ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2010, том 46, № 3, с. 71–81

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МЕТОД МНОГОУГОЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ПРОЦЕДУРЕ СГЛАЖИВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

© 2010 г. Ю.Я. Агранович, Н.В. Концевая, В.Л. Хацкевич

(Воронеж)

Разработан метод одностороннего взвешенного сглаживания временных рядов на основе использования многоугольных чисел. Показана полезность приложений методов аддитивной теории чисел и исчисления конечных разностей. Метод расчета весовых коэффициентов для скользящего усреднения основан на обобщении решения одной задачи А.А. Маркова. Предлагаемые формулы находят естественное математическое обоснование в виде установления строгих предельных соотношений. Проводится сравнительный анализ результатов сглаживания, полученных различными методами одностороннего усреднения. Обосновываются преимущества модифицированного взвешенного усреднения в сравнении с другими методами.

Ключевые слова: одностороннее взвешенное сглаживание, многоугольные числа, аддитивная теория чисел, исчисления конечных разностей, строгие предельные соотношения, модифицированное взвешенное усреднение.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена одному из аспектов теории средних величин, который, по-видимому, до сих пор оставался незамеченным. Идея усреднения, представленная в форме теории пропорций, является древнейшей идеей научного мировоззрения. Наибольшее распространение получили 16 типов пропорций и соответствующих средних величин (Джини, 1970, с. 447). Они соответствуют 16 модусам логических фигур силлогистики Аристотеля. Хорошо известен также рекуррентный метод получения предельной случайной величины, предполагающий построение ряда рекуррентных средних величин и последующее определение предельных коэффициентов. По существу, в этом методе происходит интегрирование принципа актуальной бесконечности в классическую теорию пропорций.

Напомним определение линейной рекурренты (Bertin et al., 1992, p. 291): последовательность $\{u_n\}_{n \in N}$ называется линейной рекуррентной, если существует $S + 1$ рациональных чисел $q_0, \ldots, q_S$, для которых выполнены соотношения:

$$q_0 u_n + q_1 u_{n-1} + \ldots + q_s u_{n-s} = 0 \quad \forall n \geq n_0 \geq s. \tag{1}$$

Из определения (1) ясно, что если

$$q_0 = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{s} q_i = -1, \tag{2}$$

то последовательность состоит из взвешенных арифметических средних. Иными словами, справедливы соотношения

$$u_n = q'_1 u_{n-1} + \ldots + q'_s u_{n-s}, \quad \sum_{i=1}^{s} q'_i = -1, \quad \{q'_i\}_{i=1}^{s} \in Q. \tag{3}$$

В наиболее известном частном случае уравнение (3) определяет последовательность обыкновенных арифметических средних:

$$u_n = (u_{n-1} + \ldots + u_{n-s})/s. \tag{4}$$

Задача о предельном поведении последовательности (4) была рассмотрена А.А. Марковым (Марков, 1910, с. 227–230). Отметим, что соотношение (4) используется в экономической статистике для сглаживания временных рядов методом скользящего суммирования. Предельное соотношение, полученное А.А. Марковым, нашло применение в анализе финансовых показателей в ситуациях, когда важно установить большие веса для более поздних данных временного ряда.

В статье предлагается удобный инструмент исследования показателей финансовых рынков, в котором предпочтение отдается неравномерному одностороннему взвешиванию в пользу более позднего сегмента интервала сглаживания с уменьшением весов предыдущих наблюдений. В этом случае сглаженные значения смещены вправо относительно исходных, но результат получается за меньшее число итераций, что в определенной степени решает проблему потери данных в конце ряда, поскольку именно последние члены ряда представляют особый интерес для анализа финансовых показателей.

Далее мы получим некоторое обобщение результата А.А. Маркова, но предварительно остановимся более подробно на постановке задачи и полученном им результате. В (Марков, 1910, с. 227–230; Гельфонд, 2006, с. 321–324) была рассмотрена следующая задача о предельных коэффициентах усредняющей линейной рекурренты: по заданным k числам $\{f(0), f(1), \ldots, f(k-1)\}$ составляется следующая последовательность чисел:

$$f(k) = [f(0) + f(1) + \ldots + f(k-1)]/k, \tag{5}$$

$$f(k+1) = [f(1) + f(2) + \ldots + f(k)]/k, \ldots \tag{6}$$

так, что каждый член последовательности, начиная с номера k, является средним арифметическим предшествующих k членов этой последовательности. Иными словами, указанное рекуррентное соотношение определяет уравнение в конечных разностях вида

$$f(x+k) = [f(x) + f(x+1) + \ldots + f(x+k-1)]/k. \tag{7}$$

Требуется найти предел

$$f_\infty = \lim_{x\to\infty} f(x) = A_0 f(0) + A_1 f(1) + \ldots + A_{k-1} f(k-1) \tag{8}$$

с некоторыми коэффициентами A_i, т.е. предельное распределение коэффициентов при заданных начальных данных. В (Марков, 1910, с. 227–230) показано, что решением является соотношение

$$f_\infty = [1f(0) + 2f(1) + 3f(2) + \ldots + kf(k-1)]/\{0.5k(k+1)\}. \tag{9}$$

Суть предложенного в статье метода состоит в обобщении результата А.А. Маркова на случай усредняющих линейных рекуррент вида

$$f(k) = [p_1 f(0) + p_2 f(1) + \ldots + p_k f(k-1)]/[p_1 + \ldots + p_k]. \tag{10}$$

Решение соответствующего уравнения в конечных разностях будет получено далее, оно приводит к следующему предельному соотношению:

$$f_\infty = \{p_1 f(0) + (p_1 + p_2) f(1) + \ldots$$

$$\ldots + (p_1 + \ldots + p_k) f(k-1)\}/\{kp_1 + (k-1)p_2 + \ldots + 1p_k\}. \tag{11}$$

Прежде чем переходить к решению этой задачи, остановимся подробно на следствиях из соотношения (11), имеющих прикладной аспект в области экономической статистики.

Коэффициенты в числителе (6) – {1, ..., 1} – являются арифметической прогрессией с первым членом, равным единице, и разностью, равной нулю. Рассмотрим семейство арифметических прогрессий, содержащихся в натуральном ряде и начинающихся с числа 1:

$$1,1,1, \ldots \tag{12}$$

1, 2, 3, … – натуральный ряд;

1, 3, 5, … – ряд нечетных чисел, решение сравнения $x \equiv 1(mod\ 2)$;

1, 4, 7, … – решение сравнения $x \equiv 1(mod\ 3)$;

1, 5, 9, … – решение сравнения $x \equiv 1(mod\ 4)$

и т.д. Эти прогрессии равноправны в том смысле, что любая из них может быть использована в качестве весовых коэффициентов p_1, p_2, … в скользящем соотношении (10). Решая задачу Маркова для каждой последовательности, получим следующие коэффициенты в числителях (11):

$$\begin{gathered} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots, \\ 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots, \\ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, \\ 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, \ldots, \\ 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, \ldots, \\ 1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, \ldots, \\ 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, \ldots, \end{gathered} \tag{13}$$

и т.д. Из соотношения (11) и определения m-угольных чисел (см., например, (Эдвардс, 1980, с. 53–54)) следует, что в строчках (13), начиная со второй, расположены треугольные числа, четырехугольные числа, пентагональные числа и т.д. Общая формула n-го m-угольного числа следующая:

$$q_n^{(m)} = 2n - n^2 + 0.5mn(n-1). \tag{14}$$

Таким образом, предельное соотношение для скользящих средних принимает вид

$$f_\infty^{(m)} = \left(q_1^{(m)} f(0) + q_2^{(m)} f(1) + \ldots + q_k^{(m)} f(k-1)\right)/M_{m,k}, \tag{15}$$

где

$$M_{m,k} = \Sigma_{i=1}^k q_i^{(m)} = (1/6)k(k+1)[(m-2)k + 5 - m], \tag{16}$$

k-е пирамидальное число, соответствующее фиксированному m ($m \geq 2$).

Отметим, что историю и теорию многоугольных и пирамидальных чисел можно найти в книге (Бобров, 1959), принадлежащей перу замечательного статистика С.П. Боброва, автора одного из первых фундаментальных учебников по экономической статистике (1930 г.). Более глубокие свойства этих чисел исследованы П. Ферма (так называемая “золотая” теорема Ферма) и Л. Эйлером (Эйлер, 1997, с. 225). Именно появление многоугольных чисел в наших формулах усреднения послужило основным толчком для написания данной статьи.

Проблемам сглаживания временных рядов посвящена обширная литература. На русском языке это известные работы А.А. Чупрова, Е.Е. Слуцкого, Н.С. Четверикова (Четвериков, 1975, с. 319–340). В их работах реализуются различные подходы к задачам сглаживания, использующие, как правило, двустороннее симметричное взвешивание элементов ряда, приводящее к потерям данных на концах ряда. Однако, учитывая специфику анализа финансовых рынков, заключающуюся в ограниченном объеме исходной информации, связанной с объективными пропусками данных и невозможностью получения дополнительных наблюдений, и особую важность “свежих” наблюдений в анализе, к исследованию рыночных показателей применимы лишь методы одностороннего сглаживания. Традиционными здесь являются методы простой скользящей средней (Simple MA), экспоненциального сглаживания (Exponential MA), линейных весов (Linear Weighted MA) и линейной регрессии. Сравнение нашего метода с перечисленными будет приведено ниже на примере сглаживания одного из ведущих показателей международного валютного рынка. Тем не менее основные доводы в пользу предлагаемого нами метода можно изложить уже сейчас.

Заметим, что прогрессии (12) не представляют особенного интереса как средство статистической обработки временных рядов. По существу, они содержат две принципиально различные строчки: первую и вторую. Коэффициенты первой строки обеспечивают равномерное влияние всех элементов временного ряда, коэффициенты второй строки позволяют равномерно усиливать влияние элементов ряда.

Последовательности (13) содержат многоугольные числа и лишены в этом смысле указанного недостатка. Каждая строка последовательностей (13) позволяет неравномерно менять влияние элементов ряда так, что более ранние элементы имеют относительно меньшее влияние, чем более поздние, причем степень этой неравномерности регулируется целочисленным параметром m ($m \geq 2$). Таким образом, в нашей работе предложен инструмент обработки временного ряда, обладающий бесконечным репертуаром внутренних состояний.

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Перейдем к строгим доказательствам. Рассмотрим характеристический многочлен $(p^1+\ldots+p^k)\times$ $\times\lambda^k-p_k\lambda^{k-1}-\ldots-p_1$, соответствующий уравнению в конечных разностях:

$$f(x+k)=\frac{p_1f(x)+p_2f(x+1)+\ldots+p_kf(x+k-1)}{p_1+\ldots+p_k}.$$

Докажем, что справедлива следующая предварительная лемма.

Лемма. *Пусть все весовые коэффициенты положительны,* $p_i>0$*, тогда все корни характеристического полинома, за исключением* $\lambda=1$*, расположены строго внутри единичного круга.*

Доказательство. Воспользуемся тождеством

$$(p_1+\ldots+p_k)\lambda^k-p_k\lambda^{k-1}-\ldots-p_1\equiv(\lambda-1)[(p_1+\ldots+p_k)\lambda^{k-1}+$$
$$+(p_1+\ldots+p_{k-1})\lambda^{k-2}+\ldots+(p_1+\ldots+p_2)\lambda+p_1]. \tag{17}$$

Таким образом, нас интересуют корни полинома в квадратных скобках (17). Обозначим через d и D, соответственно, минимум и максимум отношений последовательных коэффициентов этого полинома:

$$d=\min\left\{\frac{p_1}{p_1+p_2},\ \frac{p_1+p_2}{p_1+p_2+p_3},\ \ldots,\frac{p_1+p_2,+\ldots+p_{k-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right\}, \tag{18}$$

$$D=\max\left\{\frac{p_1}{p_1+p_2},\ \frac{p_1+p_2}{p_1+p_2+p_3},\ \ldots,\frac{p_1+p_2,+\ldots+p_{k-1}}{p_1+p_2+\ldots+p_k}\right\}. \tag{19}$$

Тогда в силу теоремы Гурвица (Полиа, Сеге, 1978, с. 114, 208, задача 23) корни полинома расположены в кольце

$$d\le\lambda\le D. \tag{20}$$

Так как все $p_i>0$, то выполняется строгое неравенство $D<1$, и лемма доказана.

Теорема. *Пусть все весовые коэффициенты положительны,* $p_i>0$*, тогда предел рекуррентной последовательности* f_∞ *существует и выполнено соотношение*

$$f_\infty=\frac{p_1f(0)+(p_1+p_2)f(1)+\ldots+(p_1+p_2+\ldots+p_k)f(k-1)}{kp_1+(k-1)p_2+\ldots+2p_{k-1}+1p_k}. \tag{21}$$

Доказательство. Решая уравнение в конечных разностях, получим

$$f(x)=c_1+c_2\lambda_2^x+c_3\lambda_3^x+\ldots+c_l\lambda_l^x,\quad x\in\mathbb{N}, \tag{22}$$

где $\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_l$ – корни многочлена из тождества (17). В силу предыдущей леммы модули этих корней меньше единицы. Поэтому существует предел $f_\infty=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c_1$. Постоянная c_1 находится как решение системы линейных уравнений с правыми частями $f(0),\ \ldots,\ f(k-1)$ и, следовательно, является линейной комбинацией начальных данных, т.е.

$$c_1=\alpha_0f(0)+\ldots+\alpha_{k-1}f(k-1). \tag{23}$$

Для определения коэффициентов линейной комбинации $\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{k-1}$, не решая соответствующую систему уравнений, воспользуемся тем, что если рекуррентный процесс сходится, то его предел не зависит от выбора начального шага (Марков, 1910, с. 227–230), в частности:

$$c_1=\alpha_0f(1)+\ldots+\alpha_{k-1}f(k). \tag{24}$$

Из (23) и (24) с учетом рекуррентного соотношения получим:

$$\alpha_0f(0)+\ldots+\alpha_{k-1}f(k-1)=\alpha_0f(1)+\ldots+\alpha_{k-1}\ \frac{p_1f(0)+\ldots+p_kf(k-1)}{p_1+\ldots+p_k}. \tag{25}$$

Так как начальные данные произвольны, то для выполнения (25) необходимо равенство коэффициентов при одинаковых $f(i)$, $i = 0, \ldots, k-1$. Приравнивая соответствующие коэффициенты, находим:

$$\alpha_0 = \alpha_{k-1}\frac{p_1}{p_1+\ldots+p_k};$$

$$\alpha_1 = \alpha_0+\alpha_{k-1}\frac{p_2}{p_1+\ldots+p_k} = \alpha_0+\alpha_0\frac{p_2}{p_1} = \alpha_0\left(\frac{p_1+p_2}{p_1}\right);$$

$$\alpha_2 = \alpha_1+\alpha_{k-1}\frac{p_3}{p_1+\ldots+p_k} = \alpha_0\left(\frac{p_1+p_2}{p_1}\right)+\alpha_0\frac{p_3}{p_1} = \alpha_0\left(\frac{p_1+p_2+p_3}{p_1}\right).$$

Действуя аналогично, получим:

$$\alpha_3 = \alpha_0(p_1+p_2+p_3+p_4)/p_1;$$
$$\ldots \tag{26}$$
$$\alpha_{k-1} = \alpha_0(p_1+\ldots+p_k)/p_1.$$

Таким образом, мы нашли c_1 с точностью до мультипликативной постоянной α_0:

$$f_\infty = c_1 = \alpha_0\left[f(0)+\frac{p_1+p_2}{p_1}f(1)+\ldots+\frac{p_1+\ldots+p_k}{p_1}f(k-1)\right] =$$
$$= (\alpha_0/p_1)[p_1f(0)+(p_1+p_2)f(1)+\ldots+(p_1+\ldots+p_k)f(k-1)]. \tag{27}$$

Для определения α_0 положим, что все начальные данные одинаковы:

$$f(0) = f(1) = \ldots = f(k-1) \neq 0;$$

тогда рекуррентная последовательность имеет вид

$$f(0), f(0), \ldots,$$

потому $f_\infty = c_1 = f(0)$. Отсюда получим уравнение для α_0:

$$f(0) = f(0)\alpha_0[p_1+(p_1+p_2)+\ldots+(p_1+\ldots+p_k)]. \tag{28}$$

Из (28) следует, что

$$\alpha_0 = p_1/[p_1+(p_1+p_2)+\ldots+(p_1+\ldots+p_k)] =$$
$$= p_1/[kp_1+(k-1)p_2+\ldots+2p_{k-1}+p_k].$$

Подставляя найденное α_0 в (27), получим соотношение (21). ■

Рассмотрим теперь арифметические прогрессии вида

$$1,\ 1+\delta,\ 1+2\delta, \ldots, 1+n\delta, \ldots,$$

где δ – фиксированное неотрицательное целое число. И положим, что весовые коэффициенты равны последовательным членам указанной прогрессии так, что

$$p_1 = 1, p_2 = 1+\delta, p_3 = 1+2\delta, \ldots, p_k = 1+(k-1)\delta, \ldots$$

Все $p_i > 0$, и, следовательно, мы находимся в условиях применимости доказанной теоремы. Коэффициенты при начальных данных в числителе соотношения (21) равны последовательным частным суммам указанных прогрессий:

$$S_n = n+0.5(n-1)n\delta. \tag{29}$$

Для дальнейшего изложения удобно положить $\delta = m-2 (m \geq 2)$, тогда из (29) получим

$$S_n = n+0.5(n-1)n(m-2) = 2n-n^2+0.5m(n-1)n. \tag{30}$$

Тогда соотношение (21) принимает вид

$$f_\infty = (S_1 f(0) + \ldots + S_k f(k-1))/(S_1 + \ldots + S_k), \tag{31}$$

где $S_1, \ldots, S_k$ – последовательность многоугольных чисел (Эдвардс, 1980, с. 53–54), определенных соотношением (30).

Обозначим через $M_{m,k}$ сумму k первых m-угольных чисел. Это так называемые пирамидальные числа, и для них справедлива формула

$$M_{m,\,k} = [k(k+1)/6][(m-2)k+5-m]. \tag{32}$$

Таким образом, соотношение (31) можно представить в виде

$$f_\infty^{(m)} = q_{m,1} f(0) + q_{m,2} f(1) + \ldots + q_{m,\,k} f(k-1),$$

где коэффициенты при начальных данных равны

$$q_{m,\,l} = \frac{0.5l[(m-2)l-m+4]}{\left\{\dfrac{k(k+1)}{6}\right\}[(m-2)k+5-m]} = \frac{3l[(m-2)l-m+4]}{k(k+1)[(m-2)k+5-m]}, \quad l = 1, \ldots, k. \tag{33}$$

Замечание 1. Теорема, доказанная выше, обладает достаточно большой степенью общности и может быть применена к любой процедуре взвешенного сглаживания. Например, рассматривая метод параболических сплайнов Н.С. Четверикова (Четвериков, 1975, с. 319–340) и применяя к имеющимся там симметричным весовым коэффициентам доказанную выше теорему, получим определенную несимметричную модернизацию этого метода, направленную на решение проблемы потери данных на правом конце ряда и поэтому пригодную к использованию для качественного анализа показателей финансовых рынков. Аналогично тому, как это сделано выше, можно поступать с любыми известными методами сглаживания временных рядов.

Замечание 2. В более широком контексте результаты исследований, развитые в этом разделе, относятся к проблеме распределения чисел Пизо и Салема. Напомним, что числом Пизо–Ваджарагхавана называется положительный действительный корень, больший единицы, приведенного алгебраического полинома, при условии, что все остальные корни по модулю меньше единицы (Бари, 1961, с. 829–835). В нашем случае условие приведенности полинома обусловливает коэффициент, равный единице, при старшей (или младшей) степени полинома. Поэтому мы начали рассматривать арифметические прогрессии, которые начинаются с числа 1, что и привело в конечном счете к появлению многоугольных чисел.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим применение разработанного метода к исследованию показателей финансовых рынков. Выберем в качестве экспериментальной базы показатели валютного рынка, поскольку показатели фондового рынка подробно изучались многими известнейшими исследователями, тогда как исследования валютного рынка были менее популярны в силу ограниченности данных для анализа. Однако именно валютный рынок признается большинством исследователей более эффективным в сравнении с фондовым (имеется в виду гипотеза эффективного рынка (EMH)), что еще более ограничивает методы его анализа.

В качестве исходной базы были взяты следующие исторические данные: дневные котировки (цены открытия) валютного курса *USD/JPY* за период с 6 июня 1972 г. по 31 декабря 2003 г. (8164 наблюдения[1]). Данная валютная пара выбрана для анализа как наиболее трудно прогнозируемая в связи с частыми интервенциями банка Японии и в классическом техническом анализе считается одной из самых рискованных для инвестирования. Таким образом, исходная информация (дневные котировки) представляет временной ряд с высокой долей случайности.

[1] Источник котировок: EuroClub (http://www.fxeuroclb.ru) и Сембанк (http://www.sembank.ru).

Поскольку основной задачей исследователей финансовых рынков является эффективное моделирование динамики отдельных показателей на мелких временных масштабах, будем придерживаться тех же целей. Поэтому основной целью практического применения вышеописанного метода сглаживания считаем преимущества в способах выделения мелких периодичностей, неявно присутствующих на рынке, что предполагает ограничение размера интервала сглаживания несколькими торговыми днями. Эмпирический анализ результатов сглаживания при различных размерах интервала можно найти, например, в работе (Концевая, Хацкевич, 2009, с. 278–233). Основываясь на результатах этой работы, интервал сглаживания был выбран равным семи дням.

Исследование предлагаемого взвешенного скользящего усреднения включало следующие этапы.

1. Усреднение без весов (простая средняя). Поскольку интервал сглаживания ограничен семью днями, то предлагается данную процедуру повторять (для иллюстрации производимого эффекта это было проделано 100 раз, хотя для практических целей можно ограничиться меньшим числом повторений) для качественной “очистки” исходного ряда от случайных флуктуаций. Заметим, что использование одной процедуры с большим интервалом и нескольких повторных процедур с малым интервалом усреднения приводит к разным результатам. Ограничивая интервал сглаживания несколькими уровнями (в нашем случае 7), при многократном повторении получаем гладкий тренд, не теряя при этом амплитуды основной динамики, в отличие от однократного усреднения по большому числу уровней.

2. На втором этапе производилось взвешенное усреднение на интервале такого же размера (7 дней). Процедура повторялась 100 раз. Такое большое число повторений выбрано для визуального сравнения результатов сглаживания двумя способами: без весов и с весами. С каждым новым усреднением получаем новую сглаженную кривую и, изобразив все эти кривые вместе, формируем “полосы”. Сравнивая ширину этих полос, можно оценить разницу между двумя вариантами сглаживания.

3. На третьем этапе предлагаемый метод взвешенного усреднения сопоставлялся с другими методами одностороннего скользящего сглаживания: линейными весами, экспоненциальным сглаживанием и линейной регрессией.

Таким образом, сначала был использован метод простой скользящей средней с многократным повторением усреднения при фиксированном размере интервала сглаживания. На рис. 1 представлен фрагмент результата процедур последовательного сглаживания (100 раз) с помощью среднеарифметического сглаженного значения, присваиваемого крайнему правому уровню интервала сглаживания. Основным недостатком данной процедуры является сильное смещение вправо расчетных сглаженных значений относительно исходных данных и незначительное уменьшение амплитуды колебаний.

На втором этапе для взвешенного скользящего усреднения был выбран набор удельных коэффициентов, соответствующих нижней строке (13). Процедура сглаживания временного ряда последовательно повторялась (100 раз) для максимальной очистки исходного временного ряда от незначительных возмущений. Введение весовых коэффициентов позволило придать больший удельный вес уровням, ближним к тому, для которого вычислялось сглаженное значение, и меньшие веса уровням по мере удаления их от сглаживаемого. На рис. 2 представлены результаты взвешенного скользящего усреднения.

Приведенные на рис. 1 и 2 графики сглаживания подтверждают пользу предложенного нами метода расчета весовых коэффициентов, который позволяет приблизить сглаженные значения к исходным данным. Это определяется разницей в ширине полос на рисунках, т.е. не уменьшая полезность всей процедуры, позволяющей исключить из исходного ряда незначительные колебания, не потеряв периодов роста и спада, уменьшаем расхождение между исходными и выравненными данными.

На следующем этапе предлагаемый метод сравнивался с другими односторонними методами сглаживания. Для этого в каждой процедуре, кроме экспоненциального сглаживания, использовался одинаковый интервал сглаживания (7 дней). Для экспоненциального сглаживания параметр сглаживания выбирался таким образом, чтобы получить вес ближнего сглаживаемого наблюдения, совпадающий с весом соответствующего наблюдения в предлагаемом методе взвешенного

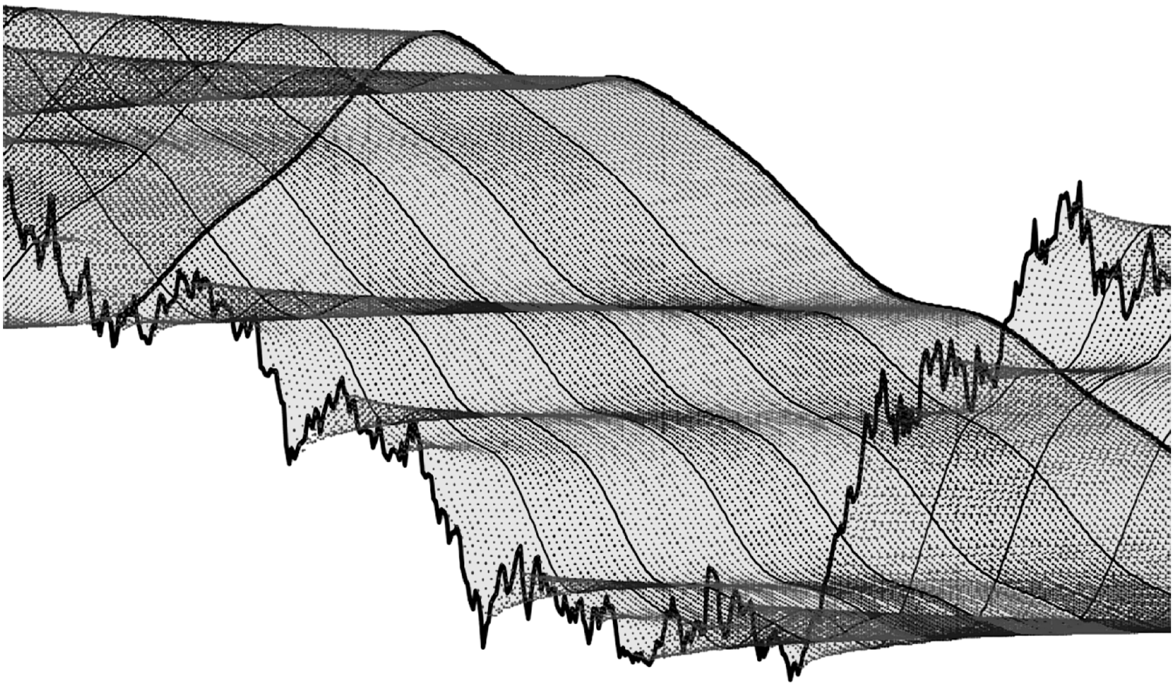

Рис. 1. Результаты последовательного сглаживания дневного курса *USD/JPY* при простом скользящем усреднении

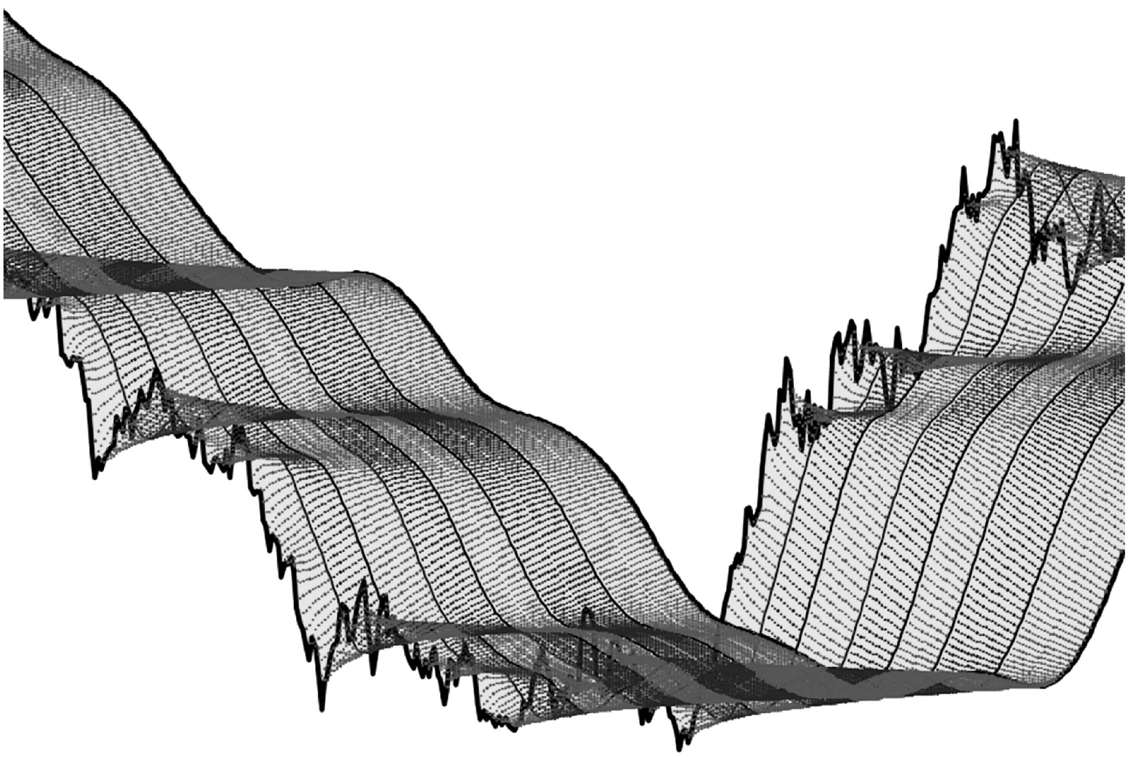

Рис. 2. Результаты последовательного сглаживания дневного курса *USD/JPY* при взвешенном скользящем усреднении

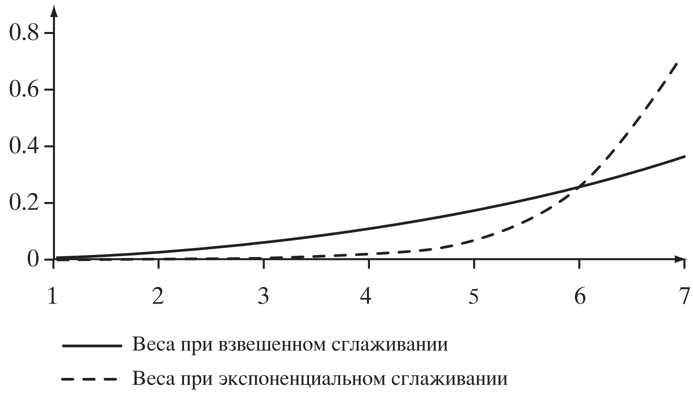

Рис. 3. Распределение весовых коэффициентов для семи уровней интервала сглаживания

усреднения. Распределение весов для семи уровней в интервале (интервал сглаживания 7 дней) представлено для сравнения на рис. 3.

Графики, представленные на рис. 3, позволяют понять недостатки экспоненциального сглаживания, на первый взгляд неочевидные. Несмотря на то что этот метод считается методом с "бесконечной" памятью, фактически вес предшествующих наблюдений столь быстро уменьшается, что роль в расчетах играют только три–четыре предшествующих наблюдения. Метод взвешенного усреднения лишен этого недостатка – вес предыдущих наблюдений "размазан" нелинейно, но достаточно равномерно. Еще одним минусом экспоненциального сглаживания является его неспособность устранять мелкие возмущения в исходных данных при любом числе повторений. Больший вес "свежих" предыдущих уровней приводит к "забыванию" предыдущей истории и ограничивает отклонения сглаженных значений от исходных.

Скользящее сглаживание на базе линейной регрессии, несмотря на высокую точность при однократном сглаживании (см. таблицу, в которой приведены результаты сглаживании 1000 наблюдений исследуемого показателя), обладает недостатками предыдущего метода. При многократном повторении вместо выявления гладких трендовых участков оно приводит к увеличению амплитуды мелких флуктуаций (рис. 4).

На рис. 4 представлены результаты сглаживания при использовании вышеперечисленных методов при 15-кратном их повторении.

Рис. 4. Результаты сглаживания при 15-кратном повторении

Результаты однократного сглаживания курса *USD/JPY* по различным методам

Показатель	Экспоненциальное сглаживание	Линейная регрессия	Простая средняя	Линейные веса	Модифицированные веса
СКО	0.219	0.546	1.217	0.887	0.649
Относительная ошибка, %	0.10	0.28	0.63	0.45	0.33

Таким образом, если относиться к идее сглаживания как к способу очистки ряда и выявлению определенных закономерностей, то, сравнивая рассмотренные выше четыре метода, можно увидеть, что скользящее усреднение с весами оказывается наилучшим с точки зрения минимизации отклонений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предлагается и исследуется модифицированный метод одностороннего взвешенного сглаживания временных рядов на основе многоугольных чисел. Именно одностороннее сглаживание позволяет решить проблемы с потерей данных на конце временного ряда, что является решающим фактором выбора метода сглаживания, учитывая специфику исследования показателей финансовых рынков. В отличие от многих эвристических формул сглаживания временных рядов предлагаемые формулы находят естественное математическое обоснование в виде установления строгих предельных соотношений.

Возникающие новые формулы скользящего среднего содержат m-угольные числа в качестве весовых коэффициентов. При этом параметр m можно изменять в зависимости от того, какие члены ряда необходимо учитывать с большим весом. Это позволяет улучшить качественное распознавание существующих закономерностей временного ряда и способствует устойчивости процедуры обработки ряда.

При сравнении с рядом других методов предлагаемый метод обладает следующими преимуществами: во-первых, дает большую точность, если сравнивать его с методами скользящего усреднения, во-вторых, способен “очищать” ряд от мелких возмущений при многократном повторении процедуры (в отличие от экспоненциального сглаживания и сглаживания на базе линейной регрессии) и, главное, позволяет “настраивать” процедуру выравнивания, изменяя размер интервала сглаживания, тем самым регулируя глубину рыночной памяти и одновременно варьируя параметр m с целью минимизации отклонений между исходными и сглаженными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бари Н.К. (1961): Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ.
Бобров С.П. (1959): Архимедово лето. Кн. 1. М.: ГИДЛ.
Гельфонд А.О. (2006): Исчисление конечных разностей. М.: URSS.
Джини К. (1970): Средние величины. М.: Статистика.
Концевая Н.В., Хацкевич В.Л. (2009): О методах выделения периодичности на рынке FOREX и оптимизации торговых стратегий // *Системы управления и информационные технологии*. № 1–2 (35).
Марков А.А. (1910): Исчисление конечных разностей. Одесса: MATHESIS.
Полиа Г., Сеге Г. (1978): Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука.
Четвериков Н.С. (1975): Сглаживание динамических рядов. В сб.: “*Статистические исследования*”. М.: Наука.
Эдвардс Г. (1980): Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. М.: Мир.
Эйлер Л. (1997): Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел. СПб.: Наука.
Bertin M.J., Decomps-Guilloux A., Grandet-Hugot M. et al. (1992): Pisot and Salem Numbers. Basel – Boston – Berlin: Birkhauser Verlag.

Поступила в редакцию
22.07.2009 г.

Method of Polygonal Numbers in the Procedure of Smoothing the Time Series and Its Application to the Research of Financial Markets Parameters

Yu.Ya. Agranovich, N.V. Kontsevaya, V.L. Khatskevich

The method of the unilateral weighed smoothing of time numbers on the basis of use of the polygonal numbers, showing utility of appendices of methods of the additive theory of numbers and calculations of final differences is developed. This method of calculation of weight factors for sliding averaging is based on generalization of the decision of one A.A. Markov's problem. Proposed are the formulas of natural mathematical substantiation in the form of establishing the strictly limiting parities. The comparative analysis of the results of smoothing received in various methods of unilateral averaging proposed; advantages of the modified weighed averaging in comparison with the other methods proved.

Keywords: unilateral weighed smoothing, polygonal numbers, final differences, unilateral averaging.