ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2010, том 46, № 4, с. 101–107

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

О МОДИФИКАЦИЯХ КОНЕЧНОЙ БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЫ, ИМЕЮЩИХ ВЫПУКЛУЮ СТРУКТУРУ*

© 2010 г. Е.Г. Гольштейн

(Москва)

С бескоалиционной игрой многих лиц естественным образом связывается некоторое отображение. Если это отображение является монотонным, то говорят, что игра имеет выпуклую структуру и для таких игр существуют эффективные численные методы решения. Как правило, конечные бескоалиционные игры в смешанных стратегиях не имеют выпуклой структуры. В статье рассматриваются модификации таких игр, основанные на возмущениях функций выигрышей игроков. Устанавливаются нижние оценки величин возмущений, при которых модифицированная игра приобретает выпуклую структуру. Приводятся два новых необходимых и достаточных условия наличия выпуклой структуры у конечной бескоалиционной игры многих лиц.

Ключевые слова: конечная бескоалиционная игра многих лиц, выпуклая структура игры, монотонное отображение.

1. Пусть X_i – непустое подмножество из евклидова пространства $\mathbf{E}_i$; f_i – функция, определенная конечными вещественными значениями на множестве X, являющемся декартовым произведением множеств $X_1, ..., X_k$, $1 \le i \le k$; $\mathbf{E}$ – декартово произведение евклидовых пространств $\mathbf{E}_1, ..., \mathbf{E}_k$, $k \ge 2$.

Введем бескоалиционную игру Γ с числом игроков k, задаваемую для каждого игрока i множеством его стратегий X_i и функцией выигрышей f_i , $1 \le i \le k$. Одна из основных задач анализа игры Γ связана с отысканием так называемых точек Нэша этой игры, т.е. таких точек $x^* = (x_1^*, ..., x_k^*) \in X$, что

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x_1^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_k^*) = f_i(x^*), \quad 1 \le i \le k.$$

Условимся называть игру Γ выпуклой, если функция f_i, $1 \le i \le k$, определена и непрерывна на множестве $\{x = (x_1, ..., x_k): x_s \in X_s, 1 \le s \le k, x_i \in \tilde{X}_i\}$ и вогнута по $x_i \in \tilde{X}_i$ при любых фиксированных $x_s \in X_s$, $1 \le s \le k$, $s \ne i$, где $\tilde{X}_i$ – выпуклое открытое множество, содержащее X_i. Пусть $X^*(\Gamma)$ – множество всех точек Нэша игры Γ. Если Γ – выпуклая игра, то множество ее точек Нэша $X^*(\Gamma) \ne \varnothing$. Однако из выпуклости игры Γ не вытекает выпуклость $X^*(\Gamma)$. Например, множество $X^*(\Gamma)$ выпуклой игры Γ может состоять из конечного числа точек.

Задача отыскания точек Нэша игры Γ может быть сведена к задаче решения некоторого вариационного неравенства, связанного с Γ. Пусть T – точечно-множественное отображение, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие подмножество $T(x)$ евклидова пространства $\mathbf{E}$. Вариационное неравенство, определяемое отображением T, имеет вид

$$t \in T(x), \ \langle t, x' - x \rangle \ge 0 \ \ \forall x' \in X. \tag{1}$$

Под решением вариационного неравенства (1) понимается такая точка $x^* \in X$, что при некотором $t^* \in T(x^*)$ неравенство $\langle t^*, x' - x^* \rangle \ge 0$ справедливо для всех точек $x' \in X$. Множество всех решений вариационного неравенства (1) обозначим $\overline{X}^*(T)$.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00156).

При анализе вариационного неравенства (1) обычно используются следующие два допущения относительно отображения T.

Условие 1. Множества X и $T(x)$ при любом $x \in X$ являются выпуклыми компактами. Компакты $T(x)$, $x \in X$, равномерно ограничены, отображение $T(x)$ полунепрерывно сверху на X, т.е. если последовательности $x_l \in X$, $t_l \in T(x_l)$ сходятся соответственно к точкам x_0 и t_0, то $t_0 \in T(x_0)$.

Условие 2. Отображение T является монотонным, т.е. при любых x', $x'' \in X$ и $t' \in T(x')$, $t'' \in T(x'')$ справедливо неравенство

$$\langle t' - t'', x' - x''\rangle \geq 0. \tag{2}$$

Для сведения задачи поиска точки Нэша выпуклой игры Г к решению некоторого вариационного неравенства вида (1) свяжем с Г точечно-множественное отображение T_Γ, определяемое соотношением

$$T_\Gamma(x) = \{t = (t_1, ..., t_k): -t_i \in \partial_{x_i} f_i(x),\ 1 \leq i \leq k\},\ x \in X, \tag{3}$$

где $\partial_{x_i} f_i(x)$ – супердифференциал функции f_i по x_i в точке $x \in X$.

Из определений точки Нэша игры Г и решения вариационного неравенства (1) вытекает, что множество $X^*(\Gamma)$ точек Нэша игры Г совпадает с множеством $\overline{X}^*(T_\Gamma)$ решений вариационного неравенства (1) при $T = T_\Gamma$. Поэтому для поиска точек Нэша бескоалиционной игры Г можно использовать методы решения вариационного неравенства (1), определяемого отображением T_Γ. В (Гольштейн, 2002, 2008а) описан достаточно эффективный численный метод решения вариационного неравенства (1), который в предположении, что отображение T удовлетворяет условиям 1, 2, порождает последовательность, сходящуюся к множеству $\overline{X}^*(T)$.

Что касается условия 1, то отображение T_Γ удовлетворяет ему для любой выпуклой бескоалиционной игры Г. К сожалению, это не относится к условию 2. Для того чтобы оно соблюдалось, необходимо наложить на Г достаточно жесткие дополнительные требования.

Будем говорить, что бескоалиционная игра Г имеет выпуклую структуру, если отображение T_Γ удовлетворяет условию 2, т.е. является монотонным.

Свяжем с выпуклой игрой Г ее модификацию $\Gamma(R)$, определяемую функциями выигрышей игроков

$$f_i(x, R_i) = f_i(x) - R_i\|x_i\|^2,\quad x \in X,\ 1 \leq i \leq k, \tag{4}$$

где $R = (R_1, ..., R_k) \geq 0$, $f_i(x)$, $x \in X$, – функция выигрышей игрока i игры Г.

Представляет интерес вопрос о том, при каких значениях векторного параметра R выпуклая игра $\Gamma(R)$ имеет выпуклую структуру. Ответим на этот вопрос для случая конечных бескоалиционных игр Г, рассматриваемых в смешанных стратегиях.

2. Рассмотрим конечные бескоалиционные игры, в которых каждый игрок обладает конечным числом стратегий, т.е. каждое множество X_i состоит из конечного числа точек. Для описания таких игр удобно пользоваться таблицами, элементы которых нумеруются с помощью нескольких индексов (их число равно числу игроков k). Условимся называть такие таблицы k-мерными. Для записи k-мерной таблицы A обозначим $A = (a_{s_1...s_k})_{n_1...n_k}$, где s_α – индекс с номером α, принимающий целые значения от 1 до n_α, $1 \leq \alpha \leq k$; $a_{s_1...s_k}$ – элемент таблицы A, определенный k индексами при значениях s_1, ..., s_k, соответственно. В дальнейшем нам понадобятся суммы элементов таблицы A по нескольким индексам.

Условимся при $p \leq k$ выражение $\sum\limits_{s_1=1}^{n_1} \dots \sum\limits_{s_p=1}^{n_p} a_{s_1...s_k}$ записывать как $\sum\limits_{s_1, ..., s_p} a_{s_1...s_k}$, опуская максимальные значения индексов суммирования, величины которых будут ясны из контекста.

Рассмотрим конечную бескоалиционную игру с числом игроков k, в которой игрок i имеет n_i стратегий, а его функция выигрышей задается с помощью k-мерной таблицы $A_i = (a^{(i)}_{s_1...s_k})_{n_1...n_k}$, где $a^{(i)}_{s_1...s_k}$ – выигрыши игрока i, если игрок α выбирает стратегию s_α, $1 \leq \alpha \leq k$. Если расширить множества стратегий игроков с помощью введения смешанных стратегий, то приходим к выпуклой игре Γ с k участниками, в которой:

$$X_i = \left\{ x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \colon \sum_{j=1}^{n_1} x_{ij} = 1,\ x_{ij} \ge 0,\ j = 1, \ldots, n_i \right\},$$
$$f_i(x) = \sum_{s_1 \ldots s_k} a^{(i)}_{s_1 \ldots s_k} x_{1s_1} \ldots x_{ks_k},\quad 1 \le i \le k,\quad x = (x_1, \ldots, x_k) \in X = X_1 \times \ldots \times X_k. \tag{5}$$

В работах (Гольштейн, 2008б, 2009) получены необходимые и достаточные условия, которые следует наложить на таблицы A_i, определяющие конечную игру Γ, для того чтобы она имела выпуклую структуру. Как показывают результаты исследования, содержащиеся в (Гольштейн, 2008б, 2009), подкласс конечных игр, имеющих выпуклую структуру, чрезвычайно узок. Например, при $k = 2$ выпуклая структура будет только у таких конечных биматричных игр, в которых матрица $A = A_1 + A_2$ суммарных выигрышей игроков может быть представлена в виде

$$A = (a_{s_1 s_2})_{n_1 n_2} = (\alpha'_{s_1} + \alpha''_{s_2})_{n_1 n_2}. \tag{6}$$

Если биматричная игра Γ, определяемая матрицами $A_i = (a^{(i)}_{s_1 s_2})_{n_1 n_2}$, $i = 1, 2$, удовлетворяет требованию (6), то, как нетрудно проверить, ее множество точек Нэша совпадает с множеством седловых точек антагонистической игры $\overline{\Gamma}$ двух лиц (матричной игры), задаваемой матрицей $\overline{A}_1 = (\overline{a}^{(1)}_{s_1 s_2})_{n_1 n_2} = (a^{(1)}_{s_1 s_2} - \alpha''_{s_2})_{n_1 n_2}$. В связи с этим условимся в дальнейшем называть биматричную игру, удовлетворяющую (6), *почти матричной*.

Итак, класс биматричных игр с выпуклой структурой состоит из почти антагонистических игр и практически мало чем отличается от класса матричных игр.

Пусть $A = (a_{ij})_{mn}$ – произвольная матрица, состоящая из m строк и n столбцов, $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}/n$, $v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}/m$, $\overline{a} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}/(mn)$. Введем обозначение

$$r(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - u_i - v_j + \overline{a})^2 \right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Как показано в (Гольштейн, 2008б), неотрицательное число $r(A)$ – значение наилучшего евклидового приближения матрицы A с помощью матриц вида $(\alpha'_i + \alpha''_j)_{mn}$.

С каждой биматричной игрой $\Gamma = \Gamma(A_1, A_2)$, определяемой матрицами выигрышей игроков A_1, A_2 и рассматриваемой в смешанных стратегиях, свяжем ее модификацию $\Gamma(\overline{R}) = \Gamma(A_1, A_2, \overline{R})$, где $\overline{R}$ – неотрицательный параметр. Игра $\Gamma(\overline{R})$ задается функциями выигрышей игроков $f_i(x_1, x_2, \overline{R}) = x_1 A_i x_2 - 0.5\overline{R}\| x_i \|^2$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2$.

Как показано в (Гольштейн, 2008б), выпуклая игра $\Gamma(A_1, A_2, \overline{R})$ имеет выпуклую структуру, если $\overline{R} \ge 0.5r(A_1 + A_2)$. В п. 3 мы займемся распространением этого результата на игры Γ, определяемые соотношениями (5), в которых число игроков $k > 2$.

3. Рассмотрим игру $\Gamma = \Gamma(A_1, \ldots, A_k)$, задаваемую согласно (5) набором таблиц A_i, $1 \le i \le k$. Под модификацией игры Γ будем понимать игру $\Gamma(R) = \Gamma(A_1, \ldots, A_k, R)$, в которой игрок i имеет функцию выигрышей

$$f_i(x_1, \ldots, x_k, R_i) = \sum_{s_1 \ldots s_k} a^{(i)}_{s_1 \ldots s_k} x_{is_1} \ldots x_{ks_k} - 0.5R_i \|x_i\|^2,\ x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \in X_i, \tag{8}$$

$1 \le i \le k$, где $R = (R_1, \ldots, R_k) \ge 0$ – векторный параметр модификации.

Для того чтобы сформулировать первую вспомогательную лемму, необходимую для анализа игры $\Gamma(R)$, введем обозначения. Пусть (i, j) – пара различных целых чисел, расположенных на $[1, k]$; r – целое число из отрезка $[1, k-1]$. Рассмотрим функции $q(t)$, определенные на множестве целых чисел t отрезка $[1, k-1]$, за исключением $t = r$, и принимающие различные ($q(t') \ne q(t'')$, $t' \ne t''$) целые значения из отрезка $[1, k]$, за исключением $q(t) = i$ и $q(t) = j$. Множество таких функций $q(t)$ обозначим $Q(i, j, r)$.

Очевидно, что $Q(i, j, r)$ состоит из $(k-2)!$ элементов. Для любых целых $i \neq j$ из отрезка $[1, k]$, целого r из отрезка $[1, k-1]$ и функции $q(t) \in Q(i, j, r)$ введем функцию $\varphi_i(x', x''; j, r, q)$, положив для произвольных $x' = (x'_1, \ldots, x'_k)$, $x'' = (x''_1, \ldots, x''_k) \in X$:

$$\varphi_i(x', x''; j, r, q) = f_i(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{s_1 \ldots s_k} a^{(i)}_{s_1 \ldots s_k} x_{1s_1} \ldots x_{ks_k}, \tag{9}$$

где

$$x_l = \begin{cases} x'_l, & l = q(t), \quad 1 \le t \le r-1, \\ x''_l, & l = q(t), \quad r+1 \le t \le k-1, \\ x'_l - x''_l, & l = i, j. \end{cases}$$

Обозначим

$$\varphi_i(x', x''; j, r, q) + \varphi_j(x', x''; i, r, q) = \varphi_{ij}(x', x''; r, q). \tag{10}$$

Очевидно, что $\varphi_{ij}(x', x''; r, q) = \varphi_{ji}(x', x'', r, q)$.

Лемма 1. *Если множество стратегий X_i игроков игры Γ и функции их выигрышей $f_i(x)$ определяются соотношением* (5)*, то при любых $x', x'' \in X = X_1 \times \ldots \times X_k$ имеет место равенство*

$$\Delta(x', x'') = \sum_{i=1}^{k} \left\langle f'_{ix_i}(x') - f'_{ix_i}(x''), x'_i - x''_i \right\rangle = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{1 \le i < j \le k} \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{q \in Q(i,j,r)} \varphi_{ij}(x', x''; r, q). \tag{11}$$

Доказательство. Согласно (5) для $1 \le i \le k$ можем записать

$$\Delta_i(x', x'') = \left\langle f'_{ix_i}(x') - f'_{ix_i}(x''), x'_i - x''_i \right\rangle =$$

$$= \sum_{s_1 \ldots s_k} a^{(i)}_{s_1 \ldots s_k} (x'_{is_i} - x''_{is_i})(x'_{1s_1} \ldots x''_{i-1, s_{i-1}} x'_{i+1, s_{i+1}} \ldots x'_{ks_k} - x''_{1s_1} \ldots x''_{i-1, s_{i-1}} x''_{i+1, s_{i+1}} \ldots x''_{ks_k}). \tag{12}$$

Рассмотрим функции $\overline{q}(t)$, определенные на целых числах отрезка $[1, k-1]$ и принимающие различные целые значения $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k$. Пусть $\overline{Q}(i)$ – множество таких функций. Очевидно, что $\overline{Q}(i)$ состоит из $(k-1)!$ элементов, $1 \le i \le k$. Для любых целых i, r, $1 \le i \le k$, $1 \le r \le k-1$, и $\overline{q}(t) \in \overline{Q}(i)$ введем функцию $\overline{\varphi}_i(x', x''; r, \overline{q})$, положив для произвольных $x' = (x'_1, \ldots, x'_k)$, $x'' = (x''_1, \ldots, x''_k) \in X$

$$\overline{\varphi}_i(x', x''; r, \overline{q}) = \sum_{s_1 \ldots s_k} a^{(i)}_{s_1 \ldots s_k} x_{1s_1} \ldots x_{ks_k}, \tag{13}$$

где

$$x_l = \begin{cases} x'_l, & l = \overline{q}(t), \quad 1 \le t \le r-1, \\ x''_l, & l = \overline{q}(t), \quad r+1 \le t \le k, \\ x'_l - x''_l, & l = \overline{q}(r), i. \end{cases}$$

В наших дальнейших рассуждениях будем опираться на следующее легко проверяемое тождество:

$$b'_1 \ldots b'_{k-1} - b''_1 \ldots b''_{k-1} = (b'_1 - b''_1) b''_2 \ldots b''_{k-1} + \ldots + b'_1 \ldots b'_{k-2}(b'_{k-1} - b''_{k-1}). \tag{14}$$

Воспользуемся тождеством (14) при $b'_t = x'_{\overline{q}(t)s_{\overline{q}(t)}}$, $b''_t = x''_{\overline{q}(t)s_{\overline{q}(t)}}$, $1 \le t \le k-1$, для различных значений индексов $s_{\overline{q}(t)}$. Из равенства (12) и определения (13) функций $\overline{\varphi}(x', x''; r, \overline{q})$ получаем

$$\Delta_i(x', x'') = \sum_{r=1}^{k-1} \overline{\varphi}_i(x', x''; r, \overline{q}), \qquad \overline{q} \in \overline{Q}(i), \ 1 \le i \le k,$$

откуда следует равенство

$$\Delta_i(x', x'') = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\overline{q} \in \overline{Q}(t)} \sum_{1 \le r \le k-1} \overline{\varphi}_i(x', x''; r, \overline{q}), \ 1 \le i \le k. \tag{15}$$

Если вспомнить определения функций $q \in Q(i, j, r)$ и $\overline{q} \in \overline{Q}(i)$, а также соотношения (9) и (13), то равенство (15) можно переписать в эквивалентном виде

$$\Delta_i(x', x'') = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\substack{1 \le j \le k, \\ j \ne i}} \sum_{1 \le r \le k-1} \sum_{q \in Q(i, j, r)} \varphi_i(x', x''; j, r, q), \ 1 \le i \le k. \qquad (16)$$

Из (10) и (16) следует, что $\Delta(x', x'') = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i(x', x'')$ можно представить в виде (11) при любых $x', x'' \in X$.

Рассмотрим биматричную игру $\Gamma(A_1, A_2)$, и пусть $A = A_1 + A_2$ – матрица суммарных выигрышей обоих игроков.

Лемма 2. *Для произвольных* $x_i', x_i'' \in X_i$, $i = 1, 2$, *имеет место неравенство*

$$|(x_1' - x_1'')^* A(x_2' - x_2'')| \le 0.5r(A)(||(x_1' - x_1''||^2 + ||(x_2' - x_2''||^2), \qquad (17)$$

где X_i *– множество смешанных стратегий игрока* i, *число* $r(A)$ *определено соотношением* (7), *знак* "*" *обозначает операцию транспонирования*.

Доказательство леммы 2 приведено в работе (Гольштейн, 2008б).

Для любой пары (i, j), $i < j$, игроков игры $\Gamma = \Gamma(A_1, ..., A_k)$ условимся под $x(i, j)$ понимать набор смешанных стратегий остальных $k - 2$ игроков. Множество таких наборов обозначим $X(i, j)$. Таким образом, $x(i, j) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_k)$, $X(i,j)$ – декартово произведение множеств X_α смешанных стратегий игроков α при $1 \le \alpha \le k$, $\alpha \ne i, j$. При фиксированном наборе $x(i, j) \in X(i, j)$ игра Γ порождает биматричную игру $\Gamma(x(i, j))$ с игроками i и j $(i < j)$, определяемую матрицами $A_i(x(i, j))$ и $A_j(x(i, j))$, где

$$A_t(x(i, j)) = \sum_{s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_{j-1} s_{j+1} \dots s_k} a^{(t)}_{s_1 \dots s_k} x_{s_1} \dots x_{s_{i-1}} x_{s_{i+1}} \dots x_{s_{j-1}} x_{s_{j+1}} \dots x_{s_k}. \qquad (18)$$

Согласно (18) матрицы $A_i(x(i, j))$ и $A_j(x(i, j))$ имеют n_i строк и n_j столбцов. Пусть $A_{ij}(x(i, j)) = A_i(x(i, j)) + A_j(x(i, j))$ – матрица суммарных выигрышей игроков в биматричной игре $\Gamma(x(i, j))$. Среди наборов $x(i, j)$ смешанных стратегий игроков выделим наборы чистых стратегий $s(i, j)$, состоящих из чистых стратегий s_α игроков α при $\alpha \ne i, j$. Множество этих наборов обозначим $S(i, j)$. Очевидно, что $S(i, j)$ состоит из $\prod_{1 \le \alpha \le k, \, \alpha \ne i, j} n_\alpha$ элементов.

При любых $1 \le i < j \le k$ под $\Gamma(s(i, j))$ условимся понимать биматричную игру, в которой участвуют игроки i, j, а остальные $k - 2$ игрока игры Γ зафиксировали свои чистые стратегии из набора $s(i, j) \in S(i, j)$.

Пусть $A_{ij}(s(i, j)) = (a^{(i)}_{s_i s_j s(i,j)}) + (a^{(j)}_{s_i s_j s(i,j)})$ – матрица суммарных выигрышей игроков в биматричной игре $\Gamma(s(i, j))$. Положим при произвольных i, j, $1 \le i < j \le k$,

$$r_{ij} = \max_{s(i,j) \in S(i,j)} r(A_{ij}(s(i, j))), \qquad (19)$$

где $r(A)$ для любой матрицы A определяется соотношением (7).

Лемма 3. *Если* $1 \le i < j \le k$, $x(i, j) \in X(i, j)$, *то*

$$r(A_{ij}(x(i, j))) \le r_{ij}. \qquad (20)$$

Доказательство. Согласно (7) число $r^2(A_{ij}(x(i, j)))$ равно сумме квадратов элементов матрицы A_{ij}', каждый из которых линейно зависит от любой из смешанных стратегий x_α, составляющих $x(i, j)$. Следовательно, $r(A_{ij}(x(i, j)))$ является выпуклой функцией любой из переменных $x_\alpha \in X_\alpha$, $1 \le \alpha \le k$, $\alpha \ne i, j$. Отсюда и из (19) вытекает, что

$$\max_{x(i,j) \in X(i,j)} r(A_{ij}(x(i, j))) \le r_{ij}.$$

Сформулируем основной результат этой работы в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma = \Gamma(A_1, ..., A_k)$ *– конечная бескоалиционная игра с k участниками в смешанных стратегиях, определяемая набором таблиц* A_i, *выигрышей игроков согласно* (5), $\Gamma(R) = \Gamma(A_1, ..., A_k, R)$ *– модификация игры* Γ, *задаваемая соотношением* (8),

$$R_i^* = 0.5\left(\sum_{i<j\le k} r_{ij} + \sum_{1\le j<i} r_{ji}\right), \tag{21}$$

где числа r_{ij}, $1 \le i < j \le k$, *определяются формулой* (19), $R = (R_1, ..., R_k)$, $R^* = (R_1^*, ..., R_k^*)$. *Если* $R \ge R^*$, *то модифицированная игра* $\Gamma(R)$ *порождает согласно* (3) *монотонное отображение* $T_{\Gamma(R)}$, *т.е. имеет выпуклую структуру.*

Доказательство. Пусть $x', x'' \in X = X_1 \times ... \times X_k$. Оценим выражение $|\Delta(x', x'')| = \left|\sum_{i=1}^{k}\left\langle f'_{ix_i}(x') - f'_{ix_i}(x''), x'_i - x''_i\right\rangle\right|$. Рассмотрим величину $\varphi_{ij}(x', x''; r, q)$ при любых $1 \le i<j \le k$, $1 \le r \le k-1$, $q \in Q(i, j, r)$, задаваемую с помощью соотношений (9), (10). Согласно (9) и (10):

$\varphi_{ij}(x', x''; r, q) = (x'_i - x''_i)^* A_{ij}(x(i, j))(x'_j - x''_j)$, где

$$x_l(i,j) = \begin{cases} x'_l, & l = q(t), \quad 1 \le t \le r-1, \\ x''_l, & l = q(t), \quad r+1 \le t \le k-1. \end{cases}$$

Следовательно, по лемме 2 имеем

$$|\varphi_{ij}(x', x''; r, q)| \le 0.5 r(A_{ij}(x(i,j)))(||x'_i - x''_i||^2 + ||x'_j - x''_j||^2). \tag{22}$$

Из (22) и леммы 3 вытекает оценка

$$|\varphi_{ij}(x', x''; r, q)| \le 0.5 r_{ij}(||x'_i - x''_i||^2 + ||x'_j - x''_j||^2). \tag{23}$$

Воспользуемся теперь леммой 1, согласно которой

$$|\Delta(x', x'')| \le \frac{1}{(k-1)!}\sum_{1\le i<j\le k}\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{q\in Q(i,j,r)} |\varphi_{ij}(x', x''; r, q)|. \tag{24}$$

Из (23), (24) и того, что число слагаемых в правой части (24) при фиксированных $i < j$ равно $(k-1)!$, получаем

$$|\Delta(x', x'')| \le 0.5 \sum_{1\le i<j\le k} r_{ij}(||x'_i - x''_i||^2 + ||x'_j - x''_j||^2). \tag{25}$$

Поскольку

$$\Delta(x', x'', R) = \sum_{i=1}^{k}\left\langle f'_{ix_i}(x', R_i) - f'_{ix_i}(x'', R_i), x'_i - x''_i\right\rangle = \Delta(x', x'') - \sum_{i=1}^{k} R_i ||x'_i - x''_i||^2,$$

то с учетом (25) можно записать

$$\Delta(x', x'', R) \le 0.5 \sum_{1\le i<j\le k} r_{ij}(||x'_i - x''_i)||^2 + ||x'_j - x''_j||^2) - \sum_{i=1}^{k} R_i ||x'_i - x''_i||^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left[0.5\left(\sum_{i<j\le k} r_{ij} + \sum_{1\le j<i} r_{ij}\right) - R_i\right]||x'_i - x''_i||^2 = \sum_{i=1}^{k}(R_i^* - R_i)\,||x'_i - x''_i|^2 \le 0,$$

если $R_i \ge R_i^*$, $1 \le i \le k$.

Полученное неравенство справедливо для произвольных $x', x'' \in X$. Следовательно, отображение $T_{\Gamma(R)}$, связанное с игрой $\Gamma(R)$ согласно (3), является монотонным, а игре $\Gamma(R)$ свойственна выпуклая структура, если $R \ge R^*$.

В (Гольштейн, 2009) был выделен подкласс конечных бескоалиционных игр с выпуклой структурой. Приводимое ниже утверждение содержит еще два необходимых и достаточных условия принадлежности конечной бескоалиционной игры к этому подклассу.

Теорема 2. *Следующие три утверждения равносильны:*

1) *игра* Γ, *определяемая соотношениями* (5), *имеет выпуклую структуру;*

2) *при произвольных* $1 \leq i < j \leq k$ *и* $s(i, j) \in S(i, j)$ *биматричная игра* $\Gamma(s(i, j))$ *является почти матричной;*

3) $r(\Gamma) = \max\limits_{1 \leq i \leq k} R_i^* = 0.$

Доказательство. Нам достаточно проверить, что из 1) следует 2), из 2) следует 3), а из 3) следует 1).

1) $\to$ 2). Нетрудно проверить, что при выполнении утверждения 1 при любых $1 \leq i < j \leq k$ и $s(i, j) \in S(i, j)$ биматричная игра $\Gamma(s(i, j))$ имеет выпуклую структуру и, следовательно, согласно теореме 1 работы (Гольштейн, 2008б) является почти матричной.

2) $\to$ 3). Согласно утверждению 2 при любых $1 \leq i < j \leq k$, $s(i, j) \in S(i, j)$ матрица $A_{ij}(s(i, j))$ суммарных выигрышей игроков игры $\Gamma(s(i, j))$ удовлетворяет требованию (6). Поэтому $r(A_{ij}(s(i, j))) = 0$, откуда с учетом (19) и (21) вытекает утверждение 3.

3) $\to$ 1). Поскольку $R_i^* = 0$, $1 \leq i \leq k$, то по теореме 1 игра $\Gamma = \Gamma(0)$ имеет выпуклую структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гольштейн Е.Г. (2002): Метод решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями // *Журнал вычислительной математики и мат. физики*. Т. 42. № 7.

Гольштейн Е.Г. (2008а): Метод решения вариационных неравенств, использующий неточные исходные данные // *Экономика и мат. методы*. Т. 44. № 3.

Гольштейн Е.Г. (2008б): О монотонности отображения, связанного с неантагонистической игрой двух лиц // *Экономика и мат. методы*. Т. 44. № 4.

Гольштейн Е.Г. (2009): О монотонности отображения, связанного с бескоалиционной игрой многих лиц // *Журнал вычислительной математики и мат. физики*. Т. 49. № 9.

Поступила в редакцию
12.03.2010 г.

On Convex Structured Modifications of Finite Non-Coalition Games

Ye.G. Golshtein

Certain mapping can be naturally associated with each non-coalition many-persons game. If the mapping is monotone, the game is said to have a convex structure. Eefficient numerical methods exist to solve the games having the convex structure. However, as a rule, finite non-coalition games with mixed strategies have no convex structure. We propose to modify such games by perturbing the players' payoff functions, and we establish the lower rates for the perturbation values providing the modified games acquire the convex structure. Also, we present two new necessary and sufficient terms for a finite non-coalition many-persons game has a convex structure.

Keywords: finite non-coalition many-persons game, convex structure of game, monotone mapping.