ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2010, том 46, № 4, с. 55–68

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ОБЛАСТИ КОНДОРСЕ И РОМБИЧЕСКИЕ ПАРКЕТЫ

© 2010 г. В.И. Данилов, А.В. Карзанов, Г.А. Кошевой

(Москва)

Область Кондорсе – это такое множество линейных порядков на множестве альтернатив, в котором правило простого большинства не дает циклов. С помощью простых геометрических фигур – ромбических паркетов – мы строим большие области Кондорсе и исследуем их свойства.

Ключевые слова: линейные порядки, правило простого большинства, слабый порядок Брюа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача агрегирования предпочтений, или превращение индивидуальных предпочтений в “групповое”, стояла с незапамятных времен. Но только перед Великой французской революцией начались теоретические работы по этой теме. В 1781 г. французский академик Жан Шарль Борда построил формальную процедуру (правило Борда), основанную на суммировании баллов. Другой академик, маркиз де Кондорсе (Condorcet, 1785), отмечая недостатки правила Борда, предложил метод агрегирования, использующий попарное сравнение альтернатив (или кандидатов) с помощью правила простого большинства. Чтобы узнать, какая из альтернатив x или y лучше с групповой точки зрения, надо сравнить число избирателей, выбирающих x по сравнению с y, с числом избирателей, имеющих противоположное предпочтение. Если первых строго больше, то x объявляется более предпочтительной для группы или общества, чем y; во втором случае – наоборот. (Если числа совпадают, можно считать x и y “равноценными”, но данный случай здесь не рассматривается как непринципиальный.)

Далее мы будем исследовать формальные свойства процедуры простого большинства. Поэтому стоит сразу же обговорить некоторые теоретические аспекты. Применение этой процедуры для решения спорных вопросов кажется, с одной стороны, естественным, а с другой – бессмысленным. Естественность связана с бинарностью и анонимностью процедуры, с несомненной простотой и непривязанностью к числу альтернатив. Однако бессмысленно искать истину численным сопоставлением мнений профанов или убеждать кого-то отказаться от своего мнения на том основании, что большинство с ним не согласно. Ж.-А. Кондорсе рассматривал правило простого большинства как процедуру восстановления “истинного”, или “объективного”, предпочтения, воспринимаемого агентами (экспертами) с некоторыми ошибками.

Главное препятствие для применения этого метода, отмеченное уже Ж.-А. Кондорсе, состоит в том, что построенное по правилу простого большинства отношение “группового предпочтения” может содержать циклы (т.е. нарушать свойство транзитивности). Ж.-А. Кондорсе называл это “противоречивым результатом” (см. выше о выявлении истинного предпочтения). Употребляют также выражение “парадокс голосования”, но так как реально тут никакого парадокса нет, то лучше всего вслед за Гибо (Guilbaud, 1952) называть это эффектом Кондорсе.

Было предпринято много попыток избежать эффекта Кондорсе. Наиболее знаменитым результатом является теорема Эрроу о невозможности. По крайней мере она показывает, что дело тут не в правиле простого большинства и что отказ от анонимности не спасает от появления циклов в групповом предпочтении. Главная причина эффекта коренится в бинарности правила (потому что правило Борда удовлетворяет всем другим требованиям теоремы Эрроу). Однако бинарность важна для неманипулируемости (это другая важная тема, которой мы в данной статье не будем касаться). Хочется привести здесь мнение Гибо (Guilbaud, 1952): “...эффект Кондорсе

может рассматриваться как патологический симптом необычайно глубокого заболевания социального органа. Смешно пытаться исправлять это зло усложнением избирательной системы".

Частичный выход из сложившегося тупика связан с ограничениями на возможные предпочтения. Предположим, что предпочтения избирателей не произвольны, но принадлежат некоторой "ограниченной" области D. Если эта область не слишком обширна, можно рассчитывать на то, что правило простого большинства не будет приводить к циклам в групповом предпочтении. (В таком случае говорят, что D – *область Кондорсе*.) Например (как предполагал сам Кондорсе), если D состоит из предпочтений, близких к некоторому "объективному". Или если индивидуальные предпочтения как-то согласованы с некоторыми "объективными" структурами. Одна такая интересная область была предложена Д. Блэком (Black, 1948). Он предположил, что множество кандидатов обладает некоторой естественной линейной структурой (например, политические партии могут располагаться на оси "лево–право"), а предпочтения избирателей имеют на этой оси однопиковую структуру – сначала возрастают, а затем убывают. Для такой области эффект Кондорсе отсутствует и мажоритарное агрегирование приводит к транзитивным (и тоже однопиковым) предпочтениям. Иными словами, область однопиковых предпочтений является областью Кондорсе.

Историю дальнейшего развития теории областей Кондорсе можно прочитать в (Monjardet, 2009). Основные этапы развития теории выглядят так. В работе (Guilbaud, 1952) автор, обсуждая статью Д. Блэка, высказал ряд идей, значение которых становится понятным лишь сейчас. Б. Моджарде и С. Чамени-Нембуа (Monjardet, 2009; Chameni-Nembua, 1989) развили некоторые его соображения о роли дистрибутивных подрешеток в решетке Брюа. Независимо эта же решетка была использована Дж. Абелло (Abello, 1991) для конструирования "больших" областей Кондорсе. Важный шаг был сделан П. Фишберном (Fishburn, 1997), который, обобщая примеры Б. Моджарде и С. Чамени-Нембуа, предложил некий метод (схему альтернирования, см. разд. 6) построения "больших" областей Кондорсе. Частично этот метод был осмыслен с позиций высших порядков Брюа в (Galambos, Reiner, 2008).

Цель настоящей работы – привести достаточно простой и общий способ построения "больших" областей Кондорсе, охватывающий примеры Дж. Абелло, С. Чамени-Нембуа и П. Фишберна. Он основан на использовании достаточно простых плоских фигур, называемых ромбическими паркетами (см. разд. 4). В разд. 5 объясняется, как ромбический паркет порождает множество линейных порядков. Там же доказывается, что полученное таким образом множество является областью Кондорсе, причем максимальной по включению. В разд. 6 показано, как строить паркеты с помощью дуальных образований – проволочных диаграмм – и как на этом пути получаются области Блэка и Фишберна. В разд. 7 кратко рассказывается о достигнутых рекордах, относящихся к размеру областей Кондорсе.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ

До сих пор мы употребляли термин "предпочтение". Далее условимся понимать предпочтения как линейные порядки. Скажем об этом подробнее.

Предполагаем, что зафиксировано некоторое конечное множество X альтернатив (кандидатов, проектов и т.п.). *Бинарное отношение* на X – произвольное подмножество R в $X \times X$. *Линейным порядком* называется бинарное отношение $<$ на X, которое обладает следующими тремя свойствами:

– асимметрии: если $x < y$, то неверно, что $y < x$;

– полноты: если $x \neq y$, то либо $x < y$, либо $y < x$;

– транзитивности: если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.

Противоположное к $<$ отношение $<^o$ обычно обозначают как $>$; это тоже линейный порядок.

Например, множество $[n] = \{1, \ldots, n\}$ обладает естественным порядком $1 < \ldots < n$. Если σ: $X \to [n]$ – взаимно однозначное отображение, то определен линейный порядок $\sigma^*(<) = <_\sigma$ на X по правилу: $x <_\sigma y \Leftrightarrow \sigma(x) < \sigma(y)$.

Легко убедиться, что так получаются все линейные порядки на X. В дальнейшем будем отождествлять X с множеством $[n]$, где $n = |X|$. При этом линейные порядки отождествляются с перестановками множества $[n]$.

Множество линейных порядков на $[n]$ обозначается $\mathbf{L}$ или $\mathbf{L}_n$. Типичный его элемент обозначается как σ или $<_\sigma$.

В дальнейшем изложении важную роль играет частичный порядок $\ll$ на множестве $\mathbf{L}$, который называется (слабым) *порядком Брюа*. Грубо говоря, он связан с удаленностью линейного порядка σ от естественного порядка $<$, а для более четкого определения введем понятие инверсии.

Инверсией для линейного порядка σ называется произвольная пара $(i, j) \in [n] \times [n]$, такая, что $i < j$ и $j <_\sigma i$. Множество всех инверсий линейного порядка σ обозначается $Inv(\sigma)$. Это некоторое подмножество в множестве $\Omega = \{(i, j) \in [n] \times [n], i < j\}$. Например, $Inv(<)$ – пустое подмножество, тогда как $Inv(>)$ – все Ω.

Определение. Пусть σ и τ – линейные порядки на $[n]$. Будем писать $\sigma \ll \tau$, если $Inv(\sigma) \subset Inv(\tau)$.

Иначе говоря, с помощью Inv множество $\mathbf{L}$ отображается в 2^Ω; тогда $\ll$ – это порядок на $\mathbf{L}$, индуцированный естественным частичным порядком $\subset$ на 2^Ω. Отношение $\ll$ действительно является частичным порядком; это утверждение эквивалентно инъективности отображения Inv: $\mathbf{L} \to 2^\Omega$. Инъективность видна из того, что линейный порядок σ однозначно восстанавливается по множеству $Inv(\sigma)$. В самом деле, чтобы получить σ, надо из Ω вынуть $Inv(\sigma)$ и добавить $Inv(\sigma)^\circ$; $\sigma = (\Omega - Inv(\sigma)) \cup Inv(\sigma)^\circ$. Проще говоря, $i <_\sigma j$ тогда и только тогда, когда либо $i < j$ и пара (i, j) не принадлежит $Inv(\sigma)$, или когда $j < i$ и пара (j, i) принадлежит $Inv(\sigma)$.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере для $n = 3$ (рис. 1). На рисунке стрелки идут от меньшего порядка к большему.

3. ОБЛАСТИ КОНДОРСЕ

Вернемся к вопросам голосования. Пусть $X = [n]$ – множество альтернатив. Предпочтения индивидов понимаются как линейные порядки на $[n]$. Пусть имеется конечная группа избирателей V, а их предпочтения задаются отображением R: $V \to \mathbf{L}$, так что $R(v)$ – это предпочтение избирателя v. Агрегирование индивидуальных предпочтений осуществляется с помощью правила простого большинства. Более точно, если x и y – две разные альтернативы, то y лучше (для группы), чем x, если строго больше половины избирателей считают y лучше x. Если это групповое отношение обозначить как $sm(R)$, то

$$x\ sm(R)\ y \Leftrightarrow |\{v, xR(v)y\}| > |\{v, yR(v)x\}|.$$

Отношение $sm(R)$ антисимметричное. Если группа V состоит из нечетного числа избирателей, то $sm(R)$ полное. Однако оно может нарушать транзитивность и иметь циклы. И это связано с наличием так называемых *циклических троек* (тройка различных альтернатив x, y, z в X, для которой имеются три избирателя с предпочтениями (x, y, z), (y, z, x) и (z, x, y)). Если оставить только этих трех избирателей, то по правилу простого большинства мы имеем цикл в групповом отношении $< = sm$: $x < y < x < x$.

Легко убедиться, что если циклических троек нет, то циклов в групповом отношении $sm(R)$ тоже нет (и тогда $sm(R)$ – частичный порядок и даже линейный, если избирателей нечетное число).

Определение. Подмножество D в $\mathbf{L}$ называется *областью Кондорсе*[1], если оно не содержит циклических троек.

[1] Иногда говорят об ациклическом множестве линейных порядков.

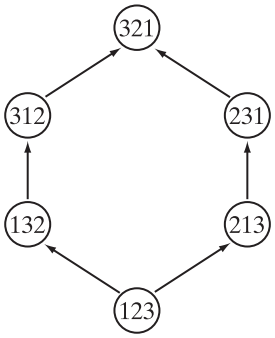

Рис. 1

Из сказанного выше ясно, что если предпочтения всех избирателей принадлежат области Кондорсе D, то групповое отношение $sm(R)$ транзитивно. Нас будет интересовать построение "больших" областей Кондорсе. Кроме того, всюду далее предполагается, что области D содержат естественный порядок $<$ и противоположный ему порядок $>$ на $[n]$.

Стоит более подробно разобраться со случаем $n = 3$ (так как нарушение транзитивности проявляется именно на тройках). В этом случае существуют четыре (максимальных) области Кондорсе. На рис. 2 мы берем $\mathbf{L}_3$ из рис. 1 и отмечаем эти области черными кружочками.

Область, показанная на рис. 2*a*, выделяется тем, что "средняя" альтернатива 2 не является наихудшей ни в одном из порядков этой области. Это частный случай так называемых "однопиковых" предпочтений, о которых будет рассказано позже. Область 2*d* выделяется тем, что та же альтернатива 2 никогда не является наилучшей (случай "одноямных" предпочтений). Область 2*b* – тем, что альтернатива 3 никогда не бывает "средней", а область 2*b* – тем, что альтернатива 1 не бывает "средней".

Возвращаясь к случаю произвольного $[n]$, можно так переформулировать определение области Кондорсе: для любой тройки альтернатив i, j, k (такой, что $i < j < k$) ограничение $D|_{ijk}$ должно попадать в один из классов $2a - 2d$. Из этого описания видно, что число (максимальных по включению) областей Кондорсе не превышает $4^{\binom{n}{3}}$. Впрочем, для нас важнее следить за размером получающихся областей и строить интересные большие области Кондорсе.

Пример 1. Область Блэка однопиковых предпочтений. При движении точки по отрезку $[n]$ в естественном направлении (от 1 к n или обратно) "полезность" альтернатив сначала монотонно возрастает, достигает максимального значения и затем монотонно убывает. Такие предпочтения выделяются тем условием, что при ограничении на любую тройку i, j, k ($i < j < k$) реализуется условие a (рис. 2*a*). Ясно, что мы получаем область Кондорсе, причем максимальную по включению, и такая область состоит из 2^{n-1} порядков.

Аналогично получается область "одноямных" предпочтений. В ней на каждой тройке реализуется условие 2*d* (рис. 2*d*). Можно также сказать, что эта область составлена из предпочтений, противоположных к однопиковым.

Пример 2. Области Блина. Пусть D является цепью в $\mathbf{L}$ относительно порядка Брюа. Тогда это область Кондорсе. Это вытекает из двух простых утверждений. Первое – если два линейных порядка σ и τ сравнимы по Брюа, то такое же сравнение сохраняется и при ограничении на любую тройку i, j, k. И второе – любая цепь в случае трех альтернатив попадает под случай 2*a* или 2*d* (см. рис. 2).

Впрочем, в случае цепи можно сказать больше. А именно что "агрегированное" (по правилу простого большинства и в случае нечетного числа избирателей) предпочтение является предпочтением "медианного" избирателя.

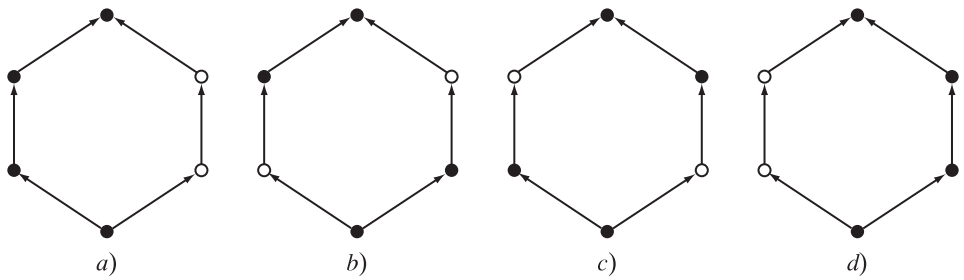

Рис. 2

Пример 3. Приведем еще один интересный пример области Кондорсе. В этом примере $n = 4$ и область состоит из четырех порядков (мы их записываем вертикально, снизу вверх):

$$\left|\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right|.$$

Проверка того, что это область Кондорсе, производится следующим образом. При ограничении на 123 реализуется условие 2*b* (см. рис. 2). При ограничении на 124 реализуется условие 2*c*. При ограничении на 134 реализуется условие 2*b*. При ограничении на 234 реализуется условие *c*. Можно проверить непосредственно, что это максимальная (несмотря на ее небольшой размер) область Кондорсе.

Суть последнего примера в том, что для построения областей Кондорсе "большого" размера надо привлекать условия типа 2*a* и 2*d*. Ниже мы приведем универсальный способ строить области Кондорсе, удовлетворяющие условиям 2*a* или 2*d*.

4. РОМБИЧЕСКИЕ ПАРКЕТЫ

Зафиксируем в верхней полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ n векторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$, выдвинув единственное условие – чтобы эти вектора шли по часовой стрелке (рис. 3).

Пусть теперь σ – линейный порядок на $[n]$, задающий ранжирование $i_1 <_\sigma i_2 <_\sigma \ldots <_\sigma i_n$. Построим по нему ломаную линию $S(\sigma)$: она выходит из точки ноль и сначала идет по вектору ξ_{i_1}, затем из конца этого вектора по вектору ξ_{i_2} и т.д. Заканчивается она в точке $\xi_{i_1} + \ldots + \xi_{i_n} = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Будем называть такую ломаную *змейкой* (соответствующей порядку σ). Так как все вектора ξ_i направлены вверх, змейка тоже идет монотонно вверх. Среди змеек есть самая левая ($S(<)$) и самая правая ($S(>)$).

Взглянем на это чуть иначе. Обозначим через ξ линейное отображение пространства $\mathbb{R}^{[n]}$ на плоскость, которое базисный вектор i переводит в ξ_i. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{[n]}$ единичный куб $[0, 1]^{[n]}$. Линейные порядки можно понимать как пути по ребрам этого куба, идущие монотонно из вершины 0 в вершину $(1, \ldots, 1)$. Тогда змейки – образы этих путей при отображении ξ. Это наводит на мысль рассмотреть образ всего куба при отображении ξ. Обозначим его как Z_n, потому что он является зоногоном (суммой отрезков). Это выпуклый центрально-симметричный $2n$-угольник с двумя выделенными вершинами – нижней $b = 0$ и верхней $t = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Граница зоногона составлена из левой части (змейка $S(<)$) и правой части (змейка $S(>)$).

Остальные змейки тоже проходят внутри зоногона. Однако если нарисовать все $n!$ змеек, получится очень запутанная картина, от которой мало прока. Более наглядная картина возникает, когда мы подчиняем змейки некоторому ромбическому паркету зоногона.

Пусть все вектора ξ_i имеют длину 1. *Ромбическим паркетом* в зоногоне Z_n называется правильное разбиение его на ромбы со сторонами единичной длины. Имеется в виду, что ромбы покрывают зоногон; кроме того, предполагается, что любые два пересекающихся ромба пересекаются либо по общей вершине, либо по общему ребру. Легко понять, что любое ребро такого паркета конгруэнтно некоторому вектору ξ_i. Это очевидно, если ребро лежит на границе зоногона. Если нет, то с обеих сторон от него лежат ромбы (сторонами которых он является). Возьмем, к примеру, ромб, который лежит слева. У него есть еще одно ребро, конгруэнтное начальному. Соседний слева ромб обладает теми же свойствами. И так далее. Так как мы все время двигаемся влево, то цикл возникнуть не может и рано или поздно мы попадем на границу зоногона.

Ребро паркета, конгруэнтное вектору ξ_i, называется далее *i-ребром* (или ребром цвета i). Ориентируем каждое ребро в направлении снизу вверх (или, что то же самое, в направлении ξ_i, если это i-ребро). Ромб считается *i-ромбом*, если одно из его ребер (а на самом деле два противоположных ребра) имеет цвет i, и *ij-ромбом*, если он вдобавок является j-ромбом. Это задает естественное отображение ψ_T: $Rho(T) \to \Omega$ из множества $Rho(T)$ ромбов паркета T в множество

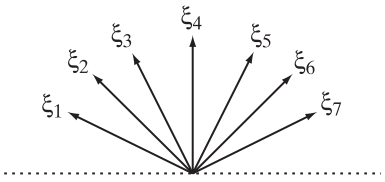

Рис. 3

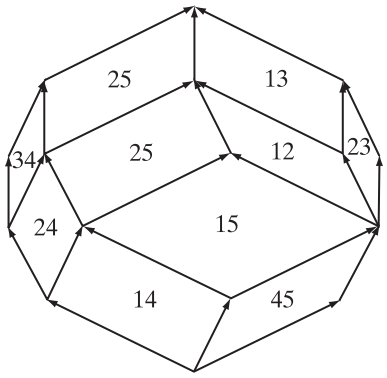

Рис. 4

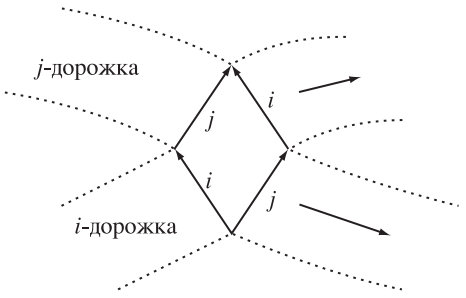

Рис. 5

Ω пар (i, j), $1 \le i < j \le n$. На рис. 4 изображен ромбический паркет в случае $n = 5$; внутри каждого ромба R указана пара $\psi_T(R)$.

В этом месте можно отказаться от предположения, что длины ξ_i равны 1. Плитки паркета теперь будут не ромбами, а параллелограммами. Однако для краткости и выразительности мы по-прежнему будем называть плитки ромбами, а паркет – ромбическим.

Глядя на рис. 4, мы видим, что i-ромбы образуют как бы полоски или дорожки. В самом деле, если i-ромб не примыкает к границе зоногона, у него есть сосед слева и справа, которые тоже i-ромбы. Будем двигаться от каждого i-ромба к его соседу справа. Заметим, что такое движение монотонно в направлении, ортогональном вектору ξ_i. Поэтому циклов быть не может, и каждый связный кусок дорожки идет от левой границы зоногона к правой. Но на левой границе имеется только одно ребро цвета i. Поэтому каждая дорожка – это связный путь, идущий с левой границы зоногона на правую. (Р. Кенион употребляет для дорожек более выразительное название – железнодорожный путь, образованный двумя параллельными "рельсами" и "шпалами", состоящими из i-ребер.)

Главное свойство дорожек то, что они пересекаются между собой, и при этом ровно один раз. В самом деле, рассмотрим j-дорожку. Она разрезает зоногон на две части: выше j-дорожки и ниже j-дорожки. Пусть теперь i меньше, чем j. Тогда i-дорожка начинается в нижней части и кончается в верхней; поэтому наши две дорожки обязаны пересечься. Рассмотрим теперь более внимательно их пересечение. Они пересекаются в некотором ij-ромбе (рис. 5).

Из рис. 5 видно, что i-дорожка пересекает j-дорожку всегда снизу вверх, где бы это пересечение ни происходило. Поэтому пересекаться эти дорожки могут не более одного раза. Тем самым доказано следующее предложение.

Предложение 1. *Каноническое отображение* ψ_T: $Rho(T) \to \Omega$ – *биективно.*

Замечание. Свойство, что дорожки пересекаются по одному разу, напоминает свойство прямых на плоскости. По этой причине их называют иногда псевдопрямыми; аксиоматику таких объектов исследовал Д. Кнут в книге (Knuth, 1992).

5. ПАРКЕТЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ

Введем теперь понятие змейки, согласованной с ромбическим паркетом T. Это направленный путь P, идущий по ребрам паркета из нижней вершины b в верхнюю вершину t. Такой путь делит зоногон на две половины – левую и правую. Мы утверждаем, что каждая дорожка пересекает каждую змейку P. Рассуждение напоминает доказательство предложения 1.

Рассмотрим j-дорожку. Как уже говорилось, она делит зоногон на нижнюю половину и верхнюю, а все j-ребра идут снизу вверх. Произвольная змейка начинается в нижней половине и заканчивается в верхней, поэтому она обязательно пересекает j-дорожку. А так как пересечение

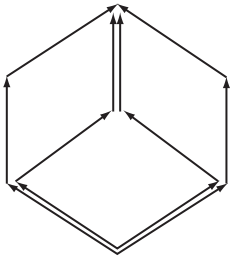

Рис. 6

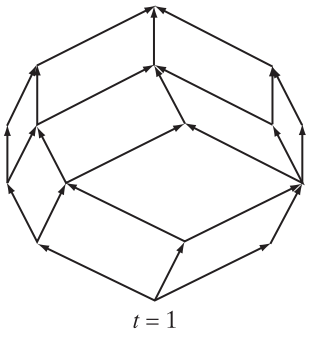

Рис. 7

происходит по j-ребру, то змейка пересекает j-дорожку снизу вверх, и случается это не более одного раза.

Отсюда следует, что цвета всех ребер змейки встречаются по разу. Так что любая змейка – это змейка некоторой перестановки множества $[n]$. Если мы запишем цвета звеньев змейки, начиная снизу, как $i_1, \ldots, i_n$, то эта змейка реализует линейный порядок $i_1 <_P i_2 <_P \ldots <_P i_n$.

Множество змеек паркета T, как и множество соответствующих линейных порядков на $[n]$, будем обозначать $\Sigma(T)$.

Пример 4. Рассмотрим паркет T размера 3, изображенный на рис. 6. Множество $\Sigma(T)$ состоит из четырех змеек, соответствующих порядкам 123, 132, 312 и 321. Это в точности область a из разд. 3 (рис. 2).

Симметрично, "перевернутый" паркет дает область d (рис. 2). Таким образом, в обоих случаях $\Sigma(T)$ является областью Кондорсе. Наш главный вывод состоит в том, что аналогичное утверждение верно для любого ромбического паркета.

Теорема. *Для любого ромбического паркета T зоногона Z_n множество $\Sigma(T)$ линейных порядков на $[n]$ является областью Кондорсе.*

Приведем два доказательства этой теоремы.

Доказательство 1. Этот способ доказательства основан на операции редукции паркета. Грубо говоря, имея паркет для $[n]$, можно удалить одну альтернативу $l \in [n]$ и получить редуцированный паркет $T|_{[n]-l}$. Делается это так. Будем умножать вектор ξ_l на число $\lambda \in [0, 1]$ и соответственно уменьшать все ребра паркета цвета l. Мы получим деформацию нашего паркета, зависящую от параметра λ. При $\lambda \neq 0$ все эти паркеты комбинаторно эквивалентны исходному паркету T. Однако при $\lambda = 0$ происходит "вырождение" и все ребра цвета l исчезают. На рис. 7 показаны некоторые этапы этой деформации для паркета из рис. 4; $l = 2$.

Каждый li-ромб вырождается в ребро цвета i, остальные ромбы сохраняются без изменений (может быть, только перемещаясь на вектор $-\xi_l$). Каждая змейка исходного паркета вырождается в змейку паркета $T|_{[n]-l}$, при этом ребро цвета l исчезает. Соответствующий линейный порядок – это ограничение порядка на $[n] - l$. То есть естественное отображение ограничения линейных порядков с $[n]$ на $[n] - l$ отправляет $\Sigma(T)$ в $\Sigma(T|_{[n]-l})$. (Конструкцию редукции можно обратить и строить паркеты большего размера, но это нам не понадобится.)

Такие редукции можно итерировать. Так что для любого подмножества $S \subset [n]$ мы получаем естественное отображение $\Sigma(T)$ в $\Sigma(T|_S)$.

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольную тройку альтернатив $i < j < k$ и произведем редукцию (удаление) всех остальных альтернатив. Получаем, что при ограничении всех порядков из $\Sigma(T)$ на подмножество $S = \{i, j, k\}$ все они попадают в $\Sigma(T|_{ijk})$. Но, как было показано в примере 4, имеется всего два паркета размера 3 – один соответствует случаю a, другой – случаю d (см. рис. 2).

Замечание. Легко установить, какой из случаев имеет место. Если j-дорожка проходит ниже ik-ромба (или, лучше сказать, если ik-ромб лежит левее j-дорожки), то мы имеем случай d. Если наоборот, то получаем случай a. В любом случае ромбический паркет дает разбиение всех троек в $[n]$ на два класса (“горбы” и “ямы”).

Доказательство 2. Данный способ доказательства теоремы основан на том, что множество инверсий $Inv(<_P)$ для змейки P паркета T допускает простое описание. Нам потребуется сделать некоторое отступление. А именно рассмотрим ромбы паркета T, которые лежат левее пути P. Множество таких ромбов обозначим $L(P)$. Именно они и соответствуют инверсиям линейного порядка $<_P$.

Лемма. $Inv(<_P) = \psi_T(L(P))$.

Доказательство. В самом деле, пусть $i < j$ и пара (i, j) образует инверсию. Это значит, что звено цвета i расположено в змейке P выше, чем звено цвета j. Но тогда i-дорожка и j-дорожка пересекаются до того, как дойдут до змейки, так что ij-ромб лежит слева от P. И обратно, если ij-ромб лежит левее змейки P, дорожки пересекаются до встречи с P и на P выходят уже в другом порядке. ■

Следствие 1. *Пусть* $\sigma, \tau \in \Sigma(T)$. *Соотношение* $\sigma \ll \tau$ *имеет место тогда и только тогда, когда змейка* $S(\sigma)$ *проходит левее, чем змейка* $S(\tau)$ (*т.е. лежит в левом регионе* $L(S(\tau))$).

Следствие 2. *Пусть* $\sigma, \tau \in \Sigma(T)$ *и* $S(\sigma)$, $S(\tau)$ – *соответствующие змейки. Рассмотрим левую* $S(\lambda)$ *и правую* $S(\rho)$ *огибающие змеек* $S(\sigma)$ *и* $S(\tau)$. *Тогда* λ *есть инфимум* σ *и* τ *в посете* **L**, *а* ρ – *супремум* σ *и* τ.

Установим это для ρ (для λ доказательство проводится аналогично). Так как змейка $S(\rho)$ проходит правее и $S(\sigma)$, и $S(\tau)$, то согласно следствию 1 имеем $\sigma \ll \rho$ и $\tau \ll \rho$.

В обратную сторону: пусть некоторая перестановка ρ' мажорирует (в смысле порядка Брюа) σ и τ. Тогда $Inv(\rho')$ содержит объединение $Inv(\rho)$ и $Inv(\tau)$. Последнее множество согласно лемме 2 совпадает с $Inv(\rho)$, откуда $\rho \ll \rho'$.

Следствие 3. *Множество* $\Sigma(T)$ *является (дистрибутивной) подрешеткой в решетке* **L**.

Теперь вернемся ко второму доказательству теоремы. Проверим, что любой профиль индивидуальных предпочтений $R: V \to \Sigma(T)$ дает (при агрегировании по правилу простого большинства) тоже предпочтение, принадлежащее $\Sigma(T)$. Для этого мы применим следующий искусственный прием. Представим, что два избирателя имеют предпочтения σ и τ, которые несравнимы по Брюа. Заменим этих избирателей двумя фиктивными избирателями с предпочтениями $\sigma \vee \tau$ и $\sigma \wedge \tau$. Число голосов, поданных за любое предложение вида $i < j$, не изменится. Дело в том, что поддержка этого предложения определяется тем, правее или левее от дорожки $S(R(v))$ лежит ij-ромб паркета.

Производя такую “фальсификацию” предпочтений избирателей (не влияющую на исход агрегирования), можно достичь ситуации, когда предпочтения всех избирателей сравнимы по порядку Брюа. А тогда, как уже было отмечено в примере 2, агрегированное предпочтение – это предпочтение “медианного” избирателя.

Можно показать также, что множество $\Sigma(T)$ является максимальной (по включению) областью Кондорсе. В самом деле, добавим к множеству $\Sigma(T)$ новую перестановку σ. Некоторое время змейка-ломаная $S(\sigma)$ идет по ребрам из паркета T; пусть e – первое ребро ломанной $S(\sigma)$, которое уже не проходит по T. При этом возможны три случая, изображенные на рис. 8.

Рассмотрим подробно средний случай. Цвет ребра e обозначим как j; ребра ромба, в который входит ребро e, – как i и k; ясно, что $i < j < k$. В линейном порядке σ альтернатива j расположена ниже, чем i и k. И тут возможны два случая: первый – когда $i <_\sigma j <_\sigma k$ и второй – когда $j <_\sigma k <_\sigma i$. В первом случае добавляем к σ два предпочтения из области $\Sigma(T)$: $i <' j <' k$ (реализуемое путем, идущим по левой стороне ik-ромба) и предпочтение di, $k <_{di} j <_{di} i$ (противоположное к “<”). В результате получаем циклическую тройку. Во втором случае добавляем к σ предпочтение $k <'' i <'' j$ (реализуемое путем по правой стороне ik-ромба) и естественный порядок $<$ и снова получаем циклическую тройку.

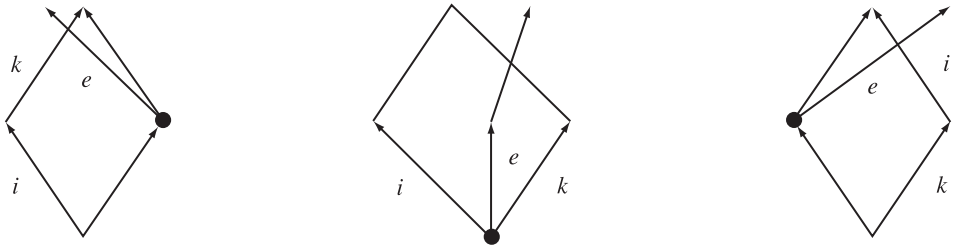

Рис. 8

Два крайних случая приводят к циклическим тройкам по аналогичным соображениям.

Таким образом, паркетные области $\Sigma(T)$ – это максимальные по включению области Кондорсе. Впрочем, они могут отличаться по размеру, как будет видно из приводимых ниже примеров.

6. ПРОВОЛОЧНЫЕ ДИАГРАММЫ

Покажем теперь, что многие области Кондорсе получаются с помощью ромбических паркетов, в частности области, рассмотренные Фишберном (Fishburn, 1997) в целях получения "рекордов". Для этого нужно иметь хорошие способы строить ромбические паркеты. Оказывается, что тут (и во многих других вопросах) удобнее перейти на двойственный язык проволочных диаграмм.

Мы уже упоминали про дорожки в паркетах. Если внутри i-дорожки провести "среднюю линию" ("центральный рельс"), мы получим кусочно-линейный путь (проволоку) в зоногоне, который соединяет середину i-ребра на левой границе зоногона с серединой i-ребра на правой границе зоногона. Так мы получаем n проволок (идущих с левой границы зоногона на правую). Важнейшее свойство этой системы проволок состоит в том, что любые две проволоки пересекаются только по одному разу.

Отталкиваясь от этого свойства, можно дать определение абстрактной проволочной диаграммы. Рассмотрим вертикальную полосу П на плоскости $\mathbb{R}^2$ с левой границей LП и правой RП. *Проволокой* назовем непрерывную (или кусочно-гладкую, или кусочно-линейную, не так важно) кривую w, идущую монотонно вправо от некоторой точки на LП в некоторую точку RП. Семейство w_i, $i = 1, \ldots, n$, из n проволок назовем *проволочной диаграммой*, если любые две проволоки имеют только одну общую точку, лежащую строго внутри П. Предполагается, что в каждой такой точке происходят реальные пересечения, а не касания, причем именно двух проволок. Такие диаграммы интересуют нас с точностью до изотопии.

Мы уже показали, как ромбический паркет задает проволочную диаграмму (надо только зоногон Z_n "вытянуть" в полосу П). Обратно, если для проволочной диаграммы рассмотреть дуальный граф (вершины которого соответствуют камерам диаграммы, а грани – кроссингам), то получим плоский граф с четырехугольными (внутренними) гранями. Можно показать, что такой граф реализуется как ромбический паркет. Использование проволочных диаграмм позволяет иногда более просто задавать паркеты.

Рассмотрим, например, следующий способ построения системы проволок. Реально проволоки будут проходить в квадрате размера $(n-1) \times (n-1)$. На левой стороне квадрата мы отмечаем n точек на высоте $0, \ldots, n-1$. Первая проволока w_1 идет из нижней вершины под углов в 45° (вправо вверх); последняя w_n – из верхней вершины вниз под углом 45° (вправо вниз). Остальные "начальные" точки (с номерами от 2 до $n-1$) делим на две группы: группу $\nearrow$ и группу $\searrow$. Если начальная вершина принадлежит группе $\nearrow$, проволока из нее выходит (всюду под углом 45°) в направлении $\nearrow$, затем, дойдя до верхней стороны квадрата, отражается и идет в направлении $\searrow$ до правой стороны квадрата. Для вершины из группы $\searrow$ все наоборот: сначала $\searrow$, а затем – отражение $\nearrow$. На рис. 9 нарисованы две такие системы проволок для $n = 8$: в левой – $\nearrow = \{3, 5, 7\}$, правой – $\nearrow = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Видно, что в обеих системах проволоки пересекаются только

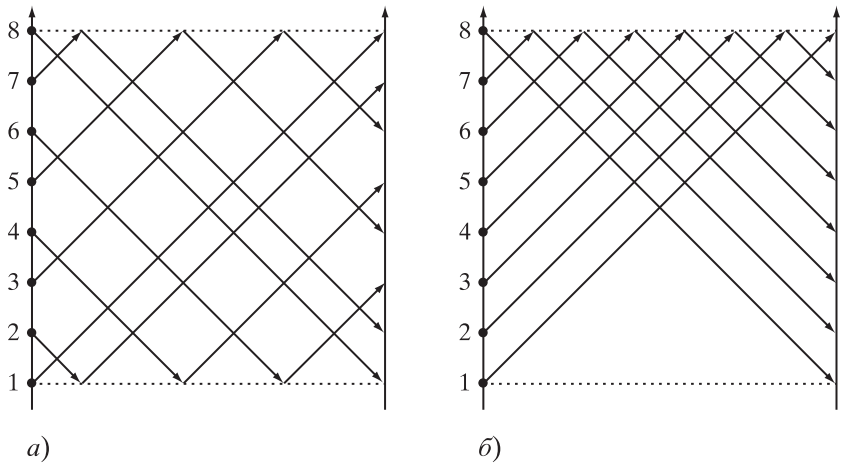

Рис. 9

один раз. Легко убедиться, что это справедливо и в общем случае, поэтому мы получаем действительно проволочную диаграмму. Кстати, эта простая конструкция дает 2^{n-2} паркета. Всего же паркетов порядка 2^{n^2}. Например, для $n = 5$ получаем 62 паркета, для $n = 6$ паркетов будет 908, для $n = 7$ – 24 698, для $n = 8$ – 1 232 944 паркетов (Knuth, 1992).

Легко научиться, как для таких специальных диаграмм делить тройки (см. замечание в разд. 5). Рассмотрим тройку i, j, k ($i < j < k$). Если "средняя" альтернатива j принадлежит группе ↗ (т.е. выпущенная из соответствующей начальной точки проволока отражается от верхней стороны квадрата), то относим эту тройку к случаю рис. 2*a* (т.е. "горб"). В противном случае – к случаю рис. 2*d* (т.е. "яма").

Здесь не особенно важно, что проволочная диаграмма имеет такой специальный вид. Важно только то, что на проволоке w_j цвета j имеется точка p, выше которой другие проволоки не проходят. Нарисуем эту проволоку и поделим (как на рис. 10) полосу П на три области: I, II и III.

Мы утверждаем, что проволоки цвета i и k ($i < j < k$) могут пересекаться только в области II. Дело в том, что проволока w_i не может войти в область I. Чтобы попасть в эту область, проволока w_i должна пересечь проволоку w_j на участке от начальной вершины до точки p, но в этом случае она не может покинуть область I – нельзя пересечь выше точки p и нельзя повторно пересекать проволоку w_j. Аналогично проволока w_k не может попасть в область III.

Следующее предложение подведет итог вышесказанному.

Предложение 2. *Пусть W – специальная проволочная диаграмма, а $i < j < k$ – тройка альтернатив. Если j принадлежит группе ↗, то мы имеем ситуацию "горба"; если ↘ – ситуацию "ямы".*

В частности, рис. 9*б* соответствует случаю, когда для любого j мы имеем случай "горба". Это означает однопиковость соответствующих "паркетных" предпочтений. В частности, область Блэка является паркетной. Что касается случая, изображенного на рис. 9*a*, то о нем стоит поговорить отдельно.

Альтернирующие схемы Фишберна. Занимаясь вопросом о построении областей Кондорсе максимального размера, П. Фишберн (Fishburn, 1997) использовал специальные схемы условий типа "горба" или "ямы", которые он назвал схемами альтернирования. Более точно, он потребовал, чтобы для произвольной тройки $i < j < k$ выполнялось условие "горба", если j четно, и условие "ямы", если j нечетно. Из сказанного выше ясно, что предпочтения имеют паркетный вид, причем паркет двойствен специальной проволочной диаграмме с группой ↗, состоящей из четных альтернатив.

Области Фишберна, которые получаются с помощью его схемы альтернирования, гипотетически имеют максимальный размер среди паркетных областей. Нам же представляется более

важным то, что предпочтения из его области допускают достаточно простое и осмысленное описание, напоминающее одновершинность или одноямность. Что проку от "большой" области Кондорсе, если предпочтения в ней имеют слишком сложное описание? С какой стати избиратель будет иметь столь замысловатые предпочтения? Предпочтения должны по идее генерироваться достаточно простыми соображениями.

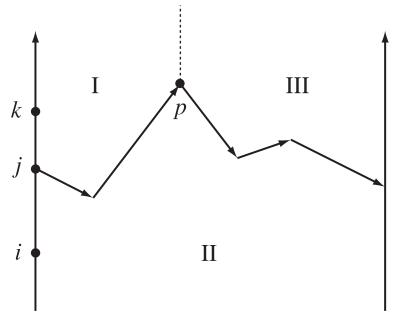

Рис. 10

Объясним наше описание предпочтений из области Фишберна на примере $n = 8$. На горизонтальной прямой разместим две черные вершины: с номерами 1 и 8 (в случае $n = 8$). Между ними расположим три черные (нечетные) вершины в порядке 3, 5, 7. Слева от вершины 1 расположим белые (четные) вершины в порядке 6, 4, 2. Аналогичную процедуру проведем справа от вершины $n = 8$. Получаем такую картину, изображенную на рис. 11.

Как теперь нужно строить предпочтения (см. змейку на рис. 11)? Мы начинаем с некоторой черной вершины (например, с вершины 3). Затем идем к соседней вершине (справа или слева). От нее снова к соседней вершине (среди не посещенных ранее) справа или слева. И так далее, пока не обойдем все номера, от 1 до n. В приведенном выше примере мы получаем ранжирование 31 257 486. Как и в одноямном случае, текущие "худшие" альтернативы образуют интервал. Главное отличие от случая одноямности состоит в том, что интервальность понимается не относительно естественного порядка 12 345 678, но относительно указанного выше расположения

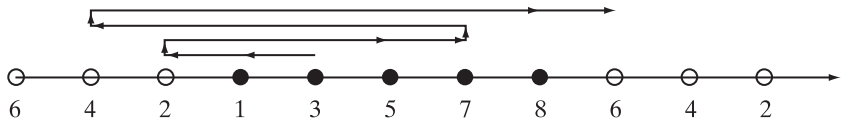

Рис. 11

вершин. Кроме того, должно быть выполнено еще одно условие: в текущем интервале число белых вершин не должно превышать число черных. Это "влияние края". Как нам представляется, приведенное описание более точно выражает достаточно расплывчатое утверждение Фишберна, что "нечетные альтернативы скапливаются слева, тогда как четные – справа".

Итак, на первом шаге мы выбираем одну из черных вершин (сделать это можно $[n/2] + 1 \leq \leq (n + 2)/2$ способом), затем можно пойти налево или направо (и так $n - 2$ раз), последний шаг уже делается без выбора. Так что если проигнорировать условие перевеса черных вершин над белыми, мы получаем неплохую оценку сверху для размера $\Phi(n)$ области Фишберна: $\Phi(n) \leq (n + 2)2^{n-3}$.

7. НУМЕРОЛОГИЯ

Хотя все паркеты чем-то похожи друг на друга (во всяком случае, они переводятся друг в друга элементарными гексагональными преобразованиями, называемыми флипами; подробнее об этом см. (Danilov, Karzanov, Koshevoy, 2009)), размеры областей Кондорсе $\Sigma(T)$ могут отличаться, причем довольно значительно.

Пример 5. На рис. 12 изображены три паркета, дающие области Кондорсе размера 7, 8 и 9, соответственно.

Пример 6. В примере 5 различие не так велико, однако оно уже больше для $n = 5$ (рис. 13). Размер $\Sigma(T)$ равен 11 для левого паркета, 16 для среднего и 20 для правого.

Пример 7. Области Фишберна. Можно убедиться, что область Фишберна для $n = 8$ имеет 222 предпочтения, что уже значительно больше, чем $2^7 = 128$. А. Галамбос и В. Рай-

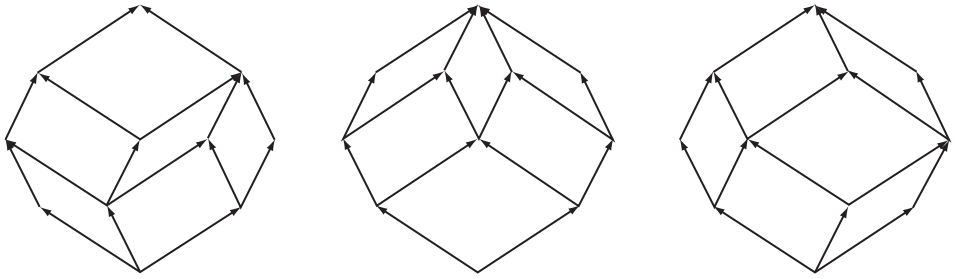

Рис. 12

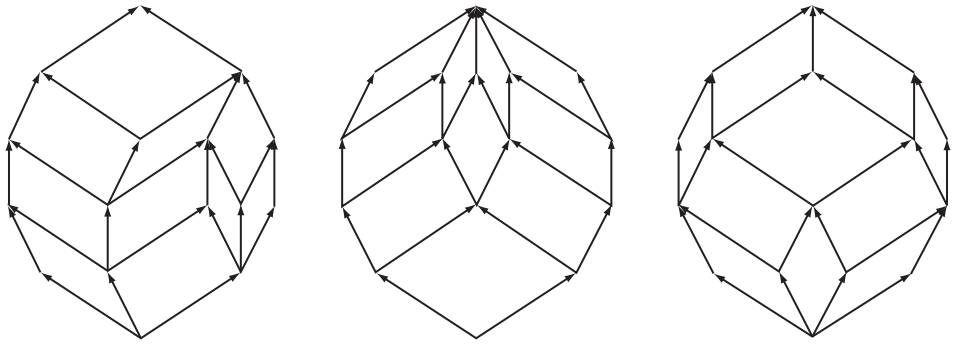

Рис. 13

нер (Galambos, Reiner, 2008) дали точную формулу для числа $\Phi(n)$; в случае четного n это число равно

$$2^{n-3}(n+3)-\binom{n-2}{n/2-1}(n-3/2),$$

для нечетного –

$$2^{n-3}(n+3)-\binom{n-1}{(n-1)/2}(n-1)/2.$$

Пользуясь этой формулой, можно найти размеры областей Фишберна для небольших значений n:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\Phi(n)$	4	9	20	45	100	222	488	1069	2324	5034	10 840	23 266	49 704	105 884

То есть каждое следующее число более чем в два раза превышает предыдущее. В (Galambos, Reiner, 2008) была высказана гипотеза, что это действительно максимальный размер для паркетной области Кондорсе (т.е. для $\Sigma(T)$) и что авторы проверили ее для $n \le 7$.

Разложимые области. До сих пор мы занимались областями Кондорсе, задаваемыми ромбическими паркетами. Однако нужно помнить, что ими не исчерпываются области Кондорсе. Было бы интересно найти какую-то геометрическую серию, обобщающую паркетную серию.

Начнем с простого (но принципиального) случая. Представим, что мы имеем сюръективное отображение $\varphi: X \to B$. Иначе говоря, множество X разбито на "блоки" $X(b) = \varphi^{-1}(b)$ и B – это

множество “блоков”. Скажем, что линейный порядок $<$ на X согласован с этой блочной структурой, если существует такой линейный порядок $<_B$ на B, что $\varphi(x) <_B \varphi(y)$ влечет $x < y$. Иначе говоря, порядок между элементами в блоках $X(b)$ и $X(b')$ диктуется порядком между b и b'. Внутри одного блока ограничений на порядки нет. Такой линейный порядок $<$ однозначно задается порядком $<_B$ и ограничениями $<$ на блоки $X(b)$, $b \in B$. Верно и обратное: если задать произвольные порядки $<_B$ на B и порядки $<_b$ на $X(b)$, то существует (и притом единственный) порядок $<$ на X, согласованный с блочной структурой (и данными $<_B$ и $<_b$). В каком-то смысле множество $\mathbf{L}(\varphi)$ линейных порядков на X, согласованных с блочной структурой $\varphi: X \to B$, – это произведение $\mathbf{L}(B)$ и всех $\mathbf{L}(X(b))$, $b \in B$.

Предложение 3. *Предположим, что заданы:*

а) *область Кондорсе D_B для B,*

б) *области Кондорсе D_b на $X(b)$ для каждого $b \in B$.*

Тогда “произведение” этих областей $D = D_B \times (\times_{b \in B} D_b)$ является областью Кондорсе на X.

Отметим, что примеры, изображенные на рис. 2*b* и 2*c*, были именно такими.

Пользуясь этой достаточно простой конструкцией, П. Фишберн (Fishburn, 1997) для $n = 16$ построил область Кондорсе, размер которой превосходит размер паркетной области. Более точно: разобьем множество [16] на подмножество [8] и на 8 одноэлементных подмножеств (так что размер B равен 9). Возьмем фишберновские области F_8 и F_9. Их размер равен 222 и 488, соответственно. Произведение дает 108 336, что несколько больше, чем 105 884, размер F_{16}[2].

Эту простую конструкцию разбиения на блоки можно итерировать, что приводит к областям Кондорсе размера порядка $(2,17)^n$ для больших n (Fishburn, 1997; Monjardet, 2009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Abello J.M. (1991): The Weak Bruhat Order on S_n, Consistent Sets, and Catalan Numbers // *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. Vol. 4.

Black D. (1948): On the Rationale of Group Decision-Making // *Journal of Polit. Econ.* Vol. 56.

Chameni-Nembua C. (1989): Regle Majoritaire et Distributivite Dans le Permutoedre // *Mathematiques Informatique et Sciences Humaines.* Vol. 108.

Condorcet M. (1785): Essai sur l’application de l’analyse a la Probabilite des Decisions Rendues a la Pluralite des Voix. Paris.

Danilov V., Karzanov A., Koshevoy G. (2009): Tropical Plucker Functions and Their Bases. In: “*Tropical and Idempotent Mathematics*” // *Contemporary Mathematics.* Vol. 495.

Galambos A., Reiner V. (2008): Acyclic Sets of Linear Orders Via the Bruhat Order // *Social Choice and Welfare*. Vol. 30.

Guilbaud G.-Th. (1952): Les theories de l’interet general et le probleme logique de l’agregation // *Ecomomie Appliquee*. Vol. 5. (Рус. перевод см.: Математические методы в социальных науках. М.: Прогресс, 1973.)

Fishburn P. (1997): Acyclic Sets of Linear Orders // *Social Choice and Welfare.* Vol. 14.

Knuth D.E. (1992): Axioms and Hulls. № 606 in Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer-Verlag.

[2] Комментируя этот результат, Д. Саари (Saari, 2009) восклицает: “Какой восхитительный результат! Кроме вклада в долго стоящий вопрос, его теорема создает тайну, взывающую к изучению. Почему она работает? Какие подлежащие математические структуры допускают это условие? Есть ли интуитивный способ воспринять его условие альтернирования? Что магического в $n = 16$? Что происходит между 7 и 16?”.

Monjardet B. (2009): Acyclic Domauns of Linear Orders: a Survey. In: "*The Mathematics of Preference, Choice and Order*". Berlin: Springer. P. 136–160.

Saari D.G. (2009): Condorcet Domains; A geometric Perspective. In: "*The Mathematics of Preference, Choice and Order*". Berlin: Springer. P. 161–182.

Поступила в редакцию
12.02.2010 г.

Condorcet Domains and Rhombus Tilings

V.I. Danilov, A.V. Karzanov, G.A. Koshevoy

Condorcet domain is a set of linear orders on a set of alternatives where a simple majority rule yields no cycles. Using simple geometric figures, the so-called rhombus tiling, the authors construct large Condorcet domains and investigate their properties.

Keywords: linear order, simple majority rule, weak Bruhat order.