
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ АДАПТАЦИЯ И ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОМЫСЕЛ РЫБНЫХ ПОПУЛЯЦИЙ

© 2014 г. В.Г. Ильичев, В.В. Ильичева¹

(Ростов-на-Дону)

В рамках дискретной модели процесс перемещения рыбной популяции задается конечномерной марковской матрицей. Формализовано изменение данной матрицы как средство адаптации ее к состоянию кормовых ресурсов и управлению. Численно обнаружена ключевая характеристика пространственной адаптации – это вектор распределения времен пребывания популяции в районах водоема. Оказалось, что этот вектор является собственным положительным (перроновским) вектором финальной матрицы перемещения.

Ключевые слова: миграция, матрица, адаптация, оптимальный промысел, перроновский вектор.

Классификация JEL: Q57.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема оптимального вылова является популярной темой как в теоретических, так и в прикладных исследованиях (Скалецкая и др., 1979; Clark, 1985; Абакумов, 1993; Ильичев и др., 2000). Как правило, используются жесткие постановки задачи, в которых характеристики популяций при эксплуатации предполагаются неизменными.

В биологии, в отличие от технических систем, управление вызывает адаптивный ответ не только отдельных элементов, но и всей структуры в целом. Так, при длительном многолетнем вылове рыбных популяций происходит измельчение особей, что уменьшает вероятность попадания их в сети; а также изменение маршрута пространственной миграции рыбного стада. Последнее обстоятельство имеет экономическое значение для стран, ведущих одновременный промысел на одном водоеме. Поэтому важно построение оптимального вылова с учетом адаптивного пространственного поведения рыбных популяций.

В данной задаче перемещение рыбного стада определяется некоторой неотрицательной матрицей M , которая в зависимости от факторов среды и управления может эволюционировать до некоторой финальной матрицы M^* . При исследовании обнаружено, что ключевое значение имеет (*перроновский*) вектор π , который оказывается неотрицательным собственным вектором финальной матрицы M^* . Компоненты π соответствуют временам пребывания популяции в соответствующих районах.

В рамках единой модели трудно одновременно соединить процессы вылова (блок “Вылов”) и адаптации (блок “Адаптация”). Ситуация упрощается, когда в модели поочередно задействованы указанные процедуры. В данной статье реализован такой последовательный подход, с помощью которого исследуется эволюционный ответ популяции на управление. В частности, покинет ли популяция тот район, где производится значительный вылов?

¹ Авторы искренне благодарны рецензету за полезные рекомендации.

2. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ МИГРАЦИИ

Пусть модель акватории водоема разбита на n районов, тогда передвижение рыбной популяции может быть задано линейным оператором $X^{t+1} = MX^t$, где компонента i вектор-столбца X представляет текущую (т.е. в момент времени t) биомассу популяции в районе i . В целях экономии места будем записывать все вектор-столбцы в строчной форме. Предположим, что временной шаг достаточно большой, а рыба передвигается довольно быстро. Поэтому рыбная стая за единицу времени может попасть из одного района в любой другой. В матрице $M = (m_{ij})$ размера $n \times n$ каждый элемент m_{ij} можно трактовать как вероятность перехода из j в i . Обычно, чем дальше эти районы друг от друга, тем меньше m_{ij} . С учетом закона сохранения массы сумма элементов в каждом столбце M равна единице и $m_{ij} \geq 0$. Матрицы маршрута миграции M принято называть марковскими. Отметим, что эта схема допускает естественное усиление: матрица M может зависеть от сезона или факторов среды (течения, температуры и солености).

Считаем, что чистое воспроизводство – смертность в популяции – задается нелинейным оператором $X^{t+1} = F(X^t)$, в котором все компоненты вектор-отображения $F = (f_1, \dots, f_n)$ являются монотонно возрастающими, вогнутыми, гладкими положительными функциями одной переменной. По сути, данная система оказывается набором независимых одномерных разностных уравнений

$$x_i^{t+1} = f_i(x_i^t), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n$. Из естественного условия $f_i(0) = 0$ вытекает представление $f_i(x) = x\varphi_i(x)$ при некоторой гладкой функции $\varphi_i(x)$. Кроме того, из вогнутости функции $f_i(x)$ следует, что скорость роста $\varphi_i(x)$ строго уменьшается с ростом x . Например $f(x) = x(d + r/(1+x))$ при положительных параметрах d и r .

Пусть выполняются неравенства $\varphi_i(0) > 1$ и $\varphi_i(\infty) < 1$ для всех i . Так, в приведенном примере $f(x) = x(d + r/(1+x))$ эти условия эквивалентны неравенствам $d + r > 1$ и $d < 1$. При данных ограничениях в одномерной модели (1) существует единственное положительное равновесие, глобально устойчивое в R_+ .

Последовательное действие процессов воспроизводства и миграции приводит к модели (с более крупным временным шагом):

$$X^{t+1} = M \circ F(X^t). \quad (2)$$

Далее под термином *глобальная устойчивость* некоторого положительного равновесия будем подразумевать его способность притягивать к себе все фазовые точки из положительного конуса R_+^n . Пусть θ – положительное равновесие в (2), т.е. $\theta = M \circ F(\theta)$. Тогда справедливо следующее утверждение (Ильичев, 2011, с. 129).

Предложение 1. Точка θ глобально устойчива в R_+^n .

При дальнейшем изложении важную роль играют геометрические свойства семейства марковских матриц. Так, матрицу M можно изобразить точкой, координаты которой упорядочены по её строкам. Например, для $n = 2$ данное соответствие имеет вид:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \rightarrow (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}).$$

Множество таких точек образует замкнутый, ограниченный и выпуклый многогранник S в евклидовом пространстве размерности n^2 . Диаметром S является наибольшее евклидово расстояние между его двумя точками. В силу компактности S , диаметр всегда существует и реализуется на двух конкретных точках. Для семейства марковских $n \times n$ -матриц диаметр равен n .

Множество вершин S образуют специальные матрицы $\{E_i\}$. В работе (Ильичев, 2007, с. 97) показано, что *марковская матрица является вершиной S , если и только если в каждом ее столбце находится одна 1, а остальные элементы равны 0.*

Каждая внутренняя точка S является выпуклой комбинацией его вершин. Поэтому матричные вершины составляют своеобразный базис в семействе марковских матриц. Их число

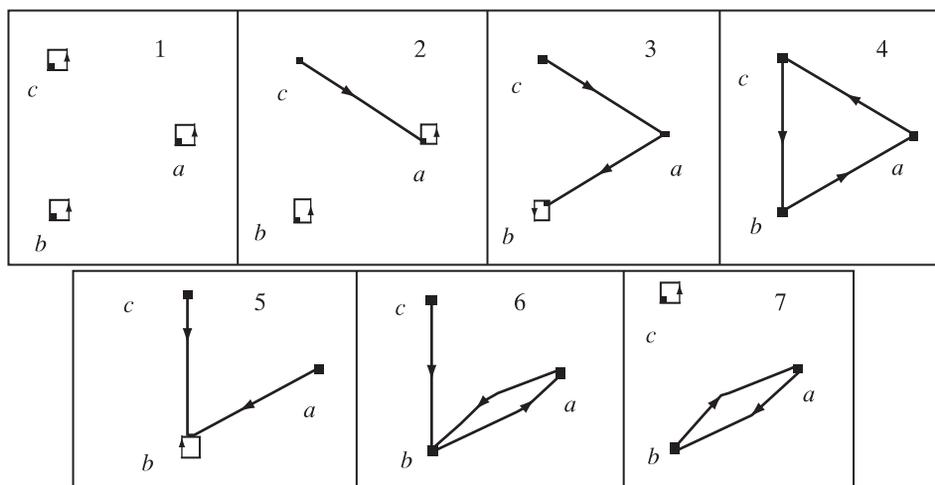


Рисунок. Графы базисных матриц из списка (4), набор $\{a, b, c\}$ является некоторой перестановкой чисел во множестве $\{1, 2, 3\}$

равно n^n . Всякая базисная матрица $M = (m_{ij})$ задает свой маршрут передвижения. Наглядно маршрут можно изобразить в виде графа из n точек: при $m_{ij} = 1$ строим стрелку (ориентированное ребро) из точки j в точку i , а при $m_{ij} = 0$ никаких переходов не возникает (Робертс, 1986, гл. 2).

При $n = 2$ существуют четыре базисные матрицы:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Будем считать, что графы имеют один и тот же тип, если они совпадают при изменении нумерации вершин. Так, в (3) E_1 и E_4 – матрицы одного типа, а остальные матрицы имеют попарно разный тип.

При $n = 3$ существуют двадцать семь базисных матриц, графы которых сводятся к следующим 7 типам (рисунок):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все остальные графы базисных матриц получаются из графов типичных матриц (4) перенумерацией их вершин.

Разумеется, основная характеристика маршрута – это набор его поглощающих состояний и циклов. Спустя конечное время популяция попадает в одну из поглощающих структур (состояние или цикл). Пути, ведущие в поглощающую структуру, играют здесь второстепенную роль.

3. МЕХАНИЗМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АДАПТАЦИИ

Предположим, что перемещение исходной популяции Y задается некоторой матрицей M_0 . А ее корм описывается положительным вектором $K = (k_1, \dots, k_n)$, который преобразуется своей невырожденной матрицей N : $K \rightarrow NK$. Для простоты считаем, что популяция потребляет, но не выдает компоненты K (т.е. все k_i сразу восстанавливаются).

Наряду с исходной популяцией Y зададим популяцию-мутанта Z со своей маршрутной матрицей $M_1 = (1 - \delta)M_0 + \delta N$, здесь δ – положительно и мало. Поскольку в любой норме выполняется неравенство $\|M_1 - N\| \leq (1 - \delta)\|M_0 - N\|$, маршрут мутанта по сравнению с движением исходной популяции ближе к маршруту движения корма. В этой связи будет ли более приспособленный к корму (так называемый N -близкий) мутант побеждать исходную популяцию в конкурентной борьбе?

В качестве тестового примера рассмотрим модель конкуренции исходной популяции $Y = (y_1, \dots, y_n)$ и ее близкой мутантной формы $Z = (z_1, \dots, z_n)$. Понятие *близости* означает, что популяции оказывают друг на друга одинаковое конкурентное давление. Поэтому динамика их биомасс имеет вид:

$$y_i^{t+1} = y_i^t \varphi_i(y_i^t + z_i^t), \quad z_i^{t+1} = z_i^t \varphi_i(y_i^t + z_i^t), \quad i = 1, \dots, n.$$

В трофической функции $\varphi_i(q) = d + rk_i/(k_i + q)$ коэффициент смертности $(1 - d)$ заключен в диапазоне $(0, 1)$; r – скорость роста. Предположим, что содержание корма в районах может изменяться (но не выедаться) в результате перемешивания.

Данные популяции-конкуренты имеют одинаковые экологические характеристики и отличаются только маршрутами миграции, поэтому влияние корма на них, в целом, разное. При расчетах в качестве маршрутов были взяты базисные матрицы из списков (3) для $n = 2$ и (4) для $n = 3$. В результате компьютерных экспериментов обнаружено, что *исходная популяция никогда не вытесняет N -близкого мутанта; в большинстве случаев данный мутант вытесняет исходную популяцию; иногда они сосуществуют.*

Механизм пространственной адаптации популяции можно реализовать посредством задания конкурентного отбора в сообществе исходной популяций W_0 и ее мутантов $\{W_1, \dots, W_m\}$. Такой подход соответствует идеологии эволюционного моделирования (Фогель и др., 1969). Обозначим через $\{L_1, \dots, L_m\}$ маршруты миграции мутантов, которые мало отличаются от M_0 -маршрута исходной популяции. Разумеется, таких матриц мутантов существует бесконечное множество. Поэтому следует выделить конечный, но представительный набор матриц. Например, положим:

$$L_i = (1 - \delta)M_0 + \delta E_k, \quad (5)$$

где δ – положительно и мало, а E_k – одна из базисных матриц с номером k . Отметим, что для каждого i случайным образом выбирается свой номер k . Несмотря на довольно ограниченный выбор возможных направлений изменения исходной матрицы, при каждом фиксированном ε из $(0, 1)$ справедлива следующая теорема (Ильичев, 2012, с. 20).

Предложение 2. Любую марковскую матрицу M^* можно сколь угодно точно получить из M_0 с помощью подходящей композиции формул вида $M \rightarrow (1 - \varepsilon)M + \varepsilon E_k$ при подходящих k .

Когда биомасса одного из мутантов, например W_1 , существенно (например, в 10 раз) превышает биомассу исходной популяции W_0 , тогда деформируем матрицу M_0 в сторону матрицы данного удачного мутанта W_1 :

$$M_0 \rightarrow (1 - \varepsilon)M_0 + \varepsilon L_1, \quad (6)$$

где скорость адаптации ε положительна и мала. Если таких доминирующих мутантов оказывается несколько штук, выбираем мутанта с наибольшей биомассой. По сути, так реализуется одна из возможных ветвей эволюционного процесса. Наконец, когда процесс генерации многократно не приводит к возникновению существенных доминант, поиск (так называемой *эволюционно-устойчивой*) матрицы M^* прекращается. Поэтому исходная популяция с маршрутом M^* не проигрывает своим мутантам в конкурентной борьбе.

Пусть состав мутантов фиксирован и равен $m = n^n$. Здесь преобразование M_0 происходит в сторону маршрута самого многочисленного из существенно доминирующих мутантов. После этого согласно (6) происходит пересчет маршрутов и остальных мутантов. Если, начиная с какого-то момента времени, перестали возникать доминирующие мутанты, то процесс адаптации является завершённым.

При $n = 2$ имеем $m = 4$. Согласно (6) маршрут каждого мутанта – это малая деформация движения исходной популяции при подходящем выборе E_k . В целях сокращения времени компьютерных вычислений можно выбирать меньшее значение m .

При анализе модельного процесса пространственной адаптации в системе “корм K – хищник Y ” возникает вопрос, *если маршрут корма описывается матрицей N , то каким будет вид предельной матрицы M^* -маршрута популяции Y .*

Чтобы эффективно питаться, популяция должна синхронно плавать с кормом, поэтому вполне естественно выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Матрицы M^* и N должны быть очень похожи.*

Для ее проверки проведем модельные эксперименты для водоема, разбитого на два района. Были выбраны следующие параметры и функции: $\delta = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $k_1 = 6$, $k_2 = 4$ (корм в районах 1 и 2);

$$\varphi_i(q) = 0,9 + \frac{2k_i}{k_i + q}, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь $i = 2$ – максимальная скорость роста, одинаковая для всех районов.

1. *Подтверждающий пример.* При $n = 2$ матрица движения корма N задавалась из базисного списка (3). Оказалось, что финальная матрица M^* мало зависит от задания начальной матрицы

M_0 . Так, при $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеют место переходы:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_1^* \approx \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M_2^* = \begin{pmatrix} 0,92 & 0,92 \\ 0,08 & 0,08 \end{pmatrix},$$

что подтверждает справедливость гипотезы 1.

2. *Опровергающий пример и модификация гипотезы 1.* Предварительно отметим, что у неотрицательных марковских матриц N всегда имеется неотрицательный неподвижный вектор π , удовлетворяющий условию $N\pi = \pi$. В дальнейшем такой вектор π будем называть перроновским. Удобно считать вектор π нормированным, т.е. сумма его компонент равна единице. Например,

для матрицы $\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$ получаем $\pi = \begin{pmatrix} b/c \\ a/c \end{pmatrix}$, где $c = a + b$.

Согласно теореме Перрона (Беллман, 1976, глава 16) следует, что положительная марковская матрица имеет единственный положительный перроновский вектор.

У ряда хороших матриц с нулевыми элементами, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

тоже имеется единственный собственный неотрицательный вектор.

Гораздо реже существуют плохие матрицы с нулями, у которых находятся сразу несколько перроновских векторов, например $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Если π – единственный перроновский вектор матрицы M , то его компоненты характеризуют относительное время пребывания популяции в соответствующем районе. Далее запись $M_k^* \Rightarrow \pi^k$ означает, что π^k – перроновский вектор матрицы M_k^* .

Пусть водоем разбит на три района. Положим $k_1 = 6$, $k_2 = 5$, $k_3 = 4$ – кормовые ресурсы в районах 1–3; $\varphi_i(z) = 0,9 + 2k_i/(k_i + z)$ при $i = 1, 2, 3$.

Положим

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

циклическое движение корма по всем районам. Очевидно, ее перрроновский вектор имеет вид

$$\pi = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

В результате расчетов обнаружены следующие соответствия:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_1^* \approx \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0,0 & 0,3 & 0,6 \\ 0,6 & 0,3 & 0,0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi^1 \approx \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_2^* \approx \begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,0 & 0,3 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi^2 \approx \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{pmatrix},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M_3^* \approx \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,0 \\ 0,3 & 0,0 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi^3 \approx \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что финальные матрицы не похожи на матрицу N . Это опровергает гипотезу 1.

На множестве всех векторов определим чебышевскую метрику. Так, для двух произвольных векторов π^N и π^M положим:

$$\|\pi^N - \pi^M\| = \max\{|\pi_1^N - \pi_1^M|, \dots, |\pi_n^N - \pi_n^M|\}. \quad (8)$$

Здесь расстояние между полученными ранее перрроновскими векторами составляет не более 0,1. Аналогичные расчеты для других матриц показали, что в типичном случае выполняется следующая гипотеза.

Гипотеза 2. Перрроновские вектора хорошей матрицы N и всех предельных матриц M_i^* почти совпадают между собой.

В работе (Ильичев, 2012, с. 25) исследовалась задача пространственной коадаптации в системе “хищник – жертва”. Оказалось, что перрроновские вектора финальных матриц миграции данных популяций почти совпадают.

Таким образом, время пребывания в том или ином районе является основным фактором пространственной адаптации популяций.

4. ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫЛОВ В ОДНОМ РАЙОНЕ И АДАПТАЦИЯ МАРШРУТА

Рассмотрим водоем, например Азовское море, который условно разделен на два района (украинская и российская части) с одинаковыми экологическими характеристиками. Пусть вылов u осуществляется только во втором районе. Это соответствует дополнительному преобразованию фазового вектора: $(y_1, y_2) \rightarrow (y_1, y_2 - u)$, где y_i – биомасса популяции в районе i . Остальные процессы – нелинейный рост и линейная миграция – реализуются как и ранее.

Как повлияет стратегия многолетнего оптимального вылова на маршрут миграции популяции? Предполагаем, что в каждый момент времени численность корма и популяции характеризуется двумерными векторами $K = (k_1, k_2)$ и $Y = (y_1, y_2)$ соответственно. Под действием факторов

роста и передвижения изменяется вектор Y , а вектор K для простоты изложения будет жестко фиксирован. Решение поставленной задачи опирается на последовательную работу двух блоков – “Оптимизация” и “Адаптация”. Суть их заключается в следующем.

1. Блок “Оптимизация”. Вылов u^t в момент времени t назовем *допустимым*, если выполняется неравенство $0 \leq u^t \leq y_2^t$. Композиция процессов вылова, роста и миграции составляет оператор Пуанкаре $P(y_1, y_2 - u)$, являющийся сдвигом по траекториям двумерной динамической системы за единицу времени ($t \rightarrow t + 1$). Координатное представление P имеет вид:

$$\begin{aligned} y_1^{t+1} &= m_{11}f_1(y_1^t) + m_{12}f_2(y_2^t - u^t), \\ y_2^{t+1} &= m_{21}f_1(y_1^t) + m_{22}f_2(y_2^t - u^t), \end{aligned} \tag{9}$$

где (m_{ij}) – матрица миграции; $f_i(q) = q\varphi_i(q)$ при $i = 1, 2$; $\varphi_i(q)$ из (7).

Очевидно, что для каждого i при больших q выполняются неравенства $f_i(q)/q < 1$. Значит, при больших q функции f_1 и f_2 растут медленно, поэтому в фазовом пространстве системы (9) существует *инвариантный* квадрат $Q = [0, g] \times [0, g]$: если $(y_1^t, y_2^t) \in Q$, то $(y_1^{t+1}, y_2^{t+1}) \in Q$.

Формально, размер Q зависит от матрицы миграции M . Легко показать, что найдется универсальный квадрат Q , инвариантный при всех M .

Пусть $U = \{u^0, \dots, u^T\}$ конечная допустимая последовательность выловов, тогда доход рыбака определяется суммой

$$D(y_1, y_2, T) = \sum_{i=0}^T b^i p(u^i), \tag{10}$$

где заданный коэффициент дисконтирования b принадлежит интервалу $(0, 1)$; $p(u)$ – монотонно возрастающая вогнутая функция полезности с условием $p(0) = 0$. Например $p(u) = u/(1 + u)$ или $p(u) = \ln/(1 + u)$.

Поясним прикладные аспекты выражения (10). Задание в модели функции полезности представляет отдельную экономико-статистическую задачу. По сути, это отношение дохода от продажи к общим затратам (*промысловому усилию*) на единицу (данного вида) объема рыбной продукции. Разумеется, в промысловое усилие входят и транспортные расходы рыбопромыслового флота.

Дисконт b убывает с ростом банковской ставки: если банковская ставка за единицу времени составляет 10% (т.е. 0,1), то $b = 1/(1 + 0,1) \approx 0,9$.

Перейдем к решению поставленной выше оптимизационной задачи. Требуется выбрать допустимую последовательность выловов так, чтобы максимизировать выражение (10). Решение данной оптимизационной задачи основывается на последовательном построении семейства функций Беллмана (Беллман, 1960, глава 2). Обозначим $B_T(y_1, y_2) = \max_U D(y_1, y_2, T)$, где (y_1, y_2) – начальный вектор численности популяции, а U пробегает все допустимые наборы управлений. Поскольку p возрастает и выполняется ограничение $u^0 \leq y_2$, то $B_0(y_1, y_2) = p(y_2)$.

Обсудим общие свойства оптимального вылова. Во-первых, при $T \geq 1$ вылов – это функция от двух фазовых переменных $u = u(y_1, y_2)$. Во-вторых, $u(y_1, y_2)$ также зависит и от T (формально, более правильной является формула $u = uT(y_1, y_2)$). Разумеется, когда рассматривается доход на бесконечном промежутке времени ($T = \infty$), то u уже не зависит от T .

Основой метода Беллмана служат рекуррентные соотношения:

$$B_{T+1}(y_1, y_2) = \max \{p(u) + bB_T[P(y_1, y_2 - u)]\}, \quad u \in [0, y_2].$$

Здесь оператор P задается системой (9). Этот процесс построения функций Беллмана сходится со скоростью геометрической прогрессии. Предельная функция $B_\infty(y_1, y_2)$ – это верхняя граница суммы (10) при заданном начальном векторе Y и всех T .

С экономической точки зрения $B_\infty(y_1, y_2)$ оказывается большой функцией полезности, когда начальное распределение биомассы рыбной популяции задано вектором (y_1, y_2) . По аналогии с

работой (Ильичев и др., 2000, с. 106) можно считать, что ее частные производные по y_1 и по y_2 являются *внутренними ценами* рыбы в 1 и 2 районах соответственно.

При компьютерных расчетах были выбраны $p(u) = u/(1+u)$ и дисконт $b = 0,9$, а число итераций T в схеме Беллмана равнялось 20. При вычислении функции $B_T(y_1, y_2)$ параллельно определялось оптимальное управление $u = u_T(y_1, y_2)$. Отметим, что при достаточно больших T соседние функции $u_{T-1}(y_1, y_2)$ и $u_T(y_1, y_2)$ практически не отличаются друг от друга.

Цель работы блока “Оптимизация” – это построение отображения

$$M_0 \rightarrow u(y_1, y_2). \quad (11)$$

Иными словами, при заданном маршруте определяется оптимальный вылов рыбы при всех (y_1, y_2) из универсального квадрата Q .

Более сложная ситуация возникает, когда вектор корма K также перемещается под действием своей матрицы N , т.е. $K \rightarrow NK$. Теперь все функции Беллмана также будут зависеть от корма. В этом случае основное рекуррентное соотношение Беллмана принимает вид:

$$B_{T+1}(y_1, y_2, K) = \max \{p(u) + bB_T[P(y_1, y_2 - u), NK]\}, \quad u \in [0, y_2].$$

2. Блок “Адаптация”. Реализация механизма адаптации осуществляется на основе процесса конкуренции исходной популяции $Y = (y_1, y_2)$ с ее близким мутантом $Z = (z_1, z_2)$. В начальный момент времени полагаем компоненты вектора Y достаточно большими, а компоненты вектора Z достаточно малыми. Оказалось, что результаты слабо зависят от данных начальных условий.

Пусть в момент времени t задан суммарный вылов u^t во втором районе. Тогда частные выловы uy^t и uz^t популяций Y и Z пропорциональны их биомассам во втором районе:

$$uy^t = \frac{u^t y_2^t}{y_2^t + z_2^t}, \quad uz^t = \frac{u^t z_2^t}{y_2^t + z_2^t}. \quad (12)$$

Затем, как и ранее, действуют факторы роста – смертности и пространственного перемещения. Движение исходной популяции определяется матрицей $M_0 = (m_{ij})$, а перемещение его мутанта задается близкой (см. (5)) матрицей $L = (a_{ij})$. При учете конкуренции и вылова процесс воспроизводства удобно формализовать с помощью функции от двух переменных

$$f_i(p, q) = p \left(d + \frac{rk_i}{k_i + p + q} \right).$$

Тогда выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} y_1^{t+1} &= m_{11}f_1(y_1^t, z_1^t) + m_{12}f_2(y_2^t - uy^t, z_2^t - uz^t), \\ y_2^{t+1} &= m_{21}f_1(y_1^t, z_1^t) + m_{22}f_2(y_2^t - uy^t, z_2^t - uz^t), \\ z_1^{t+1} &= a_{11}f_1(z_1^t, y_1^t) + a_{12}f_2(z_2^t - uz^t, y_2^t - uy^t), \\ z_2^{t+1} &= a_{21}f_1(z_1^t, y_1^t) + a_{22}f_2(z_2^t - uz^t, y_2^t - uy^t). \end{aligned} \quad (13)$$

После того как будут испробованы все возможные мутанты, возникает эволюционно-устойчивая матрица M_1 .

По сути, цель работы блока “Адаптация” – это построение отображения $u(y_1, y_2) \rightarrow M_1$, которое по заданной функции вылова определяет эволюционно-устойчивый маршрут.

В результате многократного повторения этапов “Оптимизация” и “Адаптация” формируются стратегия оптимального вылова и маршрут миграции популяции. Данный маршрут будет эволюционно-устойчивым, поскольку условием остановки является неизменность матрицы миграции после работы блока “Адаптация”.

Отметим, что когда начальная матрица M_0 содержит нулевые элементы, то в ряде случаев адаптации не происходит. Это редкое событие напоминает поиск глобального минимума некоторой функции F , когда начальная точка выбрана неудачно и сразу оказалась в локальном минимуме F . Достаточно несколько “пошевелить” матрицу M_0 , чтобы заработал процесс адаптации. Поэтому в дальнейшем в качестве начальных матриц будем выбирать матрицы без нулей.

Приведем несколько примеров финальных матриц M^* , связанных с различным выбором начальных матриц M_0 . Коэффициенты роста и величины кормовых ресурсов в каждом районе предполагаются одинаковыми. Так, положим $k_1 = k_2 = 5$ – кормовые ресурсы в обоих районах; $d = 0,75$; $r_1 = r_2 = 2$.

Для краткости обозначим $Q = 0,9$ и $q = 0,1$. На основе расчетов получены следующие эволюционно-устойчивые матрицы миграции при оптимальном вылове:

$$M_0 = \begin{pmatrix} Q & Q \\ q & q \end{pmatrix} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,94 \\ 0,06 & 0,06 \end{pmatrix}; \quad M_0 = \begin{pmatrix} q & q \\ Q & Q \end{pmatrix} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,94 \\ 0,06 & 0,06 \end{pmatrix}; \quad (14)$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} q & Q \\ Q & q \end{pmatrix} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,99 \\ 0,06 & 0,01 \end{pmatrix}; \quad M_0 = \begin{pmatrix} Q & q \\ q & Q \end{pmatrix} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,05 \\ 0,005 & 0,95 \end{pmatrix}.$$

Перечислим по порядку перроновские вектора финальных матриц (14):

$$\begin{pmatrix} 0,94 \\ 0,06 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,94 \\ 0,06 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,94 \\ 0,06 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,91 \\ 0,09 \end{pmatrix}.$$

Согласно метрике (8) все приведенные вектора отличаются от $\pi^* = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ менее чем на 0,1.

Значит, первый район более чем в 9 раз предпочтительнее второго.

Сравним некоторые характеристики динамики и продуктивности рыбной популяции с учетом (вариант *a*) и без учета (вариант *b*) процесса адаптации. В качестве примера рассмотрим среднюю начальную матрицу $M_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$. Пусть задан начальный вектор $y_1^0 = 1$ и $y_2^0 = 1$. Расчеты показали, что:

а) при адаптации происходит следующее преобразование маршрута:

$$M_0 \rightarrow M^* \approx \begin{pmatrix} 0,97 & 0,97 \\ 0,03 & 0,03 \end{pmatrix};$$

точка (y_1, y_2) стремится к точке $(33,1)$, а многолетний вылов приблизительно равен 3;

б) матрица миграции не изменяется и все время равна M_0 ; точка (y_1, y_2) стремится к точке $(11,11)$, а многолетний вылов приблизительно равен 6.

Таким образом, благодаря пространственной адаптации популяция смещается в первый (необлавливаемый) район. Поэтому общий вылов снижается, но суммарная численность популяции увеличивается.

При $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ привлекательность первого (бедного кормом) района несколько снижается и имеют место следующие соотношения:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \rightarrow M^* \approx \begin{pmatrix} 0,32 & 0,57 \\ 0,68 & 0,43 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \approx \begin{pmatrix} 0,46 \\ 0,54 \end{pmatrix},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \rightarrow M^* \approx \begin{pmatrix} 0,52 & 0,52 \\ 0,48 & 0,48 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \approx \begin{pmatrix} 0,52 \\ 0,48 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, теперь “голод” почти уравнивает “вылов”, поскольку времена пребывания популяции в районах 1–2 оказываются близкими.

Отметим, что в природных экосистемах иногда возможно образование мутантов и с неблизкими маршрутами, и тогда исход отбора будет несколько отличаться от приведенного. Поэтому данные закономерности являются лишь одной из возможных версий эволюции маршрута миграции при вылове популяции.

5. ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫЛОВ В ДВУХ РАЙОНАХ И АДАПТАЦИЯ МАРШРУТА

Теперь рассмотрим задачу оптимизации с двумя стратегиями вылова $V = \{v^t\}$ и $U = \{u^t\}$ в первом и во втором районах соответственно. Считаем выловы допустимыми, если в каждый момент времени t выполняются соотношения $0 \leq v^t \leq y_1^t$ и $0 \leq u^t \leq y_2^t$.

В целях максимизации общего вылова полагаем, что “рыбаки” придерживаются общей кооперативной стратегии вылова. Поэтому целевая функция имеет вид:

$$D_{12}(y_1, y_2) = \max_{V, U} \sum_{t=0}^{\infty} b^t [p(u^t) + r(v^t)], \quad (15)$$

где (y_1, y_2) начальное расположение рыбной популяции по районам; p и r – функции полезности для первого и второго “рыбаков”. Далее будем полагать их равными, а именно $p(w) = r(w) = w/(1+w)$.

По аналогии с предыдущей моделью оптимизации будем считать, что распределение вылова по популяциям Y и Z происходит равномерно. В частности, для общего вылова в первом районе v^t возникает разбиение:

$$vy^t = \frac{v^t \cdot y_1^t}{y_1^t + z_1^t}, \quad vz^t = \frac{v^t \cdot z_1^t}{y_1^t + z_1^t}. \quad (16)$$

Теперь легко построить естественное обобщение системы (13) с учетом управлений (16).

С помощью данной модели были проведены две серии компьютерных экспериментов, в которых получены финальные (эволюционно-устойчивые) маршрутные матрицы в зависимости от пространственного состояния кормовых ресурсов.

В первой серии полагаем одинаковыми экологические характеристики обоих районов $k_1 = k_2 = 5$. Этому случаю соответствуют следующие переходы:

$$M_0 = \begin{pmatrix} Q & Q \\ q & q \end{pmatrix} \rightarrow M^* \approx \begin{pmatrix} 0,93 & 0,93 \\ 0,07 & 0,07 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} q & q \\ Q & Q \end{pmatrix} \rightarrow M^* \approx \begin{pmatrix} 0,04 & 0,02 \\ 0,96 & 0,98 \end{pmatrix};$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} q & Q \\ Q & q \end{pmatrix} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} Q & q \\ q & Q \end{pmatrix} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

В общем случае, если M_0 является симметричной, то ее финальная матрица содержит только одинаковые элементы, равные 0,5. Для несимметричных начальных матриц конечная матрица выглядит достаточно произвольным образом.

Во второй серии экспериментов полагаем $k_1 = 2$ и $k_2 = 5$. Теперь второй район является более предпочтительным. Как это выразится во временах пребывания популяции в районах? Здесь обнаружены следующие переходы:

$$M_0 = \begin{pmatrix} q & q \\ Q & Q \end{pmatrix} \rightarrow M^* \approx \begin{pmatrix} 0,64 & 0,04 \\ 0,36 & 0,96 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \approx \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}; \quad M_0 = \begin{pmatrix} Q & Q \\ q & q \end{pmatrix} \rightarrow M^* \approx \begin{pmatrix} 0,18 & 0,12 \\ 0,82 & 0,88 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \approx \begin{pmatrix} 0,13 \\ 0,87 \end{pmatrix};$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} q & Q \\ Q & q \end{pmatrix} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,13 \\ 0,98 & 0,87 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \approx \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,88 \end{pmatrix}; \quad M_0 = \begin{pmatrix} Q & q \\ q & Q \end{pmatrix} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,05 \\ 0,13 & 0,95 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \approx \begin{pmatrix} 0,26 \\ 0,74 \end{pmatrix};$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \approx \begin{pmatrix} 0,13 \\ 0,87 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что отношение кормовых ресурсов районов друг к другу невелико и составляет 2,5. Зато время пребывания рыбной популяции во втором (высокопродуктивном) районе в (среднем) 7 раз превосходит время нахождения в первом (низкопродуктивном) районе. В результате чего вылов в первом районе значительно снизился.

Проведенные расчеты позволили сделать следующие выводы.

1. В процессе пространственной адаптации популяций ключевая роль принадлежит перрону-вектору в финальной матрице миграции. Данный вектор характеризует относительное время пребывания популяции в том или ином районе.

2. Эксплуатируемая рыбная популяция ищет (и находит) маршрут, при котором минимизируются ее потери численности. Поэтому оптимальный многолетний вылов без учета процессов адаптации рыб приводит к завышенным оценкам суммарного вылова.

3. Проблему управления в экономических объектах также целесообразно рассматривать с позиций эволюционных изменений (Экономическая трансформация..., 2004). Тогда, например, поиск устойчивого развития автоматически приводит к построению ее эволюционно-устойчивой стратегии функционирования данной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Абакумов А.И. (1993). Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемой популяции. Владивосток: Дальнаука.
- Беллман Р. (1960). Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. литер.
- Беллман Р. (1976). Введение в теорию матриц. М.: Наука.
- Ильичев В.Г. (2007). Выпуклые структуры в моделях экологии // *Матем. моделирование*. Т. 19. № 4. С. 90–102.
- Ильичев В.Г. (2011). “Нелинейные скелеты” в пространственно-временных моделях экологии // *Матем. моделирование*. Т. 23. № 2. С. 125–147.
- Ильичев В.Г. (2012). Гипотезы о закономерностях биологической адаптации. Компьютерные эксперименты // *Матем. моделирование*. Т. 24. № 10. С. 15–32.
- Ильичев В.Г., Рохлин Д.Б., Угольницкий Г.А. (2000). Об экономических механизмах управления биоресурсами // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. № 4. С. 104–110.
- Робертс Ф.С. (1986). Дискретные математические модели с приложением к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука.
- Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. (1979). Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. М.: Наука.
- Фогель Л., Оуэнс А., Уолш М. (1969). Искусственный интеллект и эволюционное моделирование. М.: Мир.
- Экономическая трансформация и эволюционная теория Й. Шумперта (2004). В сб. статей V Международного симпозиума по эволюционной экономике. Россия, Московская область, г. Пущино, 25–27 сентября 2003 г. М.: Институт экономики РАН.
- Clark C.W. (1985). Bioeconomic Modelling and Fisheries Management. N.Y.: Wiley.

Поступила в редакцию
11.09.2013 г.

Spatial Adaptation and Optimal Harvesting of Fish Population

V.G. Il'ichev, V.V. Il'icheva

Within discrete model process of movement of fish population is set by a finite-dimensional Markov matrix. Change of this matrix as its adaptation to a condition of fodder resources and management is formalized. Numerically found the key characteristic of spatial adaptation is a vector of distribution of times of stay of population in those or regions of reservoir. It appeared that this vector is own vector (Perron's vector a final matrix) of movement.

Keywords: migration, matrix, adaptation, optimal harvesting, Perron's vector.

JEL Classification: Q57.