1; \quad n_3(t) = N - n_1(t) - n_2(t).$$

Параметрами системы являются следующие величины: d – шаг изменения цен, q – вероятность доверия к прогнозу средней цены сделки, g – параметр формирования простого прогноза средней цены в момент t . Естественно, при исследовании модели посредством компьютерных экспериментов изучалась зависимость характера траектории от начального состояния системы (в момент $t = 0$) и от этих параметров. Параметр q (вероятность доверия к прогнозу средней цены сделки) играет наиболее существенную роль в динамике модели.

В компьютерных экспериментах при величинах q близких к нулю или к единице система попадала в стационарные точки или в стационарные множества (циклические траектории). Поэтому в наших экспериментах модель изучалась при значениях q на интервале $0,3 < q < 0,8$.

В проведенных расчетах траектории динамики модели разумные изменения величины шага изменения цен d почти не влияли на результат, поэтому все компьютерные эксперименты с моделью проводились при $d = 0,05$. Эксперименты показали малую зависимость результата от величины g (конечно за исключением значений g близких к нулю или много больших единицы), поэтому эксперименты проводились в основном при $g = 0,5, \dots, 0,7$.

Стоит отметить, что при $0 < q < 1$ простое равновесие, например, когда все цены равны единице, нет ожидающих участников, у продавцов в сумме имеется единица товара и у покупателей в сумме имеется единица денег (т.е. в данный момент все участвуют в торговле), не является ста-

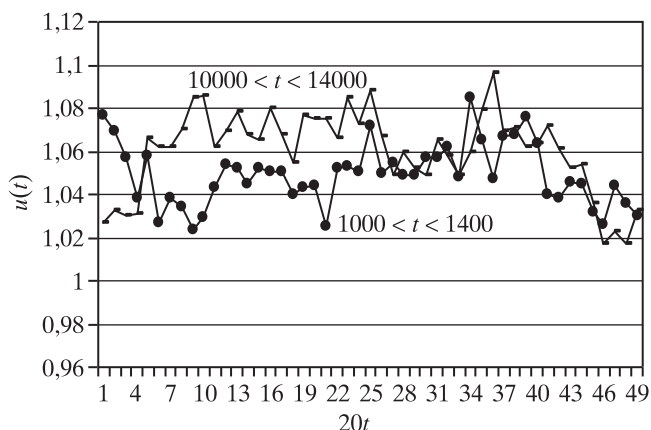


Рис. 1. Графики $U(t)$ для интервалов $1000 < t < 1400$ и $10\,000 < t < 14\,000$ при $q = 0,5$, $d = 0,05$, $g = 0,7$

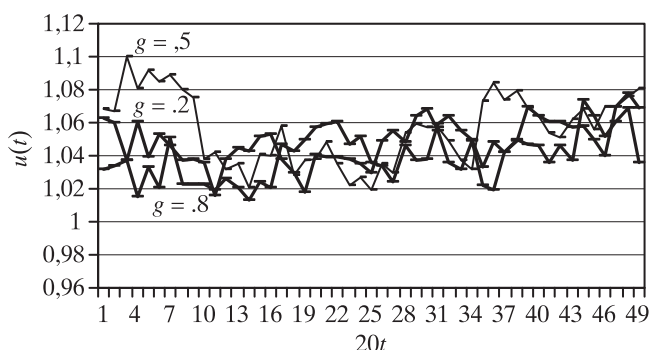


Рис. 2. Графики $U(t)$ для $t > 10\,000$ при $q = 0,5$, $d = 0,05$, $g = 0,7$ и $g = 0,2, 0,5, 0,8$

времени. Кроме того, параметры d (шаг изменения цен) и g (коэффициент прогноза) очень мало влияют на величины $\beta_1(q, d, g)$ и $\beta_2(q, d, g)$. Число участников при $N > 300$, как показывают эксперименты, мало сказывается на характере изменения и величине средней цены сделки $u(t)$.

ционарным, так как в следующий момент цены будут разными и часть участников приобретет статус ожидающих.

Самой важной усредненной характеристикой модели нам представляется величина средней цены сделки в момент t (вероятно, величина $U(t)$ – отдаленный аналог биржевой цены). Рис. 1–4 иллюстрируют динамику средней цены сделок при различных параметрах модели и начальных состояниях системы. Как показывают проведенные компьютерные эксперименты, величина $U(t)$ при данных d и g изменяется со временем так, что для t , больше некоторого τ_0 , будет $\beta_1(q, d, g) < U(t) < \beta_2(q, d, g)$ при этом величина $\beta_1(q, d, g)$ является максимумом из возможных ограничений сверху, а $\beta_2(q, d, g)$ – минимумом из всех возможных ограничений на $U(t)$ снизу, при $t > \tau_0$ (в наших экспериментах $\tau_0 > 2000$).

Траектория $U(t)$ оказалась в наших экспериментах локально устойчивой, в том смысле, что малые изменения начального состояния приводят к малым изменениям траектории даже на очень больших интервалах времени. Величины $\beta_1(q, d, g)$ и $\beta_2(q, d, g)$ при этом мало изменяются.

Рис. 1 иллюстрирует наблюдаемый во всех компьютерных экспериментах факт, что диапазон колебаний $U(t)$ при достаточно больших t почти не меняется с ростом

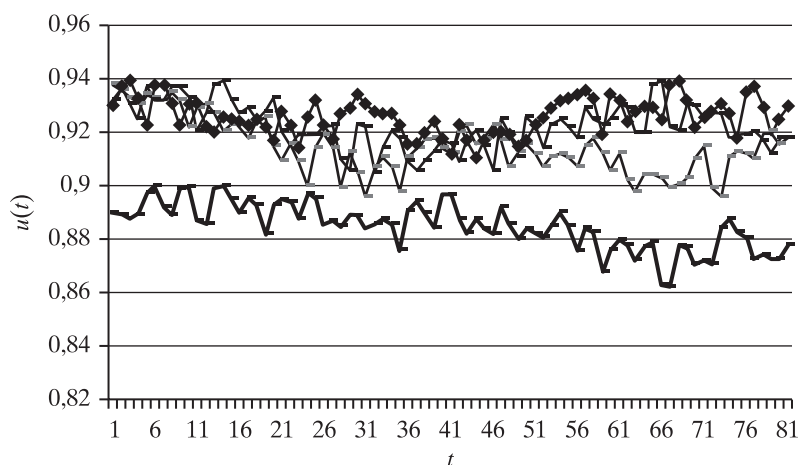


Рис. 3. Графики $U(t)$ для $3000 < t < 3080$ при $q = 0,4$, $d = 0,05$, $g = 0,7$ и различных начальных точках (нижняя кривая $U(t)$ соответствует начальному состоянию с равномерным распределением товара и денег между участниками)

Вычислительные эксперименты показывают, что при расчетах исходящих из различных начальных состояний системы при $t > \tau_0$ (в наших экспериментах $\tau_0 > 2000$) величины $\beta_1(q, d, g)$ и $\beta_2(q, d, g)$ различны.

Серии компьютерных экспериментов позволяют предполагать, что разница между графиками $U(t)$ при изменении начального состояния не меньше, чем разница между соответствующими кривыми при серьезном изменении величины вероятности доверия участника к прогнозу средней цены. Это видно при сравнении рис. 3 и 4. Правда, этот факт требует дальнейшего изучения и объяснения.

Будем условно называть величину $x_i(t)U(t) + y_i(t)$ богатством участника i в момент времени t . Очевидно, среднее значение богатства в момент t будет равно $(U(t) + 1)/N$.

Мы вычисляли величину отношения среднего квадратичного отклонения богатства участников от среднего к величине богатства в момент t :

$$S(t) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \left(x_i(t)U(t) + y_i(t) - \frac{1 + U(t)}{N} \right)^2 \right)^{1/2} / (U(t) + 1)$$

и число n_0 – участников, для которых $x_i(t)U(t) + y_i(t) < (U(t) + 1)/N$, при $d = 0,05$, $g = 0,6$ и различных значениях q и для значений t от 1 до 15 000 при одних и тех же начальных состояниях системы. Исследовались значения от $q = 0,4$, $q = 0,8$. В рассмотренных случаях после определенного значения t_0 (своего для каждого q) величины $S(t)$ изменялись с ходом времени крайне мало и для $t > 3000$ стабилизировались. То же самое происходило с числом бедных участников n_0 (участники, обладающие богатством меньше среднего). В табл. 1 приведены результаты проведенных компьютерных экспериментов.

Стоит заметить, что для значений $q < 0,4$ и $q > 0,9$ величины $S(t)$ и $n_0(t)$ постоянно возрастали. с ростом t при $t < 3000$.

Обозначим

$$\rho(t) = \max_{\alpha_i(t)=-1} (v_i(t)) - \min_{\alpha_i(t)=1} (v_i(t)); \quad \sigma(t) = \min_{\alpha_i(t)=-1} (v_i(t)) - \max_{\alpha_i(t)=1} (v_i(t)).$$

Величину $\rho(t)$ будем называть шириной спектра цен, а величину $\sigma(t)$ – расхождением спектра цен.

В работах, относящихся к модели незамкнутого рынка (Вороновицкий, 1974), некоторые свойства динамики величин $\rho(t)$ и $\sigma(t)$ были получены аналитически. Было доказано следующее утверждение.

Таблица 1. Отношение среднего квадратичного отклонения богатства участников от среднего значения богатства к среднему значению богатства $S(t)$

	$d=0,05, g=0,6, t > 3000$					
q	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
S	0,0018	0,0017	0,0017	0,0026	0,0031	0,0033
n_0	43	35	30	52	70	75

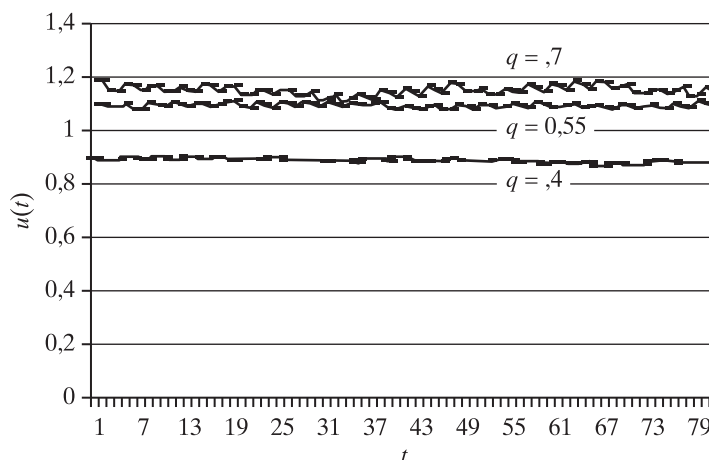


Рис. 4. Графики $U(t)$ при разных значениях q ($q = 0,4, 0,55, 0,7$) при $d = 0,05$, $g = 0,7$ и одинаковом начальном состоянии системы

Таблица 2. Максимальные и минимальные значения ширины $\rho(t)$ и расхождения $(\sigma(t))$ спектра цен при различных для $t > 3000$ при различных значениях вероятности доверия (q) и при $d = 0,05$, $g = 0,6$

q	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75
$\max \rho(t)$	$3,2d$	$6d$	$6,8d$	$5,8d$	$6d$	$2,8d$
$\min \rho(t)$	d	d	d	D	D	$1,4d$
$\max \sigma(t)$	$0,8d$	$1,2d$	d	$1,2d$	$1,2d$	$1,2d$
$\min \sigma(t)$	0	0	0	0	0	$-0,2d$

Утверждение. При любом начальном состоянии модели $x_1(0), \dots, x_n(0)$, $y_1(0), \dots, y_i(0)$, $v_1(0), \dots, v_n(0)$, $\alpha_1(0), \dots, \alpha_n(0)$ существует τ такое, что для всех $t > \tau$ будет $0 \leq \sigma(t) \leq \rho(t) < 2d$.

Не исключено, что аналитическое доказательство можно получить и в случае нашей модели замкнутого рынка, но на начальном этапе работы мы ограничиваемся исследованием посредством компьютерных экспериментов, которые подтверждают следующее предположение (табл. 2).

Предположение. При $0,3 < q < 0,9$ и любом начальном состоянии модели $x_1(0), \dots, x_n(0)$, $y_1(0), \dots, y_i(0)$, $v_1(0), \dots, v_n(0)$, $\alpha_1(0), \dots, \alpha_n(0)$ существует τ такое, что для всех $t > \tau$ будет $0 \leq \sigma(t) \leq 2d$, $0 \leq \rho(t) < 6d$.

Динамика цен финансовых активов включает такое явление, как финансовый пузырь, т.е. значительное превышение наблюдаемой биржевой цены (средней цены сделки, в нашей терминологии) над некоторой общей оценкой фундаментальной стоимости актива в течение периода, характеризующегося длительным ростом цен с дальнейшим падением. При этом динамика финансового пузыря характеризуется приходом и уходом инвесторов со спекулятивного рынка. Значительные пузыри, очевидно, обусловлены процессами, затрагивающими всю экономическую систему. Но на протяжении коротких периодов времени (например, биржевого дня), в течение которых фундаментальная ценность (fundamental value) почти не меняется, наряду с колебаниями биржевой цены часто можно наблюдать (не столь значительные) периоды ее подъема и спада.

В попытке получить такое поведение средней цены сделки в нашей модели мы рассмотрим выбор участников рынка, при котором участники используют не собственную информацию, а информацию о числе участников, принявших то или иное решение в предшествующий момент времени, – один из возможных видов стадного поведения. В качестве вероятности доверия к прогнозу цены участники будут использовать отношения числа участников, сделавших выбор, соответствующий доверию, к числу всех участников. Предполагается, что оценивается число участников, сделавших в момент времени $t - 1$, такой выбор нового статуса, какой должен быть сделан при доверии к прогнозу, равном единице. Обозначим это число m_1 , тогда $N - m_1$ участников рынка сделали выбор, соответствующий нулевому доверию к прогнозу.

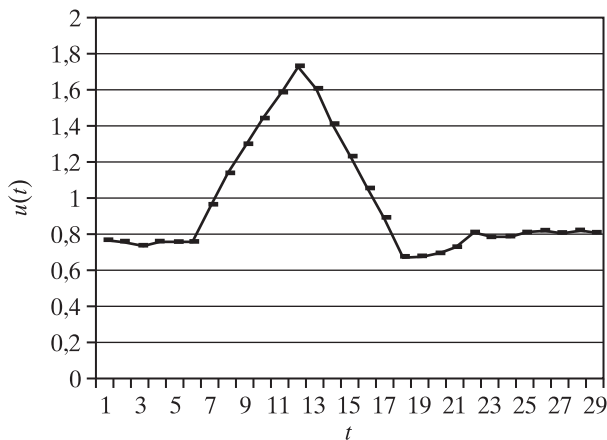


Рис. 5. Траектория $U(t)$ при $t > 3000$, $d = 0,05$, $q = 0,7$ и стадном поведении участников рынка

Будем предполагать, что в момент t вероятность доверия прогнозу $q = q(t)$ равна m_1/N и участники делают выбор статуса и цены в соответствии с процедурой, описанной в разд. 2. Такой выбор участников приближенно моделирует их стадное поведение. Конечно, при этом возможны справедливые вопросы о том, как участник собирает информацию, дающую ему представление о величине m_1 . Но на начальном этапе исследования посредством компьютерного моделирования мы получаем некоторое приближенное представление об эффекте стадного поведения.

Рис. 5 демонстрирует, что при выборе решения участниками однотоварного рынка спо-

собом, соответствующим только что описанному стадному поведению, возникают изменения средней цены сделки в момент t , значительно превышающие колебания этой величины при описанном в разд. 2 способе принятия решения, не зависящем от выбора других участников. На графиках биржевой цены за торговый день, такой, что внешние условия, важные для биржевых продавцов и покупателей, остаются неизменными, часто наблюдается динамика $U(t)$, похожая на изображенную на рис. 5. Предложенная выше модель выбора участника, связанная со стадным поведением, может служить одним из возможных объяснений этого явления.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулированная (разд. 2) и исследованная (разд. 3) агент-ориентированная модель замкнутого однотоварного рынка только в весьма общих чертах отражает свойства реальных однотоварных рынков. Причиной этого является то, что в экономической жизни такие рынки в явном виде отсутствуют, и только на коротких отрезках времени, и, крайне приближенно, фондовые биржи можно считать, как пример однотоварных замкнутых рынков. Во всяком случае, именно в качестве однотоварного рынка рассматривается биржа в упомянутых выше модели Р. Тополя и модели биржи Санта Фе. В этих моделях замкнутость рынка не упоминается и в явном виде не используется. Это можно объяснить тем, что модели, о которых идет речь, призваны максимально полно отразить черты реально действующих биржевых механизмов. В то же время построенная нами агент-ориентированная модель замкнутого однотоварного рынка исследуется как механизм взаимодействия участников лишь напоминающий механизм фондовой биржи. То же самое относится к алгоритмам индивидуального выбора, используемым в нашей модели. Во всяком случае, в модели присутствует такое описание процесса торговли, когда покупатель с наибольшей среди всех покупателей предлагаемой ценой имеет возможность купить у продавца с наименьшей из запрашиваемых цен и т.д. При этом каждый покупатель стремится купить товар дешевле, чем он продал товар, когда был продавцом, а продавец стремится продать товар дороже, чем он купил его, когда был покупателем. Наконец, возможность рыночного агента не участвовать какое-то время в торговле также напоминает реальную ситуацию биржевой торговли. Это позволяет нам надеяться понять с помощью этой модели хотя бы какие-то закономерности в механизмах взаимодействия и индивидуального выбора на бирже. Простота модели дает надежду в дальнейшем получить аналитические результаты относительно динамики модели, т.е. результаты, относящиеся не к конкретному набору параметров модели и ее конкретному начальному состоянию, а имеющие общий характер.

Посредством проведенных экспериментов установлены некоторые черты динамики модели. Показано, что средняя цена сделки в момент t с ростом времени не испытывает хаотических изменений, а колеблется возле некоторого значения, зависящего от вероятности доверия участников к общему для всех прогнозу средней цены. Показано, что с ростом времени не происходит полного разорения большей части участников и, следовательно, выбывания их из процесса торговли. Распределение средств между участниками меняется со временем, но также со временем стабилизируется число участников, обладающих небольшим количеством товара и денег, и среднее квадратичное отклонение богатства участника от своего среднего значения в данный момент времени. Правда, это имеет место не для всех значений вероятности доверия к прогнозу, а для $0,4 < q < 0,8$.

Представленная в работе агент-ориентированная модель замкнутого однотоварного рынка является одним из немногих исследований динамики рынка с использованием АОМ, и главная цель данной работы – качественно описать посредством математической модели явления, происходящие на фондовых рынках, и отражение при этом качественных соотношений между главными характеристиками биржи. В приведенных результатах, к сожалению, не дано ответов на ряд важных вопросов, поэтому представляется интересным и полезным дальнейшее изучение подобных моделей замкнутого однотоварного рынка. По нашему мнению, наиболее существенны два следующих направления.

Первое направление – аналитическое изучение данной модели, установление строгих фактов ее динамики и математических доказательств этих фактов. При этом можно надеяться выявить адекватный язык описания процесса, наилучшим и наиболее простым способом, отражающим

механизмы взаимодействия и динамику системы. Может быть, первым шагом в математическом исследовании модели, который мы намереваемся осуществить, окажется изучение ее крайне упрощенного варианта. Имеется в виду вариант модели, когда $U(t)$ – средняя цена в момент t рассматривается участниками как прогноз цены ($g = 0$, $u(t+1) = U(t)$), поведение участников полностью рационально и они полностью доверяют этому прогнозу ($q = 1$).

Второе направление – приближение описания модели к реальности, что не обязательно подразумевает усложнение модели. Но стоит иметь в виду, что платой за упрощение математического описания явились очень сильные допущения. В реальности каждый участник самостоятельно делает прогноз будущей рыночной цены, хотя и использует общую для всех информацию о предшествующих средних ценах сделок. В рассмотренной модели предполагалось, что все участники делают один и тот же прогноз (причем самый простой), и вероятность доверия к прогнозу одна и та же для всех участников. Подобная ситуация далека от реальности. Представляется возможным рассмотреть модель с большими различиями между прогнозом участников и вероятностью доверия к прогнозу, а может быть, различными в этом отношении должны быть не все участники, а лишь несколько групп участников. При этом описание механизмов взаимодействия участников торговли вряд ли следует изменять, прежде всего потому, что при простоте математического описания они довольно хорошо отражают реальную ситуацию.

В модель выбора действий участником желательно ввести учет памяти участника рынка о результатах прошлых действий, включая обучение (чего нет в предложенной модели), и, может быть, учесть в явной форме спекулятивное поведение участников замкнутого рынка – игру на понижение или на повышение.

Наконец, очень важным представляется моделирование стадного поведения участников биржи, которое, по нашему мнению, является причиной как больших и длительных, так небольших по величине и по времени колебаний биржевых цен.

В данной работе приводится простой пример стадного поведения участников замкнутого однотоварного рынка, который подтверждает возникновение при таком поведении небольших по величине и по времени колебаний средних цен сделки. Но это всего лишь пример с очень простым и не слишком реалистичным механизмом стадного поведения участников. Необходимо детальное изучение этого явления, основанное на результатах теории стадного поведения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бахтизин А.Р.** (2008). Агент-ориентированные модели экономики. М.: Экономика.
- Вороновицкий М.М.** (1974). Об одной модели обмена // *Автоматика и телемеханика*. № 8.
- Вороновицкий М.М.** (1984). О сходимости спектра цен для одного класса моделей обмена. В сб.: “Моделирование взаимосвязи цен и экономического поведения”. М.: ЦЭМИ РАН.
- Макаров В.Л.** (2012). Искусственные общества // *Экономика и математические методы*. Т. 48. № 3.
- Цетлин М.Л.** (1969). Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Издательство “Наука”.
- Avery C., Zemsky P.** (1998). Multidimensional Uncertainty and Herd Behavior in Financial Market // *American Economic Review*. Vol. 88 (4).
- Banerjee A.V.** (1992). A simple Model of Herd Behavior // *The Quarterly Journal of Economics*. Vol. CVII. August.
- Bikhandany S., Hirsheifer D., Welch I.** (1992). A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades // *Journal of Political Economy*. Vol. 100. No. 5.
- Cai S.-M., Zhou P.-L., Yang H.-J., Yang C.-X., Wang B.-H., Zhou T.** (2006). Diffusion Entropy Analysis on the Scaling Behavior of Financial Markets. *Physica // A Statistical Mechanics and Applications*. Vol. 15.
- Chen S.-H., Liao C.-C.** (2005). Agent-Based Computational Modeling of the Stock Price –Volume Relation // *Information Science*. Vol. 170.
- Cipriani M., Guarino A.** (2001). Herd Behavior and Contagion in Financial Market. Mimeo NYU 2001.
- Cipriani M., Guarino A.** (2006). Estimation a Structural Model of Herd Behavior in Financial Market. IMF Working Paper.

- Cui B., Wang H., Ye K., Yan J.** (2012). Intelligent agent assisted adaptive order simulation system in artificial stock market” Expert system with application. Vol. 39.
- Kim K., Yoon S.-M., Kim K.Y.** (2004). Herd Behavior in the Stock and Foreign Exchange Markets. *Physica // A Statistical Mechanics and Applications*. Vol. 341.
- Kirman A.** (2011). Learning in Agent-based Models // *Eastern Economic Journal*. Palgrave Macmillan. Vol. 37 (1).
- LeBaron B., Arthur W.B., Palmer R.** (1999). Time Series Properties of an Artificial Stock Market Model // *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 23.
- Topol R.** (1991). Bubbles and Volatility of Stock Prices; Effect of Mimetic Contagion // *The Economic Journal*. Vol. 101.
- Yu T., Li H.** (2008). Dynamic Regime of a Multi agent Stock Market model. Munich personal RePEc Archive Nov. 2008.

Поступила в редакцию
03.09.2013 г.

The Agent-Based Model of the Closed Market with One Commodity

M.M. Voronovitsky

The agent based model of the closed market (a market on which at each moment of time there is a same quantity of the goods and also the same quantity of money) is formulated. Participants of this market at each moment of time may be sellers or buyers of the commodity or not to participate in trade. Thus the following moment the buyer can become the seller or not participate in trade. The same concerns the sellers. Using only own information about the results of trade in the previous moment of time, participants of trade vary their statuses and appoint the new prices. The mathematical model of such market has been represented as the computer program. The basic properties of considered model of the closed market with one commodity was investigated with the help of the computer program.

Keywords: mathematical model, closed market, one commodity market, dynamics of prices, trajectory.

JEL Classification: C51, D01.