

НАУЧНАЯ СЕССИЯ: ИННОВАЦИОННАЯ ЭКОНОМИКА:
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

УЧЕТ ИННОВАЦИЙ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ:
ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД*

© 2009 г. В. И. Аркин

(Москва)

ОПИСАНИЕ ПОДХОДА

Модели экономической динамики являются одним из краеугольных камней математической экономики. История их создания связана с именами нобелевских лауреатов В. Леонтьева, Л. Канторовича, Д. Гейла и одного из величайших математиков XX в. Джона фон Неймана. Формально эти модели могут описывать функционирование любого экономического объекта от предприятия до народного хозяйства.

На основе моделей экономической динамики была построена общая теория экономического равновесия. Именно поэтому включение инноваций в модели экономической динамики может служить методологической основой для разработки общей теории экономического развития с учетом “экономики знаний” (Макаров, 2003).

Основные результаты теории экономической динамики связаны с вопросами существования стимулирующих (теневых) цен и анализом асимптотического поведения оптимальных траекторий. С помощью указанных цен можно соизмерить между собой все затрачиваемые ресурсы и выпускаемые продукты, а также обеспечить балансовые ограничения по натуральным продуктам.

С математической точки зрения в основе многих моделей экономической динамики лежит некоторая оптимизационная задача с выпуклой структурой.

Общая модель экономической динамики может быть представлена в терминах многозначного отображения $Q(\cdot)$, переводящего точку $x \in R_+^n$, характеризующую запас продуктов в начале планового периода, в одну из точек множества $Q(x) \subset R_+^n$ в конце периода. Множество $Q(x)$ описывает “технологические возможности” в состоянии x за один плановый период, т.е. множество всех выпусков, которые могут быть получены в конце этого периода из вектора ресурсов x . Множество $Q = \{(x, z) : z \in Q(x)\}$, являющееся графиком отображения $Q(x)$, характеризует совокупность знаний о способах использования ресурсов. Если задан некоторый вектор начальных ресурсов $\hat{x}$, то динамика системы определяется включением

$$x_{t+1} \in Q(x_t), \quad x_0 = \hat{x}. \quad (1)$$

Предположим, что существует возможность расширить наши знания, т.е. создать новый технологический способ. Другими словами, существует возможность перехода от исходной технологии $Q^0 = Q$ к новой технологии, которая описывается многозначным отображением $Q^1(\cdot)$ с графиком $Q^1 \supset Q^0$.

Пусть θ — момент появления нового технологического способа, т.е. момент, начиная с которого становится доступной технология Q^1 . Будем считать, что момент θ зависит от выбора траектории системы, т.е. является управляемой величиной. В этом случае будем говорить об управляемом инновационном процессе. Динамика системы описывается формулой:

$$x_{t+1} \in \begin{cases} Q^0(x_t), & t < \theta, \quad x_0 = \hat{x}; \\ Q^1(x_t), & t \geq \theta. \end{cases} \quad (2)$$

Функция $\theta = \theta(x_1, x_2, \dots)$, принимающая целые значения, считается заданной. Для того чтобы формула (2) была корректной, необходимо, чтобы функция θ обладала свойством неупреждае-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-06-00154 и 07-01-00541).

мости: если $\theta(x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots) = t$, то $\theta(x_1, \dots, x_t, x'_{t+1}, \dots) = t$ для любой последовательности $(x'_{t+1}, x'_{t+2}, \dots)$.

Если задана некоторая неупреждающая функция $\theta = \theta(x_1, \dots, x_t)$, то можно поставить экстремальную задачу. Выбрать траекторию (план) $\{x_t\}$, удовлетворяющую (2) и доставляющую максимум функционалу:

$$\sum_0^{\theta-1} \varphi^0(x_t) + \sum_{\theta}^{\tau} \varphi^1(x_t), \quad (3)$$

где $\varphi^0(x)$, $\varphi^1(x)$ — заданные функции полезности, относящиеся к технологиям Q^0 и Q^1 , соответственно.

Задача (2)–(3), как правило, не является выпуклой при “самых хороших” предположениях относительно Q^0 , Q^1 , φ^0 , φ^1 , θ .

Пример. Пусть $\theta = \min\{t: x_t \geq \xi\}$, где ξ — некоторый фиксированный вектор. Введем новое многозначное отображение:

$$R(x) = \begin{cases} Q^1(x) & \text{при } x \geq \xi; \\ Q^0(x) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда (2) эквивалентно включению:

$$x_{t+1} \in R(x_t), \quad x_0 = \hat{x}. \quad (4)$$

График R отображения $R(\cdot)$, вообще говоря, не является выпуклым, даже если множества Q^1 и Q^0 выпуклы. Отмеченное обстоятельство представляет собой одну из основных трудностей при исследовании конкретных моделей экономической динамики с эндогенно меняющейся дискретным образом технологией.

Основная идея предлагаемого ниже подхода — считать θ случайной величиной с распределением, зависящим от траектории системы. Забегая вперед, отметим, что хотя формально вероятностная постановка охватывает детерминированный случай, однако те условия “невыврожденности”, которые будут наложены на распределения соответствующих случайных величин, исключают детерминированную ситуацию.

Планом в вероятностной модели будем называть два семейства функций $Z^0 = \{x_t, t \geq 0\}$, $Z^1(\theta) = \{x_t^1(\theta), t \geq \theta\}$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} x_{t+1}^0 &\in Q^0(x_t^0), \quad t \geq 0; \quad x_0 = \hat{x}, \\ x_{t+1}^1(\theta) &\in Q^1(x_t^1(\theta)), \quad t \geq \theta; \quad x_{\theta}^1(\theta) = x_{\theta}^0. \end{aligned} \quad (5)$$

Распределение целочисленной случайной величины θ задается формулой:

$$\mathbf{P}(\theta = t) = p_t(x_1^0, \dots, x_t^0). \quad (6)$$

Требуется найти план, доставляющий максимум функционалу

$$\mathbf{E}^{Z^0} \left[\sum_0^{\theta-1} \varphi^0(x_t^0) + \sum_{\theta}^{\tau} \varphi^1(x_t^1(\theta)) \right]. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{E}^{Z^0}$ — символ математического ожидания, указывающий, что распределение случайной величины θ зависит от выбора последовательности $Z^0 = \{x_t^0, t \geq 0\}$.

В работе (Аркин, 1986) был рассмотрен частный случай изложенной выше модели, когда распределение случайной величины θ имеет вид:

$$p_t(x_1^0, \dots, x_t^0) = q(x_t^0) \prod_{k=1}^{t-1} [1 - q(x_k^0)].$$

Это распределение соответствует ситуации, когда считается заданной вероятность перехода на новую технологию $q(x)$ в следующий момент времени при условии, что до этого момента система находится в состоянии x в старой технологии.

В настоящей работе будет рассмотрен другой способ формирования случайной величины θ . А именно, пусть ξ некоторый фиксированный вектор, характеризующий минимальные затраты ресурсов, необходимые для создания новой технологии. Естественно считать ξ случайным вектором с заданной функцией распределения $\pi(x) = \mathbf{P}(\xi \leq x)$. Тогда $\theta = \theta(\xi) = \min\{t: x_t^0 \geq \xi\}$ является случайной величиной, распределение которой зависит от выбранной траектории $\{x_t^0\}$ и функции распределения вектора ξ .

Другие подходы к учету инноваций в детерминированных экономических моделях см. (Romer, 1986; Макаров, 2008; Данилов, Кошевой, 2008). Асимптотические свойства оптимальных траекторий для вероятностных моделей Неймана–Гейла с инновациями были рассмотрены в (Сластников, 1989).

Данная статья организована следующим образом. В разд. 1 для модели Гейла с однократным изменением технологии в рамках вероятностного подхода описывается структура цен, стимулирующих оптимальный план. Разд. 2 посвящен доказательству результата, приведенного в разд. 1. Сначала формулируется некоторая общая задача управления стохастическими разностными уравнениями со смешанными ограничениями, частным случаем которой является модель Гейла с инновациями из разд. 1. Для задачи управления приводится необходимое условие оптимальности в форме стохастического принципа максимума, представляющего также и самостоятельный интерес. Этот результат затем используется для доказательства существования стимулирующих цен. И, наконец, разд. 3 посвящен обобщению результатов разд. 1 в двух направлениях. Во-первых, в рамках вероятностного подхода рассматривается модель с последовательно меняющейся технологией, и, во-вторых, предполагается, что характеристики новой технологии априори неизвестны и становятся известными только после появления этой технологии.

1. УЧЕТ ИННОВАЦИЙ В МОДЕЛИ ГЕЙЛА

Классическая модель Гейла характеризуется технологическим множеством T , элементами которого являются пары неотрицательных n -мерных векторов (a, b) и целевой функцией φ , определенной на T . Множество T предполагается выпуклым, а функция φ вогнутой. Пары (a, b) интерпретируются как технологические способы (производственные процессы), a — затраты, b — выпуск.

Последовательность производственных процессов $Z_t = (a_t, b_{t+1}) \in T$ называется планом, если выполнено следующее условие баланса:

$$b_t \geq a_t, \quad t = k, \dots, \tau - 1. \quad (8)$$

Вектор начальных запасов $\hat{b}_k$ в момент времени k предполагается заданным. Требуется найти план, доставляющий максимум выражению:

$$\sum_k^{\tau-1} \varphi(a_t, b_{t+1}) \rightarrow \max. \quad (9)$$

Системой цен будем называть последовательность неотрицательных n -мерных векторов $\{\psi_t, t = k, \dots, \tau\}$. Система цен $\{\psi_t\}$ с начальным вектором ψ_k стимулирует (в смысле Гейла) план $\{\hat{z}_t\}$ с начальным вектором $\hat{b}_k$ на интервале времени $[k, \tau]$, если выполнены соотношения:

а) при каждом $t \geq k$ пара $(\hat{a}_t, \hat{b}_{t+1})$ доставляет максимум величине

$$F_t(a, b) = \varphi(a, b) + \psi_{t+1}b - \psi_t a \quad (10)$$

по всем $(a, b) \in T$;

б) при всех $t \geq k$

$$\psi_t(\hat{b}_t - \hat{a}_t) = 0. \quad (11)$$

Экономическая интерпретация этих условий хорошо известна. Если выполнено некоторое условие регулярности, то оптимальный план стимулируется некоторой системой цен.

Детерминированная модель Гейла с нововведениями. Предположим, что существует возможность перехода от исходной технологии $T^0 = T$ к технологии T^1 , обладающей большим набором производственных способов: $T^1 \supset T^0$.

Для реализации этой возможности необходимо передать часть ресурсов из сферы производства в сферу инноваций. В инновационной сфере происходит создание нового технологического способа. Процесс формирования этого способа характеризуется в каждый момент времени некоторым набором определяющих (“физических”) параметров (ОП). Появление нового способа происходит при превышении этими определяющими параметрами *некоторых уровней (барьеров)*, характеризующихся вектором ξ .

Функционирование инновационной сферы описывается множеством пар $(c, d) \in Q \subset R_+^n \times R_+^m$, где c — материальные затраты, а d — вектор приращения ОП за один период. Модель записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (a_t, b_{t+1}) &\in T^0, \quad 0 \leq t \leq \theta - 1, \\ (a_t, b_{t+1}) &\in T^1, \quad \theta \leq t \leq \tau - 1, \\ (c_t, d_{t+1}) &\in Q, \quad 0 \leq t \leq \tau - 1, \\ \theta &= \min\{t: \sum_0^t d_k \geq \xi\}, \\ b_t &\geq a_t + c_t, \quad 0 \leq t \leq \tau - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

План определяется последовательностью $\{Z_t\} = \{(a_t, b_{t+1}), (c_t, d_{t+1})\}$, удовлетворяющей условиям (12). Векторы начальных ресурсов $\hat{b}_0$ и начальных ОП $\hat{d}_0$ считаются заданными. Требуется выбрать план, доставляющий максимальное значение функционалу:

$$\sum_0^{\theta-1} \varphi^0(a_t, b_{t+1}) + \sum_\theta^{\tau-1} \varphi^1(a_t, b_{t+1}). \quad (13)$$

Здесь φ^0 и φ^1 , определенные соответственно на T^0 и T^1 , вогнутые функции полезности. Множества T^0 , T^1 , Q предполагаются выпуклыми и $\varphi^1(z) \geq \varphi^0(z)$. Как уже отмечалось, сформулированная модель экономической динамики, вообще говоря, не является выпуклой.

Переход к стохастической модели. Будем считать ξ случайным вектором с заданной функцией распределения $\pi(y) = P(\xi \leq y)$. Функция $\pi(y)$ предполагается непрерывно дифференцируемой; $\theta = \theta(\xi)$ является целочисленной случайной величиной, определяемой формулой:

$$\theta = \min\{t: y_t \geq \xi\}, \quad (14)$$

где $y_t = \sum_0^t d_k$.

План в стохастическом случае задается двумя последовательностями $\{Z_t^0\} = \{(a_t^0, b_{t+1}^0), (c_t^0, d_{t+1}^0), t \geq 0\}$ и $\{Z_t^1(\theta)\} = \{(a_t^1(\theta), b_{t+1}^1(\theta)), t \geq \theta\}$, удовлетворяющими ограничениям

$$\begin{aligned} (a_t^0, b_{t+1}^0) &\in T^0, \quad t \geq 0, \\ (c_t^0, d_{t+1}^0) &\in Q, \quad t \geq 0, \\ b_t^0 &\geq a_t^0 + c_t^0, \quad t \geq 0, \\ (a_t^1(\theta), b_{t+1}^1(\theta)) &\in T^1, \quad t \geq \theta, \\ b_t^1(\theta) &\geq a_t^1(\theta), \quad t \geq \theta, \\ b_\theta^1(\theta) &= b_\theta^0. \end{aligned} \quad (15)$$

Векторы начальных ресурсов $\hat{b}_0$ и начальных ОП $\hat{d}_0$ предполагаются заданными, при этом $\pi(d_0) = 0$. Требуется выбрать план, доставляющий максимум функционалу

$$\mathbf{E}^{Z^0} \left[\sum_{t=0}^{\theta-1} \Phi^0(a_t^0, b_{t+1}^0) + \sum_{t=\theta}^{\tau-1} \Phi^1(a_t^1(\theta), b_{t+1}^1(\theta)) \right]. \quad (16)$$

Математическое ожидание берется по распределению случайной величины θ , зависящему от плана $\{Z_t^0\}$.

Стимулирующие цены. Будем говорить, что последовательности неотрицательных вектор-функций $\{\psi_t^0\}, \{\alpha_t\}, \{\psi_t^1(\theta)\}$ и неотрицательных скалярных функций $\{R_t\}$ стимулируют план $\{Z_t^0\}, \{Z_t^1(\theta)\}$, если выполнены следующие условия.

1. Последовательность цен $\{\psi_t^1(\theta), t \geq \theta\}$ с начальным вектором цен $\psi_\theta^1 = \psi_\theta^1(\theta)$ стимулирует план $\{Z_t^1(\theta)\}$ с вектором начальных ресурсов $b_\theta^1(\theta) = b_\theta^0$ на интервале $[\theta, \tau]$ (в смысле Гейла (10), (11)).

2. При каждом $t \geq 0$ пара (a_t^0, b_{t+1}^0) доставляет максимум величине

$$F_t(a, b) = \Phi^0(a, b) + \bar{\psi}_{t+1} b - \psi_t^0 a \quad (17)$$

по всем $(a, b) \in T$, где

$$\bar{\psi}_{t+1} = \frac{1 - \pi(y_{t+1}^0)}{1 - \pi(y_t^0)} \psi_{t+1}^0 + \frac{\pi(y_{t+1}^0) - \pi(y_t^0)}{1 - \pi(y_t^0)} \psi_{t+1}^1, \quad (18)$$

$\psi_{t+1}^1 = \psi_{t+1}^1(t+1)$ — вектор начальных цен для последовательности $\{\psi_k^1(t+1), k \geq t+1\}$.

3. При каждом $t \geq 0$ пара (c_t^0, d_{t+1}^0) доставляет максимум выражению:

$$\Phi_t(c, d) = \alpha_{t+1} d - \psi_t^0 c \quad (19)$$

по всем парам $(c, d) \in Q$.

4. Цены α_t удовлетворяют соотношению¹:

$$\alpha_t = \tilde{\alpha}_{t+1} + R_t \frac{\pi'(y_t^0)}{1 - \pi(y_{t-1}^0)}, \quad \alpha_\tau = 0, \quad (20)$$

где

$$R_t = \sum_{k=t}^{\tau-1} \Phi^1(a_k^1(t), b_{k+1}^1(t)) - \left[\Phi^0(a_t^0, b_{t+1}^0) + \sum_{k=t+1}^{\tau-1} \Phi^1(a_k^1(t+1), b_{k+1}^1(t+1)) \right], \quad (21)$$

$$\tilde{\alpha}_{t+1} = \alpha_{t+1} \frac{1 - \pi(y_t^0)}{1 - \pi(y_{t-1}^0)}.$$

5. При каждом $t \geq 0$

$$\psi_t^0(b_t^0 - a_t^0 - c_t^0) = 0. \quad (22)$$

Теорема 1. Пусть план $\{Z_t^0\}, \{Z_t^1(\theta)\}$ оптимален и выполнено следующее условие регулярности: существуют технологические способы

$$(\hat{a}_t, \hat{b}_{t+1}) \in T^0, \quad (\hat{a}_t(\theta), \hat{b}_{t+1}(\theta)) \in T^1, \quad t \geq \theta$$

¹ Здесь и далее $\pi'(y)$ означает вектор $(\partial \pi / \partial y^1, \dots, \partial \pi / \partial y^n)$.

(не обязательно образующие план) такие, что

$$\begin{aligned} b_t^0 &> \hat{a}_t + c_t^0, \quad t \geq 0, \\ b_t^1(\theta) &> \hat{a}_t(\theta), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда существуют цены, стимулирующие план $\{Z_t^0\}, \{Z_t^1(\theta)\}$.

Доказательство теоремы излагается в разд. 2.

Замечание. Рекуррентные соотношения (20) можно разрешить относительно α_t :

$$\alpha_t = \frac{1}{1 - \pi(y_{t-1}^0)} \sum_{k=t}^{\tau-1} R_k \pi'(y_k^0). \quad (24)$$

Свойство оптимального плана: необходимость риска. Пусть $\{y_t^0, t \geq 0\}$ — последовательность определяющих параметров, соответствующая оптимальному плану. Предположим, что

$$(0, 0) \in Q; \quad (0, d) \notin Q \quad \forall d > 0; \quad \psi_t^0 \neq 0, \quad t \geq 0.$$

Тогда $\pi(y_t^0) < 1$ для всех $t \geq 0$. Другими словами, стратегия вложений в создание новой технологии, приводящая к ее появлению с вероятностью единица, не является оптимальной.

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует $0 < k \leq \tau - 1$, что $\pi(y_k^0) = 1$. Обозначим через m минимальное из таких k . Тогда из гладкости $\pi(y)$ вытекает $\pi'(y_m^0) = 0$, и, следовательно, используя (20), получаем, что $\alpha_m = 0$. Далее, поскольку $\psi_{m-1}^0 \neq 0$ из (19), имеем $c_{m-1}^0 = 0$. Но по условию $(0, d) \notin Q \quad \forall d > 0$. Следовательно, $d_m^0 = 0$. Отсюда вытекает, что $y_m^0 = y_{m-1}^0 + d_m^0 = y_{m-1}^0$. Следовательно, $\pi(y_{m-1}^0) = \pi(y_m^0) = 1$, что противоречит минимальности m .

Экономический комментарий. Так же как и в детерминированной модели Гейла, стимулирующие цены позволяют “развязать” балансовые ограничения по времени и отсеивать неэффективные технологические способы на основании локальной информации без пересчета всей задачи. В этом смысле функцию $F(a, b)$ из формулы (17) можно трактовать как локальный критерий эффективности в производственной сфере.

Основное отличие от детерминированной ситуации состоит в том, что выпуск в производственной сфере в момент $t + 1$ оценивается не в ценах ψ_{t+1}^0 , а в ценах $\bar{\psi}_{t+1}$. Как показывает формула (18), цены $\bar{\psi}_{t+1}$ являются ожидаемыми (прогноznыми) ценами. Действительно, в момент времени t , когда выбирается технологический способ на плановый период $(t, t + 1)$, неизвестно, появится ли к моменту $t + 1$ новая технология. Вероятность появления новой технологии в момент $t + 1$ при условии, что она не появилась до момента t , как будет доказано в п. 2.3, равна $[\pi(y_{t+1}^0) - \pi(y_t^0)] / (1 - \pi(y_t^0))$.

Цена ресурсов, выпущенных в плановом периоде $(t, t + 1)$ при условии, что в момент $t + 1$ появится новая технология, равна $\psi_{t+1}^1 = \psi_{t+1}^1(t + 1)$. Цена ресурсов в момент $t + 1$ при условии, что в этот момент осталась старая технология, равна ψ_{t+1}^0 . Таким образом, $\bar{\psi}_{t+1}$ является средневзвешенной (прогноznой) ценой в момент $t + 1$ с весами, равными условным вероятностям появления и не появления новой технологии в момент $t + 1$.

Перейдем к анализу соотношения (19). Функция $\Phi_t(c, d)$ играет роль локального критерия оптимальности в инновационной сфере. Величина $\alpha_{t+1}d$ является стоимостной оценкой приращения ОП, а величина $\psi_t^0 c$ характеризует (в стоимостном выражении) затраты ресурсов на интервале $(t, t + 1)$ на приращение ОП.

Уравнение (20), определяющее величину α_t , можно переписать так

$$\alpha_t = \frac{1 - \pi(y_t^0)}{1 - \pi(y_{t-1}^0)} \left[\alpha_{t+1} + R_t \frac{\pi'(y_t^0)}{1 - \pi(y_{t-1}^0)} \right] + \frac{\pi(y_t^0) - \pi(y_{t-1}^0)}{1 - \pi(y_{t-1}^0)} \times 0, \quad (25)$$

Величина $\alpha_{t+1} + R_t(\pi'(y_t^0) / (1 - \pi(y_{t-1}^0)))$ характеризует оценку ОП, если в момент t новая технология не появилась, в противном случае эта оценка равна нулю, поскольку в нашей модели рассматривается лишь однократное расширение технологии. Таким образом, α_t является ожидаемой оценкой определяющих параметров. Величину R_t можно трактовать как характеристику (оценку) новой технологии. В силу формулы (21) она выражает выигрыш, отсчитываемый от момента t , который получает система от появления новой технологии в момент t по сравнению с ее появлением в момент $t + 1$. На оптимальном плане величина R_t определяется только параметрами новой технологии T^1 . При достаточно малом приращении ОП Δy_t из (25) вытекает соотношение:

$$\alpha_t \Delta y_t \approx \frac{1 - \pi(y_t^0)}{1 - \pi(y_{t-1}^0)} \left[\frac{1 - \pi(y_t^0 + \Delta y_t)}{1 - \pi(y_t^0)} \alpha_{t+1} \Delta y_t + \frac{\pi(y_t^0 + \Delta y_t) - \pi(y_t^0)}{1 - \pi(y_t^0)} R_t \right]. \quad (26)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (26), является условным математическим ожиданием (при условии, что новая технология не появилась в момент t) случайной величины, принимающей два значения: R_t и $\alpha_{t+1} \Delta y_t$ — и представляющей собой выигрыш от дополнительных фондов Δy_t . Значение R_t соответствует выигрышу от появления технологии T^1 в момент t , $\alpha_{t+1} \Delta y_t$ — стоимостной оценке приращения ОП Δy_t в момент $t + 1$, если новая технология не появилась в момент времени t . Таким образом, соотношение (26) отражает стоимостной баланс в соседние моменты времени, который выполняется в среднем.

Величину $\alpha_t - \tilde{\alpha}_{t+1} = R_t \pi'(y_t^0) / (1 - \pi(y_{t-1}^0))$ естественно интерпретировать как инфинитизмальный выигрыш от единицы приращения ОП в момент времени t .

Упрощенная модель вложений в новую технологию. Предположим, что в модели, описываемой соотношениями (12), момент появления новой технологии определяется формулой

$$\theta = \min \left\{ t : \sum_{k=0}^t c_k^0 \geq \xi \right\} + 1. \quad (27)$$

Эта модель является частным случаем исходной модели (12), если в качестве технологического множества $\mathcal{Q}$ взять множество пар вида (c, c) , $c \geq 0$. В этом случае из соотношения (19) вытекает, что если $c_t^0 > 0$, то $\alpha_{t+1} = \psi_t^0$, а неравенство $\alpha_{t+1} < \psi_t^0$ влечет $c_t^0 = 0$. Таким образом, величину α_t , определяемую формулой (20) или формулой (24), можно рассматривать как норматив эффективности распределения ресурсов между вложениями в производство и сферу инноваций, а оценку ψ_t^0 считать предельным значением этого норматива.

Приведем в заключение некоторые свойства оптимального плана и стимулирующих его цен.

Обозначим $\gamma = \min \{ t : \pi(y_t^0) > 0 \}$. Промежуток времени $[0, \gamma - 1]$ будем называть начальным участком оптимального плана. Пусть на этом участке какие-то компоненты вектора c_t^0 строго больше нуля. Тогда из сказанного выше следует, что при $0 \leq t \leq \gamma - 1$ по этим компонентам

$\alpha_{t+1} = \psi_t^0$. Но $\alpha_t = \sum_{k=\gamma}^{\tau-1} R_k \pi'(y_k^0) = \alpha$ на промежутке $[0, \gamma - 1]$ (α — постоянный вектор). Отсюда вы-

текает, что цены на ресурсы, выделяемые в инновационную сферу на начальном участке оптимального плана, постоянны.

Покажем теперь, что если на начальном участке вектор $c_t^0 > 0$ по всем координатам, т.е. на этом участке каждый ресурс находит применение в инновационной сфере, то оптимальный план на этом участке включает в себя использование постоянного технологического способа (a^0, b^0) .

Действительно, в силу стационарности цен на начальном участке из (17) следует, что

$$(a^0, b^0) = \arg \max_{(a,b) \in T^0} [\varphi^0(a,b) + \psi(b-a)]. \quad (28)$$

Если дополнительно предположить, что для каждого ресурса i существует момент времени $m \geq \gamma$, что $R_m \frac{\partial \pi(y_m^0)}{\partial y_m^0} > 0$, то $c_t^0 = c^0$ — постоянный вектор на начальном участке и $b^0 = a^0 + c^0$. Действительно, в этом случае вектор $\alpha = \psi$ строго положителен и из (22) вытекает, что $\psi(b^0 - a^0 + c_t^0) = 0$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ СТИМУЛИРУЮЩИХ ЦЕН

Схема доказательства следующая. Сначала будет сформулирована некоторая общая задача управления стохастическими разностными уравнениями и для нее приведены соответствующие необходимые условия оптимальности (принцип максимума). Затем исходная модель экономической динамики переформулируется в терминах задачи оптимального управления. К полученной задаче применим принцип максимума. И, наконец, запишем сопряженные переменные принципа максимума в терминах модели экономической динамики.

Гладко-выпуклая задача управления. Пусть (s_t, x_t) , $t = 0, 1, \dots$ — управляемый процесс, первая компонента которого s_t принимает свои значения в некотором конечном или счетном множестве S , вторая компонента — значения в n -мерном евклидовом пространстве R^n .

Динамика процесса $\{x_t\}$ описывается системой стохастических разностных уравнений:

$$x_{t+1} = f^{t+1}(s_t, x_t, u_t, \nabla_t, s_{t+1}), \quad x_0 = x_0(s_0), \quad (29)$$

$x_0(s_0)$ — некоторая заданная функция. Управляющие параметры $w = (u, v)$ являются функциями от истории процесса $\{s_t\}$, $u_t = u_t(s^t)$, $\nabla_t = \nabla_t(s^t)$, $s^t = (s_0, \dots, s_t)$.

Эволюция процесса $\{s_t\}$ задается с помощью начального распределения $\Pi_0(s_0)$ и системы переходных функций $\Pi^{t+1}(s_t, x_t, \nabla_t, s_{t+1})$, определяющих вероятности перехода из состояния $\{s_t\}$ в состояние $\{s_{t+1}\}$ в момент $t+1$ и зависящих от значений процесса x_t и управляющего параметра ∇_t в момент времени t .

На выбор управляющих параметров w_t накладываются ограничения:

$$u_t \in U_t(s_t), \quad \nabla_t \in V_t(s_t), \quad (30)$$

$$g^t(s_t, x_t, u_t, \nabla_t) \leq 0. \quad (31)$$

Здесь $U_t(s)$, $V_t(s)$ — заданные множества, зависящие от параметра $s \in S$, $V_t(s) \subset R^l$, g_t — вектор-функции со значениями в k -мерном евклидовом пространстве R^k . Если выбраны какие-то управления $w_t = (u_t, \nabla_t)$, то в силу системы (29) определен процесс $\{x_t\}$, а вместе с ним вероятности перехода $\Pi^{t+1}(s_t, x_t, \nabla_t, s_{t+1})$, которые совместно с начальным распределением $\Pi_0(s_0)$ порождают вероятностную меру Π^w в пространстве последовательностей $\{s_t\}$.

Требуется максимизировать функционал

$$\mathbf{E}^w \sum_0^{\tau-1} \varphi^t(s_t, x_t, u_t, \nabla_t) \quad (32)$$

по всем управлениям $\{w_t\}$, удовлетворяющим ограничениям (30), (31). Здесь $\mathbf{E}^w$ — символ математического ожидания по мере Π^w , $\phi^t(s, x, u, v)$ — некоторая заданная функция.

Сформулируем предположения, при которых рассматривается задача.

Предположение 1. Функции $f^{t+1}(s, x, u, v, s_{t+1})$, $\phi^t(s, x, u, v)$, $g^t(s, x, u, v)$, $\Pi^{t+1}(s, x, v, s_{t+1})$ непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов (x, v) .

Предположение 2. Для каждого набора $s, x, v \in V_t(s_t)$; $u^1, u^2 \in U_t(s_t)$; $0 \leq \alpha \leq 1$ найдется элемент $u \in U_t(s_t)$ такой, что $\forall s_{t+1} \in S$:

$$\begin{aligned}\alpha \phi^t(s, x, u^1, v) + (1 - \alpha) \phi^t(s, x, u^2, v) &\leq \phi^t(s, x, u, v), \\ \alpha g^t(s, x, u^1, v) + (1 - \alpha) g^t(s, x, u^2, v) &\geq g^t(s, x, u, v), \\ \alpha f^{t+1}(s, x, u^1, v, s_{t+1}) + (1 - \alpha) f^{t+1}(s, x, u^2, v, s_{t+1}) &= f^{t+1}(s, x, u, v, s_{t+1}).\end{aligned}$$

Обозначим $\{x_t^*, u_t^*, v_t^*\}$ — решение задачи (29)–(32), Π^* — отвечающая этому решению мера в пространстве последовательностей $\{s^t, t = 1, \dots, \tau\}$, $\mathbf{E}^*$ — символ математического ожидания по мере Π^* .

Введем в рассмотрение гамильтониан:

$$H^{t+1}(s, x, u, v, s_{t+1}) = \psi_0 \phi^t(s, x, u, v) + \psi_{t+1} f^{t+1}(s, x, u, v, s_{t+1}) - \lambda_t g^t(s, x, u, v). \quad (33)$$

Теорема 2 (принцип максимума). Пусть $\{x_t^*, u_t^*, v_t^*\}$ — решение задачи (29)–(32). Тогда найдутся функции $\psi_t = \psi_t(s^t)$ со значениями в R^n , $\psi_0 \geq 0$, $\lambda_t = \lambda_t(s^t) \geq 0$ со значениями в R^k , $h_t = h_t(s^t)$ со значениями в R^1 такие, что:

$$\begin{aligned}1) \quad u_t^* &= \arg \max_{u \in U_t(s_t)} \mathbf{E}^*[H^{t+1}(s, x_t^*, u, v_t^*, s_{t+1}) | s^t], \\ v_t^* &= \arg \max_{v \in V_t(s_t)} \mathbf{E}^*[H_0^{t+1}(s, x_t^*, u_t^*, v_t^*, s_{t+1}) | s^t] + \sum_{s_{t+1} \in S} h_{t+1} \Pi_v^{t+1}(s, x_t^*, v_t^*, s_{t+1});\end{aligned} \quad (34)$$

$$2) \quad \psi_t = \mathbf{E}^*[H_x^{t+1}(s, x_t^*, u_t^*, v_t^*, s_{t+1}) | s^t] + \sum_{s_{t+1} \in S} h_{t+1} \Pi_x^{t+1}(s, x_t^*, v_t^*, s_{t+1}), \quad \psi_\tau = 0; \quad (35)$$

$$3) \quad h_t = \psi_0 \phi^t(s, x_t^*, u_t^*, v_t^*) + \sum_{s_{t+1} \in S} h_{t+1} \Pi^{t+1}(s, x_t^*, v_t^*, s_{t+1}), \quad h_\tau = 0; \quad (36)$$

$$4) \quad \lambda_t g^t(s, x_t^*, u_t^*, v_t^*) = 0. \quad (37)$$

Если дополнительно выполняется условие регулярности, т.е. существует элемент $\hat{u}_t = \hat{u}_t(s_t) \in U_t(s_t) \quad \forall s_t \in S$ такой, что:

$$g^t(s, x_t^*, \hat{u}_t, v_t^*) < 0, \quad t = 0, \dots, \tau - 1, \quad (38)$$

то $\psi_0 > 0$, и можно положить $\psi_0 = 1$.

Сформулированная теорема является “конечномерной” модификацией результата (Аркин, 1986) и доказывается методами, изложенными в (Аркин, 1989).

Формулировка модели экономической динамики в терминах задачи управления. Введем случайный процесс $\{s_t\}$ с двумя состояниями $\{0\}$, $\{1\}$ и единственным переходом из состояния $\{0\}$ в состояние $\{1\}$, $s_0 = 0$.

Рассмотрим следующую задачу управления

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= b_{t+1}, \quad x_0 = \hat{b}_0, \\ y_{t+1} &= y_t + d_{t+1}, \quad y_0 = \hat{d}_0, \\ x_t &\geq a_t + c_t, \\ (a_t, b_{t+1}) &\in T(s_t), \quad (c_t, d_{t+1}) \in Q, \\ T(s) &= \begin{cases} T^0, & s = 0, \\ T^1, & s = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

Управления $u_t = (a_t, b_{t+1})$, $v_t = (c_t, d_{t+1})$ в момент времени t выбираются зависящими от истории s^t ; $u_t = u_t(s^t)$, $v_t = v_t(s^t)$.

Переходные функции процесса $\{s_t\}$ определим формулой:

$$\begin{aligned} \Pi^{t+1}(s_t, y, d, s_{t+1}) &= \begin{cases} \frac{\pi(y+d) - \pi(y)}{1 - \pi(y)}, & s_t = 0, \quad s_{t+1} = 1, \\ \frac{1 - \pi(y+d)}{1 - \pi(y)}, & s_t = 0, \quad s_{t+1} = 0; \end{cases} \\ \Pi^{t+1}(s_t, y, d, s_{t+1}) &= \begin{cases} 1, & s_t = 1, \quad s_{t+1} = 1, \\ 0, & s_t = 1, \quad s_{t+1} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

Выбор управления $w_t = (u_t, v_t)$, удовлетворяющего ограничениям (39), порождает вероятностную меру $\mathbf{P}^w$ на пространстве последовательностей $\{s^t, t = 0, \dots, \tau - 1\}$. Требуется

$$\mathbf{E}^w \sum_{t=0}^{\tau-1} \varphi(s_t, a_t, b_{t+1}) \rightarrow \max, \quad (41)$$

где $\mathbf{E}^w$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{P}^w$,

$$\varphi(s, a, b) = \begin{cases} \varphi^0(a, b), & s = 0, \\ \varphi^1(a, b), & s = 1. \end{cases}$$

Задача оптимального управления (39)–(41) эквивалентна модели экономической динамики (15)–(16). Действительно, каждой последовательности управлений $\{w_t\}$ соответствует план $\{z_t^0, z_t^1(\theta)\}$ модели экономической динамики:

$$\begin{aligned} w_t(s^t) &= \begin{cases} z_t^0, & s_k = 0, \quad 0 \leq k \leq t, \\ z_t^1(\theta), & s_k = 0, \quad 0 \leq k \leq \theta - 1; \quad s_k = 1, \quad \theta \leq k \leq t, \end{cases} \\ &t = 0, \dots, \tau - 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что верно и обратное.

Покажем справедливость формул (40). Действительно, в силу того, что вектор-функция y_t не убывает по всем координатам, имеем

$$\mathbf{P}(s_{t+1} = 1 \mid s_t = 0) = \mathbf{P}(y_{t+1} \geq \xi \mid \overline{\{y_t \geq \xi\}}) = \frac{\mathbf{P}(y_{t+1} \geq \xi, \overline{\{y_t \geq \xi\}})}{\mathbf{P}(\overline{\{y_t \geq \xi\}})} = \frac{\pi(y_{t+1}) - \pi(y_t)}{1 - \pi(y_t)} = \frac{\pi(y_t + d_{t+1}) - \pi(y_t)}{1 - \pi(y_t)}.$$

Здесь $\overline{\{y_t \geq \xi\}}$ — дополнение к множеству $\{y_t \geq \xi\}$.

Применение принципа максимума. Легко увидеть, что в силу условий теоремы 1 задача (39)–(41) удовлетворяет всем предположениям теоремы 2. В силу условия регулярности гамильтониан в задаче (39)–(41) имеет вид:

$$H^{t+1}(s_t, x, y, u, v, s_{t+1}) = \varphi(s_t, a, b) + \psi_{t+1}b + \mu_{t+1}(y + d) - \lambda_t(a + c - x).$$

Из принципа максимума следует существование вектор-функций $\psi_t = \psi_t(s^t)$, $\lambda_t = \lambda_t(s^t) \geq 0$, $\mu_t = \mu_t(s^t)$ со значениями в R^n и скалярной функции $h_t = h_t(s^t)$ таких, что:

$$(a_t^*, b_{t+1}^*) = \arg \max_{(a,b) \in T(s_t)} [\varphi(s_t, a, b) + \mathbf{E}^*(\psi_{t+1}|s^t)b - \lambda_t a], \quad (42)$$

$$(c_t^*, d_{t+1}^*) = \arg \max_{(c,d) \in Q} \{ \mathbf{E}^*[\mu_{t+1}|s^t] + \sum_{s_{t+1} \in S} h_{t+1}(s^{t+1}) \Pi_d^{t+1}(s_t, y_t^*, d_{t+1}^*, s_{t+1}) \} d - \lambda_t c, \quad (43)$$

$$\mu_t = \mathbf{E}^*[H_y^{t+1}(s_t, x_t^*, y_t^*, u_t^*, v_t^*, s_{t+1})|s^t] + \sum_{s_{t+1} \in S} h_{t+1}(s^{t+1}) \Pi_y^{t+1}(s_t, y_t^*, d_{t+1}^*, s_{t+1}), \quad \mu_\tau = 0, \quad (44)$$

$$\psi_t = \mathbf{E}^*[H_x^{t+1}(s_t, x_t^*, y_t^*, u_t^*, v_t^*, s_{t+1})|s^t] = \lambda_t, \quad (45)$$

$$h_t = \varphi(s_t, u_t^*) + \sum_{s_{t+1} \in S} h_{t+1}(s^{t+1}) \Pi^{t+1}(s_t, y_t^*, d_{t+1}^*, s_{t+1}), \quad h_\tau = 0, \quad (46)$$

$$\lambda_t(b_t^* - a_t^* - c_t^*) = 0. \quad (47)$$

Расшифровка сопряженных переменных. Обозначим: $\psi_t(s^t) = \psi_t^0$ при $s_k = 0$, $0 \leq k \leq t$, $\psi_t(s^t) = \psi_t^1(\theta)$ при $s_k = 0$, $k \leq \theta - 1$; $s_k = 1$, $\theta \leq k \leq t$, $\mu_t(s^t) = \mu_t^0$ при $s_k = 0$, $0 \leq k \leq t$, $h_t(s^t) = h_t^1$ при $s_k = 0$, $0 \leq k \leq t - 1$, $s_t = 1$, $h_t(s^t) = h_t^0$ при $s_k = 0$, $0 \leq k \leq t$, $\omega_t = h_t^1 - h_t^0$.

При $t \geq \theta$ из соотношения (41) получаем, что на оптимальном плане $z_t^1(\theta) = (a_t^1(\theta), b_{t+1}^1(\theta))$ достигает своего максимального значения величина:

$$\varphi^1(a, b) + \psi_{t+1}^1(\theta)b - \varphi_t^1(\theta)a \rightarrow \max_{(a,b) \in T^1}.$$

Из (41) также вытекает, что при всех $t \geq 0$ на оптимальном плане $z_t^0 = (a_t^0, b_{t+1}^0)$ достигает своего максимального значения величина:

$$\varphi^0(a, b) + \bar{\psi}_{t+1}b - \varphi_t^0a \rightarrow \max_{(a,b) \in T^0},$$

$$\bar{\psi}_{t+1} = \psi_{t+1}^0 \frac{1 - \pi(y_{t+1}^0)}{1 - \pi(y_t^0)} + \psi_{t+1}^1 \frac{\pi(y_{t+1}^0) - \pi(y_t^0)}{1 - \pi(y_t^0)}.$$

Обозначим

$$\bar{\mu}_t^0 = \mu_t^0 \frac{1 - \pi(y_t^0)}{1 - \pi(y_{t-1}^0)}, \quad \alpha_t = \mu_t^0 + \omega_t \frac{\pi'(y_t^0)}{1 - \pi(y_{t-1}^0)}. \quad (48)$$

Тогда из соотношения (42) следует, что величина

$$\alpha_{t+1}d - \psi_t^0 c \rightarrow \max_{(c,d) \in Q}$$

достигает своего максимального значения на оптимальном плане (c_t^0, d_{t+1}^0) .

Наша цель — получить рекуррентное уравнение для определения вектора α_t . Обозначим для краткости $\pi_t = \pi(y_t^0)$, $\pi'_t = \pi'(y_t^0)$. Из (44) вытекает, что μ_t^0 удовлетворяет следующему рекуррентному уравнению:

$$\mu_t^0 = \bar{\mu}_{t+1}^0 + \omega_{t+1} \left[\frac{\pi'_{t+1}}{1 - \pi_t} - \frac{\pi'_t(1 - \pi_{t+1})}{(1 - \pi_t)^2} \right], \quad \mu_\tau^0 = 0. \quad (49)$$

Тогда из (48) с учетом (49) имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_t = & \left\{ \bar{\mu}_{t+1}^0 + \omega_{t+1} \left[\frac{\pi'_{t+1}}{1 - \pi_t} - \frac{\pi'_t(1 - \pi_{t+1})}{(1 - \pi_t)^2} \right] \right\} \frac{1 - \pi_t}{1 - \pi_{t-1}} + \omega_t \frac{\pi'_t}{1 - \pi_{t-1}} = \mu_{t+1}^0 \frac{1 - \pi_{t+1}}{1 - \pi_{t-1}} + \\ & + \omega_{t+1} \frac{\pi'_{t+1}}{1 - \pi_{t-1}} + \frac{\pi'_t}{1 - \pi_{t-1}} \left(\omega_t - \omega_{t+1} \frac{1 - \pi_{t+1}}{1 - \pi_t} \right) = \frac{1 - \pi_t}{1 - \pi_{t-1}} \left[\mu_{t+1}^0 \frac{1 - \pi_{t+1}}{1 - \pi_t} + \omega_{t+1} \frac{\pi'_{t+1}}{1 - \pi_t} + \right. \\ & \left. + R_t \frac{\pi'_t}{1 - \pi_t} \right] = \frac{1 - \pi_t}{1 - \pi_{t-1}} \left[\alpha_{t+1} + R_t \frac{\pi'_t}{1 - \pi_t} \right] = \tilde{\alpha}_{t+1} + R_t \frac{\pi'_t}{1 - \pi_{t-1}}. \end{aligned}$$

Здесь $R_t = \omega_t - \omega_{t+1}(1 - \pi_{t+1}) / (1 - \pi_t)$. С другой стороны, справедливо непосредственно проверяемое тождество:

$$\omega_t - \omega_{t+1} \frac{1 - \pi_{t+1}}{1 - \pi_t} = h_t^1 - \phi^0(a_t^0, b_{t+1}^0) - h_{t+1}^1.$$

Отсюда вытекает, что

$$R_t = \sum_{k=t}^{\tau-1} \phi^1(a_k(t), b_{k+1}(t)) - \phi^0(a_t^0, b_{t+1}^0) - \sum_{k=t+1}^{\tau-1} \phi^1(a_k(t+1), b_{k+1}(t+1)).$$

Теорема 1 полностью доказана.

3. МОДЕЛЬ ГЕЙЛА С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ ТЕХНОЛОГИЯМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Предположим, что существует возможность изменения исходной технологии $T = T_0$ и переход к новой технологии T_1 , от технологии T_1 возможен переход к технологии T_2 и т.д. При этом каждый переход связан с созданием нового технологического способа, т.е. с последовательным расширением технологий: $T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_N$ (общее число изменений технологии равно N).

Как уже отмечалось, создание каждой технологии требует “преодоления” некоторых барьеров, характеризующихся векторами $\xi_k \in R_+^{m_k}$. Будем считать ξ_k случайным вектором с заданной функцией распределения $\pi_k(y)$. Естественнo предполагать, что до момента θ_k появления технологии T_k характеристики этой технологии известны не полностью. Формально это выражается зависимостью множества T_k от некоторого параметра $s_k \in S$. Этот параметр до момента θ_k считается случайным, а его конкретное значение становится известным только после появления технологии T_k , т.е. после момента θ_k . Параметры ξ_k и s_k предполагаются взаимно независимыми, а множество S — конечным или счетным.

План задается последовательностью функций:

$$\begin{aligned} z_t^k = & \{(a_t^k(\theta_b, s_b, \dots, \theta_k, s_k), \quad b_{t+1}^k(\theta_b, s_b, \dots, \theta_k, s_k)), \quad (c_t^k(\theta_b, s_b, \dots, \theta_k, s_k), \quad d_{t+1}^k(\theta_b, s_b, \dots, \theta_k, s_k))\}, \\ & t \geq \theta_k, \quad 0 \leq k \leq N, \end{aligned}$$

удовлетворяющих ограничениям:

$$\begin{aligned}
 (a_t^k, b_{t+1}^k) &\in T_k(s_k), \quad \theta_k \leq t < \theta_{k+1}, \\
 (c_t^k, d_{t+1}^k) &\in Q_k, \quad \theta_k \leq t < \theta_{k+1}, \\
 b_t^k &\geq a_t^k + c_t^k, \quad \theta_k \leq t < \theta_{k+1}, \\
 \theta_{k+1} &= \min\{t : \sum_{j=\theta_k}^t d_j^k \geq \xi_{k+1}\}, \quad b_{\theta_{k+1}}^{k+1} = b_{\theta_{k+1}}^k
 \end{aligned} \tag{50}$$

(ради единообразия полагаем формально $\theta_0 = 0$, $\theta_{N+1} = \tau - 1$). Вектор начальных ресурсов b_0 предполагается заданным. Требуется выбрать план, доставляющий максимальное значение функционалу

$$\mathbf{E} \left[\sum_{k=0}^N \sum_{t=\theta_k}^{\theta_{k+1}} \varphi^k(a_t^k, b_{t+1}^k, s_k) \right]. \tag{51}$$

Будем предполагать, что функции $\pi_k(y)$, $k = 1, \dots, N$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных и $\pi_k(0) = 0$. Пусть для любых $s_1, \dots, s_N$ справедливо

$$T_1(s_1) \subset \dots \subset T_N(s_N).$$

Множества $Q_k, T_0, T_k(s)$, $k = 1, \dots, N$ выпуклы для каждого $s \in S$, функции $\varphi^k(a, b, s)$ вогнуты по $(a, b) \in T_k(s)$ для каждого $s \in S$, $k = 1, \dots, N$, при этом $\varphi^{k+1}(a, b, s) \geq \varphi^k(a, b, s)$ для каждой пары $(a, b) \in T_k(s)$. Множества Q_k , $k = 1, \dots, N$, ограничены.

Будем говорить, что последовательности неотрицательных вектор-функций $\psi_t^k = \psi_t^k(\theta_1, s_1, \dots, \theta_k, s_k)$, $\alpha_t^k = \alpha_t^k(\theta_1, s_1, \dots, \theta_k, s_k)$ и неотрицательных скалярных функций $R_t^k = R_t^k(\theta_1, s_1, \dots, \theta_k, s_k)$ стимулируют план $\{Z_t^k\}$, если выполнены следующие условия.

1. Для каждого $0 \leq k \leq N$, $\theta_k \leq t < \theta_{k+1}$:

$$(a_t^k, b_t^k) = \arg \max_{(a,b) \in T_k(s_k)} [\varphi^k(a, b, s_k) + \bar{\psi}_{t+1}^k b - \psi_t^k a], \tag{52}$$

$$\bar{\psi}_{t+1}^k = \frac{1 - \pi_{k+1}(y_{t+1}^k)}{1 - \pi_{k+1}(y_t^k)} \psi_{t+1}^k + \frac{\pi_{k+1}(y_{t+1}^k) - \pi_{k+1}(y_t^k)}{1 - \pi_{k+1}(y_t^k)} \mathbf{E}(\psi_{t+1}^{k+1} | \theta_1, s_1, \dots, \theta_k, s_k, \theta_{k+1} = t), \quad y_t^k = \sum_{j=\theta_k}^t d_j^k.$$

2. $(c_t^k, d_{t+1}^k) = \arg \max_{(c,d) \in Q_k} [\alpha_{t+1}^k d - \psi_t^k c]$, $\theta_k \leq t < \theta_{k+1}$.

3. Цены α_t^k удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned}
 \alpha_t^k &= \alpha_{t+1}^k \frac{1 - \pi_{k+1}(y_t^k)}{1 - \pi_{k+1}(y_{t-1}^k)} + R_t^k \frac{\pi_{k+1}'(y_t^k)}{1 - \pi_{k+1}(y_{t-1}^k)}, \quad \theta_k \leq t < \theta_{k+1}, \\
 R_t^k &= W_t^{k+1} - \left[\varphi^k(a_t^k, b_{t+1}^k, s_k) + W_{t+1}^{k+1} \right],
 \end{aligned} \tag{53}$$

где W_t^{k+1} — значение функционала на плане $\{Z_t^k\}$ при условии, что технология T_{k+1} появится в момент t :

$$W_t^{k+1} = \mathbf{E} \left[\sum_{j=k+1}^N \sum_{i=\theta_j}^{\theta_{j+1}} \varphi^j(a_i^j, b_{i+1}^j, s) \middle| \theta_1, s_1, \dots, \theta_k, s_k, \theta_{k+1} = t \right].$$

Теорема 3. Пусть план $\{Z_t^k\}$ оптимален и выполнено следующее условие регулярности: существуют производственные процессы $(\hat{a}_t^k(s), \hat{b}_{t+1}^k(s)) \in T^k(s)$, $1 \leq k \leq N$ такие, что $b_t^k > \hat{a}_t^k(s_k) + c_t^k$, $\theta_k \leq t < \theta_{k+1}$. Тогда существуют цены, стимулирующие план $\{Z_t^k\}$.

Доказательство основано на дискретном стохастическом принципе максимума (см. теорему 2 в разд. 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Макаров В.Л. (2003): Контурь экономики знаний // *Экономист*. Вып. 3.
- Аркин В.И. (1986): Модели экономической динамики с эндогенно меняющейся технологией. Стимулирующие цены. В сб.: *“Исследования по стохастической оптимизации и математической экономике”*. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Макаров В.Л. (2009): Обзор математических моделей экономики с инновациями // *Экономика и мат. методы*. № 1.
- Данилов В.И., Кошевой Г.А. (2009): Математическая модель рынка инноваций // *Экономика и мат. методы*. № 1.
- Сластников А.Д. (1989): Модели экономического роста со скачкообразно меняющейся технологией. В сб.: *“Стохастическое управление в экономике”*. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Arkin V.I. (1987): On the Maximum Principle for a Stochastic Control Problem. In: *“Proceedings of the Bernoulli Society World Congress. Invited Papers”*. Utrecht: VNU Sci. Press.
- Arkin V.I., Evstigneev I.V. (1987): *Stochastic Models of Control and Economic Dynamics*. L.: Academic Press.
- Arkin V.I. (1989): Probabilistic Models of Economic Dynamics with Endogeneous Changes of Technology. *Working Paper WP-89-100*. Laxenburg: IIASA.
- Romer P.M. (1986): Increasing Returns and Long-Run Growth // *J. of Polit. Econ.* Vol. 94.