НАУЧНАЯ СЕССИЯ: ИННОВАЦИОННАЯ ЭКОНОМИКА:
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

ЭКОНОМИКИ С ИННОВАЦИОННЫМИ ТОВАРАМИ*

© 2009 г. В. И. Данилов, Г. А. Кошевой
(Москва)

1. ВВЕДЕНИЕ

Несомненным фактом является то, что экономики высокоразвитых стран включают в себя сектора с товарами, в которых большую часть производственных издержек составляет интеллектуальная составляющая: телекоммуникационная индустрия, компьютерная и т.д. Для краткости и определенности будем называть такие товары И-товарами (символ “И” отражает три черты: инновации, информация и интеллектуальность). Главная особенность И-товаров, отличающая их от обычных товаров — их нерасходуемость. Будучи созданными раз, они не исчезают в процессе потребления. Еще в 1973 г. В.Л. Макаров предложил подход к моделированию экономик с такими товарами (Макаров, 1991). К. Эрроу (Arrow, 1994) рассмотрел “информационную теорию стоимости”, которая во многом перекликалась с подходом В.Л. Макарова.

Модель Макарова получила развитие в работах (Данилов, Кошевой, Сотсков, 1993; Danilov, Koshevoy, Sotskov, 1994, 1997, 1999a; 1999b), в которых были исследованы вопросы существования равновесий в экономиках с И-товарами. Данная статья содержит несколько новых результатов, полученных в этом направлении, уделяя особое внимание принципиальным вопросам, отражающим отличие таких моделей от моделей обычных товаров.

И-товары имеют два главных отличия от обычных товаров.

1. Нерасходуемость. Будучи единожды создан, И-товар может снова и снова, не теряя своих качеств, использоваться многими потребителями. Операция сложения таких товаров идемпотентна, так что множество И-товаров образует решетку в отличие от векторного пространства. Например, когда К. Эрроу (Arrow, 1994) говорит об алгебре информационных товаров, он имеет в виду структуру полурешетки таких товаров.

2. Стоимость копирования И-товара обычно намного меньше затрат на создание (изобретение, доведение до товарного вида) этого товара. Для простоты изложения будем предполагать, что стоимость копирования равна нулю (более общий случай рассмотрен в (Данилов, Кошевой, Сотсков, 1993; Danilov, Koshevoy, Sotskov, 1997)).

Предположим, что в модели имеется один делимый товар — деньги, которые агрегированно отражают часть экономики с обычными товарами. Так что пространство товаров в модели — произведение решетки и действительной прямой. Производители создают информационные товары. Создав товар, производитель становится и собственником всех его копий, производство копий бесплатно. Потребители покупают копии информационных товаров.

Производители описываются функциями издержек, потребители — функциями полезности.

Важным предположением модели является то, что купить товар можно только у собственника товара (производителя) и его нельзя перепродавать. Без такого предположения об охране авторских прав сложно ожидать, что свободный рынок приведет к оптимальному распределению. В этом проявляется специфика информационных товаров — сложность производства и легкость распространения. Такая легкость распространения не стимулирует производство при отсутствии охраны авторских прав.

Приведем простой пример. Пусть имеется один И-товар, один производитель и два покупателя. Пусть издержки производства товара равны 18 долл. Первый покупатель готов заплатить за товар не больше 5 долл., второй — не больше 15 долл. В этой ситуации не существует равновесия с ценами на товар, одинаковыми для обоих покупателей. В самом деле, цена не может быть больше 15 долл. (иначе никто не купит), но цена не может быть меньше 5 долл. (никто не будет производить). При промежуточной цене товар покупает только второй потребитель, но его денег мало для покрытия издержек. Отсюда следует важный вывод — цены должны быть индивидуальными.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта государственной поддержки Ведущих научных школ РФ (проект НШ-929.2008.6).

ми для каждого потребителя, т.е. должна осуществляться ценовая дискриминация. В нашем примере можно продавать первому потребителю за 4 долл. и второму — за 14. Конечно, это тоже связано с защитой авторских прав.

Разумеется, в настоящей работе имеется много (быть может, даже слишком много) упрощающих предположений. В жизни все не так просто: никто не знает, сколько надо затратить (потому что такого продукта вообще еще нет и не было и не ясно — будет ли), успех носит вероятностный характер. То есть многие изобретатели тратят ресурсы впустую. Другое упрощение: изобретение делается один раз, а соответствующий И-товар потребляется длительное время после этого. Третье, как уже говорилось, цены для покупателей должны быть индивидуализированы; как это практически реализовать — отдельная непростая задача.

Так что в своей работе мы не пытаемся дать ответы на все вопросы, связанные с И-товарами. Акцентируем внимание лишь на одном аспекте, связанном с заменой привычного векторного пространства товаров на дискретную решетку. Возникающие тут проблемы близки к тем, которые встречаются в экономиках с неделимыми товарами. Общая трудность — дискретность и связанная с ним невыпуклость задач. Математическим задачам, связанным с этой проблемой, посвящена работа (Danilov, Koshevoy, 2004).

2. МОДЕЛЬ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Обозначим через G конечное множество элементарных И-товаров (или лучше — И-благ, товарами они становятся на рынке). Элементарные И-товары можно комбинировать, объединять. Поэтому множество товарных наборов представляет булеву решетку $\mathbb{B} = 2^G$ подмножеств множества G . Элементы $\mathbb{B}$ будем обозначать буквами X , Y и т.п.

Обычные товары представлены агрегированно через делимый товар — деньги. Итак, пространство товаров это произведение $\mathbb{B} \times \mathbb{R}$. Впрочем, в силу делаемых далее предположений о трансферабельности, деньги не будут явно входить в число товаров и можно работать только с решеткой $\mathbb{B} = 2^G$.

Множество фирм, производящих И-товары, обозначим через J . Предполагается, что каждая фирма, производящая какой-нибудь товар, обладает копиями этого товара уже бесплатно. Это напоминает производство с фиксированными издержками.

Фирма-производитель j описывается функцией издержек $a_j : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Иначе говоря, фирма j может произвести товар $X \in \mathbb{B}$, если затратит денег в количестве $a_j(X)$. Будем считать, что $a_j(\mathbf{0}) = 0$ и что функция a_j монотонна, т.е. $a_j(X) \geq a_j(X')$ при $X \subset X'$.

Множество потребителей (в широком смысле этого слова, например, группа однородных потребителей может быть одним потребителем в модели) обозначается через I . Потребитель $i \in I$ описывается функцией полезности $u_i : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Функции u_i также предполагаются монотонными и равными 0 в точке 0.

Состояние экономики задается набором $((X_i)_{i \in I}, (Y_j)_{j \in J})$, где $(X_i)_{i \in I}$ — планы потребления и $(Y_j)_{j \in J}$ — планы производства, $\forall X_i, Y_j \in \mathbb{B}$. Состояние $((X_i), (Y_j))$ называется допустимым, если $\cup_{i \in I} X_i \subset \cup_{j \in J} Y_j$, т.е. предложение не меньше спроса.

Для любого допустимого состояния $((X_i), (Y_j))$ можно посчитать его тотальную ценность (совокупное благосостояние) как $\sum_i u_i(X_i) - \sum_j a_j(Y_j)$. Естественно интересоваться состояниями, для которых эта общественная полезность была бы максимальной. Такие оптимальные состояния всегда существуют (если множество D конечно, как было предположено раньше). Кроме того, можно считать, что в оптимальном состоянии все X_i одинаковы (и равны $\vee Y_j$), а Y_j попарно не пересекаются.

Как же экономика могла бы прийти в оптимальное состояние? Это типичная задача планирования. Трудности ее решения очевидны: сбор информации о полезностях и издержках, проблема стратегического поведения и искажения информации, большая размерность задачи. Поэтому естественно искать решение более дезагрегированным путем, например с помощью рынка. В

чем суть рыночного подхода? Общение всех со всеми заменяется общением каждого участника со вспомогательным (фиктивным) агентом (центр). Этот агент “скупает” все И-товары у производителей, а потом распродает их потребителям.

Итак, будем рассматривать “рыночные” способы функционирования сектора И-товаров. Сначала центр скупает товар у производителей. Предположим, что функция $q_j : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ говорит о том, сколько денег получает производитель j , продавая свой товар центру. Точнее, если он сдает на центральный склад товар Y , он получает $q_j(Y)$ денег. Представим теперь, что центр решил купить набор Y . Естественно, он будет покупать у того производителя j , у которого стоимость минимальна. Таким образом, реальное значение имеет $q = \min q_j$. Так что взаимодействие центра с производителями описывается одной функцией $q : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$.

Однако на этом процесс не кончается. Дело в том, что товарные наборы можно довольно свободно рассыпать и собирать, и это накладывает ограничение на возможный вид функции q . Предположим, что $X = Y + Z$ (операция “+” означает, что $X = Y \cup Z$ и $Y \cap Z = \emptyset$) и $q(X) < q(Y) + q(Z)$. Тогда производители не будут предлагать набор X , а только наборы Y и Z , рассчитывая тем самым на большую выручку. Наоборот, если $q(X) > q(Y) + q(Z)$, то центр не будет интересоваться “объединенным” набором X , а будет покупать отдельно Y и Z , что обойдется ему дешевле. Одним словом, функция стоимости q должна быть аддитивной. Так как множество $\mathbb{B}$ не является группой, то лучше говорить о *модулярности*: если товарные наборы Y и Z не пересекаются, то $q(Y \cup Z) = q(Y) + q(Z)$. В более общей форме: для любых товарных наборов Y и $Z \in \mathbb{B}$ выполнено равенство $q(Y \cup Z) + q(Y \cap Z) = q(Y) + q(Z)$. Очевидно, что такая функция задается своими значениями на элементарных товарах; стоимость комплекта X равна сумме входящих в него элементарных товаров.

Рассмотрим теперь взаимодействие центра с потребителями. Пусть потребитель i получает товары по стоимости $p_i : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Применяя предыдущие рассуждения, видим, что p_i должны быть аддитивными (модулярными). Однако для разных покупателей они могут (и в общем случае будут) различаться, т.е. будут индивидуализированными. Это следствие того, что покупать товар потребители могут только в одном месте, у центра.

Приходим к выводу, что ценовой аппарат описывается модулярными (или линейными) функциями q и $(p_i, i \in I)$. Каждый производитель j ориентируется на закупочные цены q и стремится максимизировать свою прибыль $q(Y) - a_j(Y) \rightarrow \max$. Пусть Y_j означает одно из решений этой задачи. Соответственно, потребитель i максимизирует чистую полезность, т.е. решает задачу $u_i(X) - p_i(X) \rightarrow \max$; X_i — решение этой задачи. И все это хозяйство (главным образом, цены $(q, (p_i))$) является равновесием, если эти локальные решения (Y_j) и (X_i) связаны двумя балансами:

$$1) \text{ натуральным — } \cup_i X_i \subset \cup_j Y_j;$$

$$2) \text{ двумя финансовыми — } \sum_j q(Y_j) \leq q(\cup_j Y_j) \text{ и } q(\cup_j Y_j) \leq \sum_i p_i(X_i).$$

С первым балансом все понятно: планы потребителей должны быть покрыты предложением производителей. Первый финансовый баланс отражает взаимодействие производителей с центром (или рынком). Каждый производитель рассчитывает получить $q(Y_j)$ денег; затраты центра — $q(\cup_j Y_j)$. Аналогичный смысл у второго финансового баланса.

Отметим, что первое финансовое неравенство выполняется как равенство. Более того, если какой-то товар у входит в Y_j и Y_k (при $j \neq k$), то его цена $q(y) = 0$. Если сделать предположение о строгой монотонности функций издержек производителей, то по нулевой цене никто производить не будет. Поэтому планы производителей (в равновесии) не пересекаются. Кроме того, в силу равенства $\sum_j q(Y_j) = q(\cup_j Y_j)$ финансовые балансы можно переписать как $\sum_j q(Y_j) \leq \sum_i p_i(X_i)$.

Еще одно замечание. В общем случае центр получает прибыль. Это кажется не очень осмысленным, так как это фиктивный орган, введенный лишь для пояснения того, как должен быть устроен рынок И-товаров. Поэтому представляется естественным потребовать, чтобы этот центр работал бесприбыльно. Это формализуется требованием $q = \sum_i p_i$. Итак, приходим к окончательному определению равновесия, с которым и будем далее работать.

Определение. *Равновесием* (конкурентным) называется набор следующих данных: $(X_i)_{i \in I}$ – планы потребителей, $(Y_j)_{j \in J}$ – планы производителей и $(p_i)_{i \in I}$ – индивидуальные цены для потребителей, такие что:

1) каждое X_i является решением задачи $u_i(X) - p_i(X) \rightarrow \max$;

2) каждое Y_j – решением задачи $(\sum_i p_i)(Y) - a_j(Y) \rightarrow \max$;

3) $\cup_i X_i \subset \cup_j Y_j$;

4) $(\sum_i p_i)(\cup_j Y_j) \leq \sum_i p_i(X_i)$ (тогда это неравенство выполняется как равенство; кроме того, если обозначить $Y = \cup_j Y_j$, то можно считать, что все $X_i = Y$).

Оптимальность равновесий. Важнейшим свойством конкурентного равновесия является его оптимальность. Иначе говоря, *если $((X_i), (Y_j), (p_i))$ – равновесие, то совокупное благосостояние $\sum_i u_i(X_i) - \sum_j a_j(Y_j)$ максимально возможное среди всех допустимых состояний экономики.* Рассуждение здесь достаточно стандартное.

Пусть $((X'_i), (Y'_j))$ – произвольное допустимое состояние, это означает, что $\cup X'_i \subset \cup Y'_j$. Согласно свойству 1 равновесий имеем неравенства

$$u_i(X'_i) - p_i(X'_i) \leq u_i(X_i) - p_i(X_i).$$

Просуммировав их, получаем

$$\sum_i u_i(X'_i) - \sum_i p_i(X'_i) \leq \sum_i u_i(X_i) - \sum_i p_i(X_i),$$

аналогично для издержек –

$$\sum_j p(Y'_j) - \sum_j a_j(Y'_j) \leq \sum_j p(Y_j) - \sum_j a_j(Y_j),$$

где $p = \sum_i p_i$. Складывая их, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \sum_i u_i(X'_i) - \sum_j a_j(Y'_j) &\leq \sum_i u_i(X_i) - \sum_j a_j(Y_j) + \sum_i p_i(X'_i) - \\ &- \sum_i p_i(X_i) - \sum_j p(Y'_j) + \sum_j p(Y_j). \end{aligned}$$

Так что осталось установить два неравенства – $\sum_i p_i(X'_i) \leq \sum_j p(Y'_j)$ и $\sum_j p(Y_j) \leq \sum_i p_i(X_i)$. Второе неравенство – это финансовый баланс из определения равновесия. Что касается первого, то обозначим $\cup_j Y'_j$ через Y' . Так как $X'_i \subset Y'$, а цены p_i неотрицательны, имеем $\sum_i p_i(X'_i) \leq \sum_i p_i(Y') = p(Y')$. Поэтому достаточно установить неравенство $p(Y') \leq \sum_j p(Y'_j)$. А оно следует из неотрицательности и линейности функционала p и равенства $Y' = \cup_j Y'_j$. ■

Таким образом, оптимальность установлена. В частности, получаем, что по модулю товаров с нулевыми ценами (а таких не будет вообще, если функции u_i и a_j строго монотонны) Y_j и Y'_j для разных производителей не пересекаются. То есть в равновесии производители делят рынок, т.е. один и тот же товар не производится разными производителями¹.

Если должным образом определить понятие ядра, то можно показать, что равновесие принадлежит ядру (подробности см. в (Danilov, Koshevoy, Sotskov, 1994)).

¹ Недавний конфликт между Netscape Navigator и Microsoft по поводу включения Internet Explorer в пакет Windows можно рассматривать как подтверждение этого свойства разделения рынка в равновесии.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЙ

Основная проблема, которой будем заниматься дальше, — это задача существования равновесий. Покажем, что без наложения достаточно сильных условий равновесия нет. Это поднимает трудный вопрос о том, что же происходит в этом случае, вопрос, который мы оставляем без ответа. С другой стороны, предлагается некоторый подход, позволяющий строить достаточные условия существования равновесий.

Начнем с того, что существуют достаточно естественные операции агрегирования, с помощью которых можно свести задачу к случаю одного потребителя и одного производителя.

Агрегирование потребителей. Оно совсем простое: заменим всех потребителей (с функциями полезностей u_i) на одного с функцией полезности $U = \sum_i u_i$.

Агрегирование производителей. Оно осуществляется с помощью (инфинимальной) конволюции (свертки) функций издержек a_j . А именно, определим функцию *совокупных издержек* A формулой:

$$A(Y) = \min \left(\sum_j a_j(Y_j) \right),$$

где (Y_j) пробегают всевозможные наборы, такие что $Y = \cup_j Y_j$. Иначе говоря, план производства Y распределяется между отдельными производителями так, чтобы суммарные издержки были минимальны.

Трудности с существованием равновесий можно обсуждать на модели с двумя агентами: одним потребителем и одним производителем. Ситуация зависит от вида функций A и U . Как правило, если равновесие существует в агрегированной модели, то его можно разагрегировать и получить равновесие в исходной модели.

Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда имеется всего один И-товар g . В этом случае имеем две существенно разные ситуации:

- 1) $U(g) \geq A(g)$;
- 2) $U(g) < A(g)$.

В первом случае в качестве равновесной цены можно взять любое число p ($p = p(g)$) между $A(g)$ и $U(g)$. Тогда производителю выгодно выпустить товар g , а потребителю — его покупать. Во втором случае берем $p(g)$ между $A(g)$ и $U(g)$, но теперь уже строго между. Тогда производитель не выпускает g , т.е. выпускает 0. А потребитель не просит g (слишком дорого), т.е. просит 0.

В случае двух И-товаров (или трех и более) равновесий уже может не быть.

Пример. Пусть есть два элементарных И-товара b и c . Функция полезности U потребителя равна 0 в 0 и равна 1 для остальных трех товарных наборов b , c и bc . Пусть функция издержек A равна U . Предположим, что (X, X, p) — равновесие в этой системе. Тогда в точке X функция $U - p$ достигает максимума, точно так же как функция $p - A = p - U$. Но если в некоторой точке и функция $U - p$, и эта же функция со знаком минус достигают максимума, то функция постоянна. Более того, эта константа равна 0 (ибо таково значение в 0), откуда получаем, что $U = p$ — линейная функция. Но это явно не так.

Давайте проанализируем, что мешает существованию равновесных цен. И для простоты изложения будем считать, что перед нами привычная ситуация с непрерывными товарами. Товары представлены единичным отрезком $[0, 1]$, полезность и издержки описываются функциями полезности U и A , заданными на этом отрезке. Пусть x^* — точка на отрезке $[0, 1]$, где функция благосостояния $U - A$ достигает максимума, равного w , т.е. $w = \max(U - A) = U(x^*) - A(x^*)$. Графически это соотношение можно отобразить так: график функции $U(x)$ лежит ниже графика функции $A(x) + w$, и обе функции касаются друг друга в точке x^* . Задача же равновесия состоит в том, чтобы разделить эти две кривые графиком некоторой аффинной функции $a(x) = p(x) + a(0)$. В этом случае линейная функция $p(x)$ и будет равновесной ценой.

Это указывает на то, что необходимо взять “вогнутую оболочку” $\hat{U}$ функции U и “выпуклую оболочку” $\check{A} + w$ функции $A + w$. Эти функции тоже будут разделяться аффинной функцией $a(x)$. И максимум разности $\hat{U} - \check{A}$ снова будет равен w . Верно и обратное утверждение: если $\max(\hat{U} - \check{A}) = \max(U - A)$ (а всегда первый максимум не меньше второго), то равновесие суще-

стует. В самом деле, выпуклая функция $\check{A} + w$ в этом случае расположена не ниже вогнутой функции $\hat{U}$ и по основной теореме о выпуклых функциях их можно разделить аффинной функцией.

Вернемся к нашей задаче с функциями на булевом кубе $\mathbb{B} = \{0,1\}^n$, где n – число элементарных И-товаров, т.е. число элементов множества G . Продолжим их до вогнутой функции $\hat{U}$ и выпуклой функции $\check{A}$ на весь “настоящий” куб $[0,1]^n$. При этом $\hat{U}$ определяем по формуле (где x означает произвольную точку куба $[0,1]^n$):

$$\hat{U}(x) = \min(a(x)),$$

где a пробегает множество аффинных функций, таких что $a(X) \geq U(X)$ для любой точки из булева куба $\mathbb{B}$. Симметрично $\check{A}$ определяется как максимум аффинных функций, которые меньше или равны A во всех точках X булева куба. В этих терминах критерий существования равновесной цены имеет вид $\max(\hat{U} - \check{A}) = \max(U - A)$. Или иначе: максимум разности функций $\hat{U} - \check{A}$ достигается в точке из булева куба $\mathbb{B}$.

Как, к примеру, это выглядит в приведенном выше примере? Функция U была равна 0 в точке $(0,0)$ и равна 1 в точках $(1,0)$, $(0,1)$ и $(1,1)$ булева квадрата. Как легко понять, $\hat{U}(0.5,0.5) = 1$. С другой стороны, функция $\check{A}(0.5,0.5) = 0.5$. Разность $\hat{U} - \check{A}$ в этой точке равна $1 - 0.5 = 0.5$, что строго больше, чем $\max(U - A) = 0$. Поэтому равновесия нет. (Можно проверить, что максимум $\hat{U} - \check{A}$ достигается в точке $(0.5,0.5)$, которая не целая и не принадлежит булеву квадрату.)

4. ПАРКЕТЫ

Чтобы более обстоятельно обсуждать эти вопросы, полезно ввести понятие паркета функции. Для определенности будем обсуждать в основном паркеты вогнутых функций типа $\hat{U}$, заданных на кубе $[0,1]^n$. Потом кратко скажем про выпуклые функции типа $\check{A}$.

Паркет – это “правильное” разбиение $\mathcal{P}$ куба $[0,1]^n$ (или другого многогранника) в конечное объединение выпуклых целых многогранников (*паркетин*, или ячеек паркета). Выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ называется *целым*, если все его вершины целые (т.е. имеют целочисленные координаты). Многогранники в кубе – это, когда все его вершины принадлежат булеву кубу, т.е. имеют координаты 0 или 1. Правильность разбиения означает, что любые два многогранника P и Q , входящие в паркет $\mathcal{P}$, пересекаются по общей грани (или вообще не пересекаются). Удобно считать, что грань любой паркетин тоже входит в паркет. Считается, что паркетин покрывают весь куб.

Фиксируем некоторый паркет $\mathcal{P}$ куба $[0,1]^n$. Вогнутая функция F , заданная на кубе, называется *согласованной с паркетом $\mathcal{P}$* (или *$\mathcal{P}$ -вогнутой*), если ограничение функции F на каждую паркетину $P \in \mathcal{P}$ является аффинной функцией (зависящей, конечно, от этой паркетин). Функция f , заданная на булевом кубе (т.е. в вершинах куба $[0,1]^n$; чтобы различить говорят, что f *дискретная* функция), называется *$\mathcal{P}$ -вогнутой*, если таковой является ее вогнутая оболочка $F = \hat{f}$.

Функция g называется *$\mathcal{P}$ -выпуклой*, если функция g будет $\mathcal{P}$ -вогнутой.

Для каждой дискретной функции f , заданной на булевом кубе, существует паркет $\mathcal{P}$, такой что f $\mathcal{P}$ -вогнута (и, вообще говоря, другой паркет $\mathcal{Q}$, такой что она $\mathcal{Q}$ -выпукла).

Вернемся к задаче существования равновесия.

Предложение 1. *Предположим, что для некоторого паркета $\mathcal{P}$ функция полезности U $\mathcal{P}$ -вогнута, а функция издержек A $\mathcal{P}$ -выпукла. Тогда в агрегированной модели существует равновесие.*

В самом деле, пусть x – точка куба, где достигается максимум разности $\hat{U} - \check{A}$. И пусть P – паркетина паркета $\mathcal{P}$, содержащая точку x . Так как $\hat{U}$ и $\check{A}$ аффинны на P , их разность $\hat{U} - \check{A}$ тоже аффинна на P . Но максимум аффинной функции, определенной на многограннике, достигается в некоторой вершине. Поэтому можно считать, что точка x является вершиной P . По определению паркета многогранник $\mathcal{P}$ целый, так что $x \in \mathbb{B}$. И в этом случае равновесие существует.

Следствие 1. Пусть для некоторого паркета $\mathcal{P}$ все индивидуальные функции полезности u_i $\mathcal{P}$ -вогнуты, а функция совокупных издержек U $\mathcal{P}$ -выпукла. Тогда существует равновесие.

В самом деле, функция агрегированной полезности U тоже $\mathcal{P}$ -вогнута и поэтому в агрегированной модели существует равновесие (X, X, p) . Легко проверить, что можно так разагрегировать p в сумму p_i и так разагрегировать Y в объединение Y_j , что тройка $((X_i = X), (Y_j), (p_i))$ является равновесием в исходной модели.

Область применимости приведенного рассуждения можно расширить с помощью следующего нехитрого трюка. Скажем, что два паркета $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ *совместимы*, если для любой паркетины P из $\mathcal{P}$ и паркетины Q из $\mathcal{Q}$ их пересечение $P \cap Q$ является целым многогранником. В этом случае можно соорудить новый паркет (обозначим его $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$), состоящий из всевозможных пересечений $P \cap Q$, где $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{Q}$.

Следствие 2. Пусть функции полезности u_i потребителей $\mathcal{P}$ -вогнуты, а функция совокупных издержек A $\mathcal{Q}$ -выпукла для некоторых совместимых паркетов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Тогда в агрегированной модели существует равновесие.

В самом деле, в этом случае u_i $\mathcal{R}$ -вогнуты, а A $\mathcal{R}$ -выпукла для $\mathcal{R} = \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$.

В свете этих утверждений представляются важными две задачи. Первая – искать такие паркетны, для которых условия $\mathcal{P}$ -вогнутости и $\mathcal{P}$ -выпуклости имеют смысл с экономической точки зрения. И вторая, более общая и математическая, – искать классы многогранников, для которых выполнено утверждение о целочисленности пересечения. Вторая задача более подробно рассмотрена в (Danilov, Koshevoy, 2004).

5. СУБМОДУЛЯРНЫЕ И СУПЕРМОДУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

На кубе $[0,1]^n$ существует много разных паркетов. Но среди них явно выделяется своей каноничностью так называемое *стандартное разбиение*, или *стандартная триангуляция* куба. Оно встречается во многих задачах, таких как комбинаторная топология или алгоритмы поиска неподвижной точки. Стандартное разбиение состоит из симплексов и задается следующим образом.

Рассмотрим цепь (или флаг) возрастающих элементов $X_1 < \dots < X_k$ булева куба $\mathbb{B}$. Выпуклая оболочка соответствующих вершин куба $[0,1]^n$ образует симплекс в этом кубе. Легко увидеть, что совокупность всех таких симплексов (по всем возрастающим цепочкам) образует триангуляцию (паркет) куба $[0,1]^n$. Максимальные паркетины (имеющие размерность n) соответствуют линейным упорядочениям множества G элементарных И-товаров; таких паркетин $n!$ штук. Но есть еще много меньших паркетин – граней n -мерных паркетин. Обозначим этот паркет (стандартную триангуляцию) как $\mathcal{T}$.

Оказывается, что $\mathcal{T}$ -вогнутые функции (на булевом кубе $\mathbb{B} = 2^n$) – это в точности *супермодулярные функции*². Напомним, что функция f на булевом кубе $\mathbb{B}$ является *супермодулярной*, если выполняются неравенства

$$f(X) + f(Y) \leq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (1)$$

для любых $X, Y \in \mathbb{B}$. (Если заменить $\cup$ и $\cap$ на $\vee$ и $\wedge$, получим определение супермодулярности для функции на произвольной решетке.) Условие супермодулярности можно переписать так: пусть $Y \subset X$ и l – элементарный И-товар, не принадлежащий X . Тогда

$$f(Y \cup l) - f(Y) \leq f(X \cup l) - f(X).$$

Если понимать f как функцию полезности, то указанное свойство означает, что прибавление товара l дает больший прирост в полезности, когда он прибавляется к большему набору товаров.

² Этот довольно простой результат имеет длинную историю. Он приведен в (Lovász, 1983), хотя, видимо, был известен еще Шоке. Более детальное обсуждение см. в (Murota, 2003).

Экономически это интерпретируется как свойство *дополнительности* товаров. Грубо говоря, полезность потребления a и b больше суммы полезностей потребления a и b . Товар a как бы дополняет товар b (и наоборот). Типичные примеры такой ситуации — автомобиль и бензин (автомобиль без бензина представляет малую ценность, как и бензин без автомобиля; но если есть и то, и другое — это уже кое-что) и комплектующие к компьютеру.

Аналогично T -выпуклые функции на $\mathbb{B}$ — это *субмодулярные* функции (у которых неравенство (1) заменяется на противоположное). Применительно к функциям издержек субмодулярность означает, что затраты на производство дополнительного I -товара убывают с ростом уровня производства. Как если бы была экономия от масштаба. Применяя предложение 1, получаем, что *если функция полезности U супермодулярна, а функция издержек A супермодулярна, то в агрегированной модели существует равновесие*. Заметим, что условия тут выражены в агрегированных терминах.

А можно ли сформулировать результат в индивидуальных терминах, т.е. в терминах u_i и a_j ? Чтобы ответить на этот вопрос, займемся поведением паркетов при суммах и свертках функций.

Суммирование. Пусть u является $\mathcal{P}$ -вогнутой, а v — $\mathcal{Q}$ -вогнутой функциями для паркетов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Очевидно, что функция $u + v$ является $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ -вогнутой (если паркет $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ совместимы). В частности, сумма двух (или произвольного числа) $\mathcal{P}$ -вогнутых функций $\mathcal{P}$ -вогнута. Применительно к супермодулярности получаем (простое и известное) утверждение, что сумма супермодулярных функций супермодулярна. В частности, справедлив следующий факт (фактически это основная теорема из (Данилов, Кошевой, Сотсков, 1993); там только добавлены копировщики).

Теорема 1. *Предположим, что:*

- 1) *все индивидуальные функции полезности u_i супермодулярны;*
- 2) *функция агрегированных издержек $A = \sum_j a_j$ субмодулярна.*

Тогда существует равновесие.

Условие 2 выглядит недостаточно удовлетворительным, так как дается в агрегированных терминах. В (Данилов, Кошевой, Сотсков, 1993) приведен пример (с двумя производителями и одним потребителем; товаров три), когда полезность супермодулярна, индивидуальные издержки производителей a_1 и a_2 субмодулярны, но тем не менее равновесия нет. Это показывает, в частности, что свертка субмодулярных функций не всегда субмодулярна. Ниже будет обсуждаться вопрос, как меняются паркет $\mathcal{L}$ при свертке. А пока отметим два частных случая, когда все же можно утверждать, что свертка субмодулярна.

Случай 1. Если I -товаров всего два.

Случай 2. Когда функции издержек a_j модулярны.

Можно предложить более общее условие, которое включает оба предыдущих случая. Для этого с каждым подмножеством $A \subset \{1, \dots, n\}$ свяжем следующую *пакетную* функцию $\alpha_A(x) = -\max(x_i, i \in A)$. Трактовать ее напрямую как функцию издержек не очень хорошо, потому что тогда получается, что издержки производства набора A отрицательны, что довольно нелепо. Однако если прибавить к ней линейную достаточно монотонную функцию, то получим хорошего кандидата на функцию издержек. Во всяком случае, такая пакетная (или комплектная) функция субмодулярна.

Свертки пакетных функций в общем случае также не субмодулярны. Однако имеется важный случай, когда субмодулярность свертки имеет место. Это случай так называемых ламинарных семейств. Напомним, что набор $\mathcal{L}$ подмножеств в $\{1, \dots, n\}$ называется *ламинарным*, если полностью следующее условие: если подмножества A и B принадлежат $\mathcal{L}$, то либо $A \subset B$, либо $B \subset A$, либо A и B не пересекаются. Например, семейство $(\{1, 2\}, \{2, 3\})$ не ламинарное, а семейство $(\{1, 2, 3\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\})$ ламинарное.

Представим, что дано ламинарное семейство $\mathcal{L}$. Назовем функцию (заданную на булевом кубе $\mathbb{B} = \{0, 1\}^n$) *выпукло-согласованной с ламинарным семейством $\mathcal{L}$* , если она получается как свертка линейных функций и функций вида $k\alpha_A$, где $A \in \mathcal{L}$, а $k \geq 0$. Такие функции являются субмодулярными (доказательство этого можно найти в (Murata, 2003)).

Следствие. В условиях теоремы 1 заменим условие 2 на более индивидуализированное условие:

2') существует такое ламинарное семейство $\mathcal{L}$ (общее для производителей), что функции издержек a_j всех производителей выпукло-согласованы с этим семейством. Тогда равновесие существует.

В самом деле, свертка функций a_j очевидно тоже выпукло-согласована с ламинарным семейством $\mathcal{L}$, и, следовательно, субмодулярна. А остальное следует из теоремы 1.

Свертка. Обсудим теперь вопрос об изменении паркета при свертке. Пусть f $\mathcal{P}$ -выпуклая функция, а g $\mathcal{Q}$ -выпуклая функция на булевом кубе $\mathbb{B}$. И пусть $\check{f}$ и $\check{g}$ их овыпукления. Определим свертку $\check{f}$ и $\check{g}$ как функцию $\check{f} * \check{g}$ на удвоенном кубе $2[0,1]^n = [0,2]^n$, заданную формулой

$$(\check{f} * \check{g})(x) = \min(\check{f}(y) + \check{g}(z)),$$

где y и z принадлежат кубу $[0,1]^n$ и $x = y + z$. Легко увидеть, что эта свертка $\check{f} * \check{g}$ будет и выпуклой функцией, и $\mathcal{R}$ -выпуклой относительно некоторого паркета $\mathcal{R}$ (удвоенного куба), паркетины которого имеют вид $P + Q$, где $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{Q}$.

Однако здесь нас подстерегают две неприятности. С одной мы фактически уже сталкивались. Суммы симплексов стандартной триангуляции куба могут не быть стандартными симплексами; более того, они могут оказаться и не составленными из таких симплексов. С этим обстоятельством связано то, что свертка субмодулярных функций часто бывает несубмодулярной.

Вторая неприятность: может оказаться, что в некоторых целых точках свертка $\check{f} * \check{g}$ будет строго меньше, чем $f * g$. Поэтому функция $\check{f} * \check{g}$, ограниченная на единичный куб, будет отличаться от овыпукления $f * g$.

Чтобы справляться с этой трудностью, в (Danilov, Koshevo, 2004) была разработана теория дискретно выпуклых множеств. Наиболее интересный класс выпуклых многогранников доставляет класс целых полиматроидов (разд. 6).

6. ПОЛИМАТРОИДЫ

Фиксируем целое n . Обозначим через $\mathbb{A} = \mathbb{A}(n)$ набор векторов (в $\mathbb{R}^n$) вида $1_i - 1_j$ или $\pm 1_i$, где 1_i обозначает базисный вектор i в $\mathbb{R}^n$. *Полиматроидом* будем называть *целый* выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, любое ребро которого параллельно некоторому элементу из $\mathbb{A}$. По-другому такие многогранники можно называть (целыми) *$\mathbb{A}$ -выпуклыми*. Приведем некоторые примеры, иллюстрирующие полиматроидность.

1. Куб (и вообще любой целый параллелепипед, их еще называют ящиками) в $\mathbb{R}^n$ — это полиматроид.

2. Подмножество в ящике, высеченное неравенствами $a \leq \sum_i x_i \leq b$, где a и b целые, является полиматроидом. В частности, любой гиперсимплекс является полиматроидом.

Многогранники такого вида называются *обобщенными ящиками*. Можно показать, что пересечение полиматроида с любым обобщенным ящиком будет полиматроидом.

3. Октаэдр в $\mathbb{R}^3$, заданный уравнениями $0 \leq x_i \leq 1$, $1 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$, является полиматроидом. Если этот октаэдр рассечь плоскостью $x_1 = x_2$ (или $x_1 = x_3$, или $x_2 = x_3$), то каждая половинка октаэдра — полиматроид.

Важное свойство полиматроидов сформулировано в следующей теореме.

Теорема Эдмондса. *Пересечение двух полиматроидов является целым многогранником (в общем случае — не полиматроидом).*

Скажем, что паркет *полиматроидный*, если все его паркетины — полиматроидны. Из теоремы Эдмондса видно, что любые два полиматроидных паркета совместимы.

Выпуклая функция F (на некотором полиматроиде $P \subset \mathbb{R}^n$) называется *выпуклой полиматроидной* (или *$\mathbb{A}$ -выпуклой*) функцией, если существует паркет $\mathcal{P}$ (многогранника P), такой что:

- 1) функция F согласована с паркетом $\mathcal{P}$,
- 2) все паркетины $\mathcal{P}$ — полиматроиды.

Наконец, “дискретная” функция f (на некотором конечном подмножестве D в $\mathbb{Z}^n$) называется $\mathbb{A}$ -выпуклой, если:

- 1) $D = \text{co}(D) \cap \mathbb{Z}^n$,
- 2) если $F = \tilde{f}$ – овыпукление f , то $F|_D = f$;
- 3) функция F $\mathbb{A}$ -выпукла.

Можно показать, что в этом случае многогранник $\text{co}(D)$ будет полиматроидом. Например, из примера 2 видно, что любая дискретная функция вида $\varphi(x_1 + \dots + x_n)$, где φ – выпуклая функция одной переменной, является $\mathbb{A}$ -выпуклой.

Главное свойство “дискретных” $\mathbb{A}$ -выпуклых функций состоит в том, что они стабильны относительно свертка. То есть если f и g – “дискретные” $\mathbb{A}$ -выпуклые функции, то такова же их свертка $f * g$.

Применим эту теорию к задаче равновесия.

Теорема 2. *Предположим, что:*

- 1) функции издержек a_j являются (дискретными) $\mathbb{A}$ -выпуклыми;
- 2) функции полезности u_i будут $\mathcal{P}$ -вогнутыми для некоторого полиматроидного паркета $\mathcal{P}$ куба $[0,1]^n$.

Тогда в модели существуют равновесия.

Приведем доказательство, так как в наших прежних работах этого результата не было. В самом деле, как уже говорилось, функция агрегированных издержек A является $\mathbb{A}$ -выпуклой как свертка $\mathbb{A}$ -выпуклых функций. Поэтому A $\mathcal{Q}$ -выпукла для некоторого полиматроидного паркета $\mathcal{Q}$. Согласно теореме Эдмондса, полиматроидные паркетты $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ совместимы. Остается применить следствие 2 из разд. 4.

Заметим, что в общем случае сумма $\mathbb{A}$ -вогнутых функций не будет $\mathbb{A}$ -вогнутой. Поэтому нужно потребовать согласованность u_i с некоторым общим для всех паркетом $\mathcal{P}$. Чтобы последнее требование не осталось висящим в воздухе, приведем один важный способ конструирования полиматроидных паркеттов и соответствующих вогнутых функций. Способ опирается на ламинарные семейства, введенные в разд. 5.

Итак, пусть дано некоторое ламинарное семейство $\mathcal{L}$ подмножеств в $\{1, \dots, n\}$. Для каждого $A \in \mathcal{L}$ разрежем куб гиперплоскостями вида $x(A) = k$, где $x(A) = \sum_{i \in A} x_i$, а k – целое неотрицательное число. Когда такие разрезы будут проделаны для всех $A \in \mathcal{L}$ и всех k , получим полиэдральное разбиение (обозначим его как $\mathcal{P}(\mathcal{L})$) единичного куба. Неочевидное, но верное утверждение состоит в том, что это разбиение $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ является полиматроидным паркетом.

Следующая конструкция позволяет строить много (хотя и не все) дискретных функций, согласованных с этим паркетом $\mathcal{P}(\mathcal{L})$. Для этого для каждого множества A образуем функцию $v_A(X) = \varphi_A(|A \cap X|)$, где φ_A – вогнутая и монотонная функция от одного переменного (например, $\log$), $| \cdot |$ обозначает число элементов соответствующего конечного множества. Суммы функций такого вида (когда A пробегает $\mathcal{L}$) называются *вогнутыми функциями, согласованными с семейством $\mathcal{L}$* ; легко понять, что такие функции будут $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ -вогнутыми.

Стоит отметить, что свойство $\mathbb{A}$ -вогнутости функции полезности тесно связано со свойством *валовой заменимости* соответствующего спроса. Более подробно об этом см. (Danilov, Koshevoy, Lang, 2003; Murota, 2003).

Заметим, что вместо унимодулярной системы $\mathbb{A}$, которая была использована для определения полиматроидов, можно взять любую другую унимодулярную систему. Например, состоящую из векторов вида $1_i + 1_{i+1} + \dots + 1_j$, где $i \leq j$. Эта система изоморфна $\mathbb{A}$, поэтому соответствующие многогранники представляют линейные образы полиматроидов и для них верны все те же факты, что и для полиматроидов. Тем самым получим много новых утверждений типа теоремы 2.

7. ОБЩИЕ ДИСТРИБУТИВНЫЕ РЕШЕТКИ

Многие введенные выше понятия имеют смысл не только для булевой решетки $\mathbb{B}$, но и для более общих решеток.

Вообще говоря, обращение к решеткам выглядит вполне естественно. Оно основано на двух замечаниях.

1. Множество D всех (не обязательно элементарных) И-товаров обладает структурой порядка. Один И-товар больше другого, если он позволяет удовлетворить все потребности, которые удовлетворяет другой. Например, более продвинутая версия компьютерной программы.

2. И-товары можно объединять. И тогда составной (суммарный) товар мажорирует сомножители. Интеллектуальность И-товаров проявляется в том, что такой составной товар — это точная верхняя грань своих слагаемых. В частности, “сложение” обладает свойством идемпотентности: два экземпляра одного и того же товара дают не больше полезности, чем один. Кроме того, производство двух (или более) экземпляров одного и того же товара одним и тем же производителем требует столько же ресурсов, что и производство одного.

Тем самым приходим к тому, что множество И-товаров — это решетка (примем для простоты, что она конечна).

Понятие цены естественно переносится на общие решетки как модулярная функция. Это позволяет безо всяких изменений определить понятие конкурентного равновесия.

Здесь, однако, нужно сделать важное замечание. Оно состоит в том, что надо ограничиться только дистрибутивными решетками. Дело в том, что на недистрибутивных решетках может оказаться “мало” модулярных функций, мало в том смысле, что они не разделяют некоторые товары. Иначе говоря, некоторые товары всегда будут иметь одинаковую цену. В то же время предпочтения и/или функции издержек могут различать эти наборы. В результате нельзя с помощью цен регулировать спрос и предложение между этими двумя “похожими” товарами и равновесие может не существовать.

Есть два близких способа выйти из этой ситуации. Первый — рассматривать дистрибутивные решетки: можно показать (см. (Danilov, Koshevoy, Sotskov, 1997)), что для них цены разделяют элементы. Второй — допускать в качестве предпочтений и функций издержек только такие, которые принимают одинаковые значения на элементах, неразличимых с помощью цен. Останемся на первом способе и будем предполагать дистрибутивность решетки D .

Важнейший пример дистрибутивной решетки (отличной от булевой) — это цепь. То есть линейно упорядоченное множество типа $1 < 2 < \dots < n$. Цена тут — произвольное монотонное отображение, т.е. последовательность $p(1) \leq p(2) \leq \dots \leq p(n)$. Рассуждая как в простейшей ситуации с одним товаром (см. разд. 3), получаем, что равновесие существует.

В случае общей дистрибутивной решетки D рассуждение (направленное на получение теоремы существования) основано на следующем фундаментальном результате, доказанном Биркгофом. Представим, что у нас есть (конечный) посет, т.е. частично упорядоченное множество P . Его идеалом (или минорным подмножеством) назовем любое подмножество, такое что оно с каждым элементом содержит все меньшие. Множество всех идеалов в P обозначим $\mathcal{I}(P)$; оно естественно упорядочено по включению. Кроме того, объединение и пересечение идеалов тоже идеал. Поэтому множество $\mathcal{I}(P)$ является решеткой, причем, как легко понять, дистрибутивной. Если угодно, $\mathcal{I}(P)$ представляется как подрешетка в булевой решетке 2^P .

Теорема Биркгофа (см., например, (Gratzer, 1978)) утверждает, что так получается любая (конечная) дистрибутивная решетка. Более того, соответствующий посет строится явно и естественно, но нам нет особой нужды более подробно входить в этот вопрос. Факт тот, что работая с дистрибутивной решеткой D , можно считать, что она имеет вид $\mathcal{I}(P)$ для некоторого посета P .

Пусть теперь $X_1 < X_2 < \dots < X_k$ — возрастающая последовательность элементов D , т.е. подмножеств в P . Как и раньше, свяжем с этой последовательностью симплекс в кубе $[0,1]^n$, где $n = |P|$. Ясно, что при этом получаются симплексы стандартной триангуляции T , хотя в общем случае и не все. Довольно простой факт (см. (Danilov, Koshevoy, Sotskov, 1997)) состоит в том, что эти симплексы покрывают выпуклое подмножество $C(P)$ в кубе $[0,1]^n$. Можно даже сказать, что это выпуклое подмножество (многогранник) $C(P)$ состоит из всех монотонных отображений посета P в отрезок $[0,1]$.

После этого можно рассуждать, как в разд. 5. Супермодулярные функции на решетке D это в точности вогнутые функции, согласованные со стандартной триангуляцией $C(P)$; субмодуляр-

ные функции – выпуклые функции на $C(P)$, согласованные с той же триангуляцией. Тем самым получим новый вариант теоремы 1.

Теорема 3. *Предположим, что:*

- 1) решетка D дистрибутивна;
- 2) все индивидуальные функции полезности u_i супермодулярны;
- 3) функция агрегированных издержек $A = *_j a_j$ субмодулярна.

Тогда существует равновесие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Данилов В.И., Кошевой Г.А., Сотсков А.И.** (1993): Равновесие в экономике с интеллектуальными товарами // *Экономика и мат. методы*. Т. 29.
- Arrow K.J.** (1999): Information and the Organization of Industry. In: Arrow K.J. “*Markets, Information and Uncertainty, Essays in Economic Theory Honor*”. Cambridge: Cambridge University Press.
- Danilov V.I., Koshevoy G.A.** (2004): Discrete Convexity and Unimodularity // *Advances in Mathematics*. Vol. 189.
- Danilov V.I., Koshevoy G.A., Sotskov A.I.** (1994): Equilibrium in a Market of Intellectual Goods // *Mathematical Social Sciences*. Vol. 27.
- Danilov V.I., Koshevoy G.A., Sotskov A.I.** (1997): Equilibrium Analysis of Economies with Novelties // *J. of Mathematical Economics*. Vol. 27.
- Danilov V.I., Koshevoy G.A., Sotskov A.I.** (1999a): Equilibrium in an Economy with Information Goods. In: Arrow K.J. “*Markets, Information and Uncertainty, Essays in Economic Theory in Honor*”. Cambridge: Cambridge University Press.
- Danilov V.I., Koshevoy G.A., Sotskov A.I.** (1999b): A Model of Economic Equilibrium in the Market for Information Goods. In: “*Contemporary Economic Issues*” (ed. M. Sertel). N.Y.: Macmillan Press and St. Martin’s Press.
- Danilov V.I., Koshevoy G.A., Lang C.** (2003): Gross Substitution, Discrete Convexity and Submodularity // *Discrete Applied Math*. Vol. 131. № 2.
- Gratzer G.** (1978): General Lattice Theory. Berlin, N.Y.: Springer-Verlag.
- Lovasz L.** (1983): Submodular Functions and Convexity. In: “*Mathematical Programming: The State of the Art*” Bachem A., Gretschel M., Korte B. (eds.). Berlin, N.Y.: Springer-Verlag.
- Makarov V.L.** (1991): About Economies of Intellectual Goods and Its Modeling. Report at Sixth Congress of the European Economic Association. Cambridge.
- Murota K.** (2003): Discrete Convex Analysis. Tokio: University of Tokio.