
НАУЧНАЯ СЕССИЯ: ИННОВАЦИОННАЯ ЭКОНОМИКА:
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
В МАРКОВСКИХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА
С ДИСКРЕТНЫМИ ИННОВАЦИЯМИ***

© 2009 г. А. Д. Слестников
(Москва)

ВВЕДЕНИЕ

Одно из основных направлений исследования моделей экономического роста связано с качественным анализом траекторий, т.е. изучением таких свойств, которые не зависят от конкретной траектории, а определяются структурой модели. Теоретической основой такого анализа служат хорошо известные в экономической динамике (см., например, (Макаров, Рубинов, 1973)) магистральные теоремы, описывающие асимптотические (при больших временных горизонтах) свойства оптимальных траекторий. При этом магистраль представляет собой специальную траекторию, получаемую как решение некоторой стационарной задачи.

Одним из недостатков классических моделей экономического роста (называемых часто моделями Неймана–Гейла) является то обстоятельство, что наиболее содержательные результаты получены, как правило, для моделей со стационарной во времени структурой (технологией). Такое предположение постоянства мало соответствует реалиям современного экономического развития, характерной чертой которого стал “переход к непрерывному инновационному процессу в практике управления” (Глазьев, 2007).

С середины 1980-х годов появились и стали развиваться новые типы моделей экономического роста с эндогенным технологическим прогрессом, например, (Romer, 1986, 1990; Aghion, Howitt, 1998; Макаров, 2009). Отметим также работы (Зеликина, 1976, 1986), в которых технологические возможности системы, выраженные в терминах производственных функций, являются управляемыми и зависят от инвестиций в “сектор науки”.

Инновации, приводящие к технологическим изменениям, разнообразны по своей природе, характеру и воздействию на систему. Условно можно выделить два основных типа инноваций: дискретные и непрерывные. Непрерывные инновации направлены на “эволюционные” улучшения (усовершенствования) в рамках сложившейся технологии, а их результат носит, как правило, детерминированный характер. Дискретные (или фундаментальные) инновации могут приводить к существенному изменению технологии (технологическому сдвигу), появлению новых типов товаров, услуг, процессов и т.п. Такого рода инновации имеют, по существу, случайный, неопределенный характер. В частности, моменты реализации дискретных инноваций можно рассматривать как вероятностный процесс и делать различные предположения относительно его распределения. Различным аспектам взаимодействия дискретных и непрерывных инноваций посвящены, например, (Redding, 2002; Ghosh, Kato, Morita, 2007).

Достаточно общая схема описания моделей экономической динамики с эндогенными дискретными инновациями была предложена еще в (Аркин, Пресман, Сонин, 1976). В качестве основных черт этой схемы можно назвать выделение в качестве подсистемы “инновационного сектора”, функционирующего за счет отвлечения части ресурсов из сферы материального производства, и предположение о том, что моменты возникновения новых технологий (в результате реализации инноваций) являются случайными величинами, зависящими от состояния “инновационного сектора”. Для различных вариантов этой схемы в (Аркин, 1986; Arkin, 1989) исследовались вопросы существования стимулирующих цен.

В настоящей работе изучается модель подобного типа с конечным числом дискретных инноваций. Ее характерными чертами также будут: наличие в системе “инновационного сектора” и случайный момент реализации инноваций, зависящий от состояния инновационных ресурсов. Нас будет интересовать вопрос: возможно ли для этой (нестационарной) модели построить стационарную задачу, которую можно бы использовать для качественного анализа как траекторий,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 07-02-00166).

так и стратегии инвестирования инновационного сектора? Какими новыми свойствами (по сравнению с классическими моделями роста) этот стационарный режим будет обладать? Предварительные результаты в этом направлении имеются в (Сластников, 1989). Для аналогичной модели с неуправляемым переходом к новой технологии подобный “стационарный подход” рассматривался в (Беленький, 1988). Там было установлено существование “переходной магистрали”, но вопрос о “притягивании” ею траекторий остался открытым.

В разд. 1 приводится описание общей модели экономического роста с конечным числом дискретных инноваций, реализация которых носит вероятностный характер. Для этой модели сформулирована система стационарных задач, решение которой определяет асимптотику оптимальных переходных процессов (т.е. начальных участков траекторий и соответствующих инвестиций в разработку новой технологии вплоть до момента изменения технологии) и даны строгие формулировки асимптотических свойств оптимальных переходных процессов. Доказательства всех результатов вынесены в Приложение. В разд. 2 на примере однопродуктовой линейной модели продемонстрировано, какие новые свойства возникают у стационарных переходных процессов. В частности, показано существование “области риска”, попадание в которую может привести систему с положительной вероятностью к “полному разорению”.

1. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ С ДИСКРЕТНЫМИ ИННОВАЦИЯМИ

1.1. Описание модели. Рассматривается общая модель экономической динамики, состоянием которой является вектор $x \in R_+^n$, характеризующий запас ресурсов (продуктов) в начале планового периода времени. Переход от одного состояния к другому определяется многозначным отображением $a : R_+^n \rightarrow 2^{R_+^n}$ (технологией), при этом множество $a(x)$ описывает технологические (производственные) возможности за плановый период, т.е. множество всех выпусков, которые можно получить в конце этого периода из вектора ресурсов x .

В модели считается заданным конечное множество технологий $a_0, \dots, a_m$, действующих в соответствующих пространствах ресурсов $a_i : X_i \rightarrow 2^{X_i}$, где $X_i = R_+^{n_i}$, $i = 0, \dots, m$. Будем полагать, что первоначально система обладает технологией a_0 и, начиная с некоторого момента времени (который можно принять за начало отсчета), имеются потенциальные возможности перехода к другим (инновационным) технологиям. А именно, развиваясь в соответствии с технологией a_i , система может перейти к a_{i+1} ($i = 0, \dots, m-1$). Наконец, при появлении технологии a_m система продолжает развиваться дальше в соответствии с ней.

Можно представлять себе, что переход от начальной (традиционной) технологии a_0 к более совершенной (в каком-то смысле) технологии a_m возможен через ряд дискретных инноваций, приводящих к цепочке промежуточных технологий: $a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_m$.

Как это принято в современных моделях эндогенного роста, выделяем в системе инновационный сектор, в котором осуществляются собственно разработка инновации и производство промежуточной продукции, необходимой для ее реализации и появления новой технологии. Состояние этого сектора будем характеризовать совокупностью инновационных ресурсов (ИР), под которыми можно понимать как накопленное знание, так и совокупность промежуточных результатов научно-исследовательской деятельности (информация, опытные установки, приборы, внедренческие работы), необходимых для возникновения новой технологии. Будем обозначать через Z_i , $i = 0, \dots, m-1$, пространство инновационных ресурсов (ИР) для разработки новой технологии при текущей технологии a_i (пространства Z_i можно считать конечномерными или даже полными сепарабельными метрическими пространствами). После появления последней из технологий, т.е. a_m , ИР перестают существовать, поскольку другие технологии больше не рассматриваются.

Таким образом, состояние системы, развивающейся согласно технологии a_i , $i = 0, \dots, m-1$, описывается парой $(x, z) \in Y_i = X_i \times Z_i$, где $x \in X_i$ — состояние производства, $z \in Z_i$ — состояние ИР. Для каждого состояния системы $(x, z) \in Y_i$ считается заданным множество допустимых

управлений (планов) $D_i(x, z) \subset Y_i \times Y_{i+1}$, $i = 0, \dots, m-2$, и $D_{m-1}(x, z) \subset Y_{m-1} \times X_m$. При этом выбор в некоторый момент времени при технологии a_i управления $d = (y, w, y', w') \in D_i(x, z)$ означает, что к началу следующего момента времени с вероятностью q_i система остается в рамках текущей технологии a_i и состояние (x, z) переходит в состояние $(y, w) \in Y_i$, а с дополнительной вероятностью $1 - q_i$ происходит появление новой технологии a_{i+1} и состояние (x, z) преобразуется в состояние $(y', w') \in Y_{i+1}$, $i = 0, \dots, m-2$, или $y' \in X_m$ при $i = m-1$. Вероятность перехода к новой технологии считается заданной и зависящей от состояния системы и выбранного управления, т.е. $q_i = q_i(x, z, d)$, $d \in D_i(x, z)$.

В эту схему укладывается также и модель с одним изменением технологии, для осуществления которого необходимо пройти через конечную последовательность отдельных этапов (промежуточных инноваций), оставаясь в рамках старой технологии. При этом можно считать, что $a_i = a_0$ при $i \leq m-1$, а динамика перехода от этапа i к этапу $i+1$ описывается управлениями из множества D_i и вероятностями q_i , $i = 0, \dots, m-1$.

Перед тем как сформулировать основные условия, налагаемые на модель, приведем несколько простых примеров составляющих модель элементов, которые имеют довольно наглядную интерпретацию.

Пример 1. Будем считать, что $Z = R^k$, т.е. состояние инновационного сектора описывается некоторым вектором (основные ИР). Если в качестве управляющего параметра взять ресурсы c , изъятые из текущих производственных запасов x (так, что $0 \leq c \leq x$)¹, то приращение ИР можно характеризовать вектор-функцией эффективности вложений $g(c)$. При этом ИР z преобразуются за один период времени в $w = z + g(c)$ (схема простого накопления).

Пример 2. Пусть появление новой технологии происходит, когда все параметры из конечного набора $z_1, \dots, z_k$ превзойдут некоторые уровни $\xi_1, \dots, \xi_k$, соответственно. Считается, что эти уровни носят случайный характер и задано их совместное распределение. Тогда вероятность перехода к новой технологии есть вероятность превышения ИР $z = (z_1, \dots, z_k)$ уровня $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ в конце единичного периода при условии, что раньше этого не было и равна $1 - q(x, z, d) = (\pi(\text{pr}_2 d) - \pi(z)) / (1 - \pi(z))$, где $\pi(\cdot)$ — функция распределения случайного вектора ξ , а $\text{pr}_2 d = w$ для $d = (y, w, y', w')$.

1.2. Траектории. Уточним понятие траектории для этой модели.

В дальнейшем для $d = (y, w, y', w')$ будем обозначать $\text{pr}_1 d = y$, $\text{pr}_2 d = w$, $\text{pr}_3 d = y'$, $\text{pr}_{1,2} d = (y, w)$, $\text{pr}_{3,4} d = (y', w')$ и т.д.

Последовательность $((x_t, z_t, d_{t+1}), t \geq 0)$, где $d_{t+1} \in D_i(x_t, z_t)$ будем называть D_i -траекторией, $i = 0, \dots, m-1$, если $\text{pr}_{1,2} d_{t+1} = (x_{t+1}, z_{t+1})$. Последовательность $(x_t; t \geq 0)$ векторов из X_m будем называть a_m -траекторией (или траекторией модели a_m), если $x_{t+1} \in a_m(x_t)$, $t \geq 0$.

Траектории модели будут состоять из конечного числа D_i -траекторий (в промежутках между скачками технологии), согласованных между собой в моменты скачков.

Для более точного определения необходимо предварительно задать план, т.е. совокупность $\mathfrak{M} = \{(\mathfrak{X}_t^i, t \geq 0), i = 0, \dots, m-1; \tau_1, \dots, \tau_m\}$, где:

1) последовательности $\mathfrak{X}_t^i = \mathfrak{X}_t^i(x, z) = (x_t^i, z_t^i, d_{t+1}^i)(x, z)$ ($t \geq 0$, $i = 0, \dots, m-1$) являются семействами D_i -траекторий, зависящими от начальной точки $(x_0^i, z_0^i) = (x, z)$; $\mathfrak{X}_t^m = \mathfrak{X}_t^m(x, z) = x_t^m(x)$ ($t \geq 0$) — семейство a_m -траекторий с начальной точкой $x_0^m = x$;

¹ Неравенства между векторами понимаются по координатам.

2) $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$ — случайные величины (моменты появления новых технологий), совместное распределение которых определяется с помощью условных вероятностей

$$\mathbf{P}\{\tau_{i+1} = k + 1 \mid \tau_i = l\} = (1 - q_l(\mathcal{X}_{k-l}^i)) \prod_{t=l}^{k-1} q_t(\mathcal{X}_{t-l}^i) \quad k \geq l, \quad l \geq i, \quad (1)$$

и начального распределения момента τ_1

$$\mathbf{P}\{\tau_1 = k + 1\} = (1 - q_0(\mathcal{X}_k^0)) \prod_{t=0}^{k-1} q_t(\mathcal{X}_t^0) \quad k \geq 0.$$

Наконец, траекторией будем называть такую последовательность $\{(x_t, z_t, d_{t+1}), t \geq 0\}$, что для некоторого плана $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} (x_t, z_t, d_{t+1}) &= \mathcal{X}_{t-\tau_i}^i(x_{\tau_i}, z_{\tau_i}), \quad \text{где } \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1; \\ (x_t, z_t, d_{t+1}) &= \mathcal{X}_{t-\tau_m}^m(x_{\tau_m}, z_{\tau_m}), \quad \text{где } t \geq \tau_m; \end{aligned}$$

и в моменты скачков выполнены следующие условия согласования

$$(x_{\tau_i}, z_{\tau_i}) = \text{pr}_{3,4} d_{\tau_i}^{i-1}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad x_{\tau_m} = \text{pr}_3 d_{\tau_m}^{m-1}.$$

D_i -траектории, входящие в определение плана (или траектории), будем называть *переходными процессами* модели. Они характеризуют динамику товаров производственного сектора и эволюцию инновационных ресурсов в промежутках между возникновением новых технологий a_i и a_{i+1} , $i = 0, \dots, m-1$.

1.3. Основные предположения. К технологиям a_i , $i = 0, \dots, m$, определяющим эволюцию “производственного сектора”, будут предъявляться традиционные для моделей роста (типа Неймана–Гейла) условия. Поэтому предварительно напомним основные определения и понятия, связанные с моделями Неймана–Гейла (подробнее см. в (Макаров, Рубинов, 1973)).

Моделью Неймана–Гейла называется точечно-множественное отображение $a: R_+^n \rightarrow 2^{R_+^n}$, обладающее следующими свойствами:

- 1) $a(\lambda x) = \lambda a(x)$, $\forall \lambda > 0, x \in R_+^n$;
- 2) $a(x_1 + x_2) \supset a(x_1) + a(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in R_+^n$;
- 3) $a(x)$ — полунепрерывное сверху отображение;
- 4) $a(0) = \{0\}$;
- 5) $a(R_+^n) \cap \text{int } R_+^n \neq \emptyset$.

Другими словами, график отображения a , т.е. множество $K = \{(x, y) : x \in R_+^n, y \in a(x)\}$ является выпуклым замкнутым конусом в R_+^n . В дальнейшем будут рассматриваться только нормальные модели Неймана–Гейла, обладающие тем свойством, что из $y \in a(x)$ и $0 \leq y' \leq y$ следует $y' \in a(x)$.

Неймановским темпом роста модели называется число $\lambda^* = \sup\{\lambda(x, y) : (x, y) \in K, x \neq 0\}$, где $\lambda(x, y) = \sup\{\alpha \geq 0 : \alpha x \leq y\}$. Известно, что в модели Неймана–Гейла существует (неймановское) состояние $x^* \neq 0$ и ненулевой вектор (неймановских) цен $p^* \in R_+^n$, такие что $\lambda^* x^* \in a(x^*)$ и $p^* y \leq \lambda^* p^* x$ для всех $(x, y) \in K$. Если при этом $p^* x^* > 0$, то тройка (λ^*, x^*, p^*) является состоянием равновесия (неймановским равновесием).

Неймановское состояние равновесия (λ^*, x^*, p^*) называется *строгим*, если из равенства $p^* y = \lambda^* p^* x$, где $(x, y) \in K$, следует, что $x = \mu x^*$, $y = \mu \lambda^* x^*$ при некотором $\mu > 0$. При этом равновесные цены p^* будут строго положительны. Достаточным условием для строгого состояния

равновесия может быть, например, почти строгая выпуклость конуса K . Модель Неймана–Гейла будем называть *регулярной*, если ее неймановское состояние равновесия (λ^*, x^*, p^*) является строгим, причем $x^* > 0$.

Перейдем к строгой формулировке условий на рассматриваемую модель.

Условие A1. Технологии a_i есть модели Неймана–Гейла со строго положительными неймановскими векторами цен p_i ($i = 0, \dots, m-1$), технология a_m – регулярная модель Неймана–Гейла.

Условие A2. Отображения $D_i(x, z)$ непрерывны² и компактнозначны, функции $q_i(x, z, d)$ непрерывны, $i = 0, \dots, m-1$.

Условие A3. $\text{pr}_1 D_i(x, z) \subset a_i(x)$ для любых $(x, z) \in Y_i$, $i = 0, \dots, m-1$.

Условие A4. Существует постоянная C такая, что для всех $(x, z) \in Y_i$, $d \in D_i(x, z)$, $i = 0, \dots, m-1$, справедливо неравенство $|\text{pr}_3 d| \leq C |x|$ ³.

Условие A3 можно интерпретировать как технологическую осуществимость (в рамках текущей технологии) выбранного управления. Условие A4 можно понимать как условие согласования соседних технологий в том смысле, что “входные” ресурсы новой технологии имеют такой же порядок, как и “выходные” ресурсы старой технологии. В частности, из него вытекает, что из нулевых ресурсов старой технологии можно получить только нулевые ресурсы для новой технологии.

1.4. Система стационарных задач. Пусть $W(X)$ будет обозначать пространство линейно однородных, монотонных, непрерывных функций, заданных на X . Для конечного горизонта планирования $T > 1$ и траектории $\mathfrak{X} = ((x_t, z_t, d_{t+1}), t \geq 0)$ определим функционал

$$F(\mathfrak{X}; T) = \begin{cases} \Phi_0(x_T^0), & \text{если } \tau_1 > T; \\ \Phi_i(x_T^i), & \text{если } \tau_i \leq T < \tau_{i+1}; \\ \Phi_m(x_T^m), & \text{если } \tau_m \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

где $\Phi_i \in W(X_i)$, $i = 0, \dots, m$. Он представляет собой функционал на состоянии траектории в конце интервала планирования T . Рассмотрим задачу

$$\mathbf{E} F(\mathfrak{X}; T) \rightarrow \max, \quad (3)$$

где $\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание по распределению случайных величин $\tau_1, \dots, \tau_m$, максимум берется по всем траекториям $\mathfrak{X}$ с фиксированным начальным состоянием (x_0, z_0) .

Нас будет интересовать асимптотическое поведение переходных процессов при больших горизонтах планирования T . Ниже будет выписана конечная система стационарных задач, на основе решения которой можно проводить анализ переходных процессов в исходной (нестационарной) задаче (3), в частности, определять их асимптотику.

Обозначим через $V_k^i(x, z)$, $k \geq 1$, $i = 0, \dots, m-1$, максимальное значение функционала в (3) с горизонтом $T = k$ по всем траекториям модели, начинающимся при текущей технологии a_i из точки $(x_0^i, z_0^i) = (x, z)$. Пусть также $V_k^m(y_0)$ есть максимальное значение функционала $\Phi_m(y_k)$ по всем a_m -траекториям $\{y_t, t \geq 0\}$, исходящим из точки y_0 .

² То есть одновременно полунепрерывны сверху и снизу (см., например, (Макаров, Рубинов, 1973)).

³ Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n)_+$ обозначаем $|x| = x_1 + \dots + x_n$.

С помощью стандартных рассуждений нетрудно показать, что функции $V_T^i(x, z)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям (уравнениям Беллмана)

$$\begin{aligned} V_1^i(x, z) &= \max_{d \in D_i(x, z)} [q_i \Phi(\text{pr}_1 d) + (1 - q_i) \Phi(\text{pr}_3 d)], \\ V_T^i(x, z) &= \max_{d \in D_i(x, z)} [q_i V_{T-1}^i(\text{pr}_{1,2} d) + (1 - q_i) V_{T-1}^{i+1}(\text{pr}_{3,4} d)], \quad i = 0, \dots, m-2, \\ V_T^{m-1}(x, z) &= \max_{d \in D_{m-1}(x, z)} [q_{m-1} V_{T-1}^{m-1}(\text{pr}_{1,2} d) + (1 - q_{m-1}) V_{T-1}^m(\text{pr}_3 d)], \quad T \geq 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Хорошо известно (Беленький, 1981), что

$$\left\| \lambda_m^{-n} V_n^m - \gamma G_m \right\|_m := \max_{x \neq 0} \left[\left| \lambda_m^{-n} V_n^m(x) - \gamma G_m(x) \right| / p_m x \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где (λ_m, x_m, p_m) — неймановское равновесие модели a_m , $\gamma = \lim_n \lambda_m^{-n} V_n^m(x_m)$ (этот предел всегда существует, поскольку последовательность не убывает), а G_m — неотрицательная линейно однородная, вогнутая, непрерывная функция, удовлетворяющая при всех $x \in X_m$ соотношению

$$\lambda_m G_m(x) = \max_{y \in a_m(x)} G_m(y)$$

и дополнительному условию нормировки $G_m(x_m) = 1$ (такая функция всегда существует и единственна для регулярных моделей Неймана–Гейла (Рубинов, 1980; Беленький, 1981)).

Если теперь предположить, что функции $\lambda_i^{-T} V_T^i(x, z)$ сходятся (в каком-то смысле) к некоторым предельным функциям $W_i(x, z)$, $i = 0, \dots, m-1$, то функции $V_i(x, z) = W_i(x, z) / \gamma$ должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda_m V_i(x, z) = \max_{d \in D_i(x, z)} [q_i V_i(\text{pr}_{1,2} d) + (1 - q_i) V_{i+1}(\text{pr}_{3,4} d)] & (i = 0, \dots, m-2), \\ \lambda_m V_{m-1}(x, z) = \max_{d \in D_{m-1}(x, z)} [q_{m-1} V_{m-1}(\text{pr}_{1,2} d) + (1 - q_{m-1}) G_m(\text{pr}_3 d)]. \end{cases} \quad (6)$$

Эта система уравнений не зависит от функционала $F(\cdot)$, а определяется только структурными свойствами нашей модели. Нетрудно проверить, что функции $V_i(x, z)$, $i = 0, \dots, m-1$, удовлетворяющие системе уравнений (6), будут и решением следующей системы стационарных задач максимизации:

$$\begin{cases} V_i(x, z) = \max_{\mathfrak{X}_i(x, z)} \mathbf{E} \lambda_m^{-\theta_{i+1}} V_{i+1}(\text{pr}_{3,4} d_{\theta_{i+1}}^i), & i = 0, \dots, m-2, \\ V_{m-1}(x, z) = \max_{\mathfrak{X}_{m-1}(x, z)} \mathbf{E} \lambda_m^{-\theta_m} G_m(\text{pr}_3 d_{\theta_m}^{m-1}), \end{cases} \quad (7)$$

где максимумы берутся по всем D_i -траекториям $\mathfrak{X}_i(x, z) = ((x_t^i, z_t^i, d_{t+1}^i), t \geq 0)$ с $(x_0^i, z_0^i) = (x, z)$, а распределения случайных величин θ_{i+1} задаются формулами

$$\mathbf{P}\{\theta_{i+1} = k+1\} = (1 - q_i(x_k^i, z_k^i, d_{k+1}^i)) \prod_{t=0}^{k-1} q_i(x_t^i, z_t^i, d_{t+1}^i) \quad k \geq 1, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Пусть λ_i обозначает неймановский темп роста, а p_i — неймановские цены технологии a_i (в силу условия A1 они будут строго положительными).

Для исследования вопроса о существовании функций V_i , $i = 0, \dots, m-1$, удовлетворяющих системе уравнений (6), введем пространства функций $\mathcal{F}_i = \{f : Y_i \rightarrow R_+^1, f \text{ — непрерывна, } f(0, z) = 0, \sup_{x \neq 0, z} [f(x, z) / |x|] < \infty\}$ с нормами, $\|f\|_i = \sup_{x \neq 0, z} [f(x, z) / p_i x]$, $i = 0, \dots, m-1$.

Теорема 1. Если $\lambda_i < \lambda_m$ для всех $i = 0, \dots, m-1$, то существуют единственные функции $V_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 0, \dots, m-1$, являющиеся решением системы уравнений (6) (или максимизационных задач (7)).

Отметим, что только последняя из потенциально возможных технологий (a_m) предполагается здесь более совершенной (в смысле темпа роста), чем остальные. Тем самым допускается, что

промежуточные инновации могут и не приносить системе увеличение темпа роста производства. Доказательства этой и следующих теорем приводятся в Приложении.

1.5. Асимптотические свойства переходных процессов. Сформулируем свойства асимптотического поведения оптимальных переходных процессов (D_i -траекторий) в задаче (3). Именно они и представляют наибольший интерес, поскольку после последнего скачка траектория модели будет оптимальной в модели a_m .

Для $(x, z) \in Y_i$ обозначим через $D_i^*(x, z)$ множество точек d , на которых достигается максимум в уравнении с номером i в системе (6), а $d_i^T(x, z)$ – оптимальное управление, выбираемое на первом шагу (т.е. до момента скачка) в задаче (3), находясь в текущей технологии a_i и состоянии (x, z) . Нетрудно увидеть, что в точке $d_i^T(x, z)$ достигается максимум правой части уравнения оптимальности с номером i в системе (4). Из тех же уравнений следует, что с помощью функций $d_i^k(x, z)$, $k = T, T-1, \dots, 1$, можно рекуррентным образом определить оптимальный переходный процесс i во все моменты времени вплоть до момента скачка технологии.

Таким образом, набор функций $d_i^T(x, z)$, $i = 0, \dots, m-1$, (оптимальный синтез) полностью определяют поведение оптимальных переходных процессов. Их асимптотическое поведение описывается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть $\lambda_i < \lambda_m$ для всех $i = 0, \dots, m-1$, тогда:

$$1) \|\lambda_m^{-T} V_T^i - \gamma V_i\|_i \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty, i = 0, \dots, m-1, \text{ где } \gamma \text{ определена в (5);}$$

$$2) \forall (x, z) \in Y_i \rho_i(d_i^T(x, z), D_i^*(x, z)) \rightarrow 0^4 \text{ при } T \rightarrow \infty, i = 0, \dots, m-1;$$

3) если множества управлений $D_i^*(x, z)$ состоят из одной точки $d_i^*(x, z)$ (при всех $(x, z) \in Y_i$), то $\sup_{(x, z) \in K} \rho_i(d_i^T(x, z), d_i^*(x, z)) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ для любого компакта $K \subset Y_i$.

Отсюда можно вывести следствие о сходимости оптимальных переходных процессов в любой момент времени.

Пусть множества управлений $D_i^*(x, z)$ при всех $(x, z) \in Y_i$ состоят из одной точки $d_i^*(x, z)$. Для любого начального состояния $(x, z) \in Y_i$, $i = 0, \dots, m-1$, определим переходный процесс $\mathfrak{X}_i^* = \{(\tilde{x}_t^i, \tilde{z}_t^i, \tilde{d}_{t+1}^i), t \geq 0\}$ следующим образом: $(\tilde{x}_0^i, \tilde{z}_0^i) = (x, z)$, $\tilde{d}_{t+1}^i = d_i^*(\tilde{x}_t^i, \tilde{z}_t^i)$, $(\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{z}_{t+1}^i) = \text{pr}_{1,2} \tilde{d}_{t+1}^i$, $t \geq 0$. Пусть также $\mathfrak{X}_i^T = \{(x_t^i(T), z_t^i(T), d_{t+1}^i(T)), t \geq 0\}$ – оптимальный переходный процесс (т.е. D_i -траектория, входящая в определение траектории, оптимальной в задаче (3)), исходящий из начальной точки (x, z) .

Теорема 3. Если множества управлений $D_i^*(x, z)$ при всех $(x, z) \in Y_i$ состоят из одной точки $d_i^*(x, z)$, то для любого $t \geq 1$

$$(x_t^i(T), z_t^i(T), d_{t+1}^i(T)) \rightarrow (\tilde{x}_t^i, \tilde{z}_t^i, \tilde{d}_{t+1}^i) \quad T \rightarrow \infty,$$

причем эта сходимость равномерна по (x, z) из произвольного компакта в пространстве Y_i , $i = 0, \dots, m-1$.

Теорема 3 открывает возможность качественного анализа переходных процессов в моделях экономического роста с эндогенными инновациями. Стационарные переходные процессы $\mathfrak{X}_i^*$, определяющие асимптотическое поведение оптимальных переходных процессов при больших горизонтах планирования, находятся из решения системы стационарных задач (7) и могут быть построены последовательно с помощью системы стационарных уравнений (6). Поскольку эти переходные процессы не зависят от конкретного вида критерия оптимальности $F(\mathfrak{X}; T)$ в задаче (3), то они будут асимптотически инвариантны относительно конкретного целевого функционала и горизонта планирования (аналогично известному свойству магистральности в классических моделях роста). Отмеченные свойства процессов $\mathfrak{X}_i^*$ дают основание рассматривать их как ана-

⁴ Здесь $\rho_i(d, D)$ обозначает расстояние (в пространстве $Y_i \times Y_{i+1}$) между точкой d и множеством D .

лог магистралей в моделях экономического роста с эндогенными дискретными инновациями. В следующем разделе на примере однопродуктовой модели покажем, какие новые (по сравнению с классическими) эффекты возникают для стационарных оптимальных переходных процессов.

2. АНАЛИЗ СТРАТЕГИИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РОСТА С ЭНДОГЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ИННОВАЦИЕЙ

В этом разделе будет рассмотрен простейший вариант модели роста — однопродуктовая линейная модель⁵. Состояние ее описывается неотрицательным числом x , а эволюция происходит в соответствии с темпом роста λ , т.е. x переходит в следующий момент времени в λx . Величину x можно интерпретировать как стоимостное выражение состояния многопродуктовой экономической системы, а предположение о линейном развитии можно обосновать, опираясь, например, на магистральное свойство, согласно которому оптимальные траектории моделей при больших горизонтах планирования близки к некоторому лучу (т.е. растут “почти” пропорционально с неймановским темпом). Считаются заданными две технологии: традиционная с темпом $\lambda_0 \geq 1$ и новая (инновационная) с темпом $\lambda_1 > \lambda_0$ (иногда будем называть их технологиями a_0 и a_1). Первоначально система находится в технологии a_0 , а в некоторый момент времени (принимая за начало отсчета $t = 0$) становится известной возможность перехода к технологии a_1 , реализация которой требует определенных затрат (инвестиций) в инновационный сектор, где происходит разработка и создание необходимых средств для перехода к новой технологии.

Динамика инновационного сектора описывается следующим образом: ее текущее состояние (уровень инновационных ресурсов) $z \in R^1$ и текущие инвестиции $c \in R_+^1$ преобразуются за единичный период времени в новое состояние $z + g(c)$, где $g(\cdot)$ — некоторая заданная функция, характеризующая приращение уровня инновационных ресурсов от инвестиций. Будем считать, что переход к новой технологии a_1 происходит, когда уровень ИР превзойдет некоторое пороговое значение ξ . Точное значение ξ заранее не известно, и оно считается случайной величиной с известной функцией распределения $\pi(z) = P(\xi < x)$. В этом случае момент появления новой технологии совпадает с первым моментом, когда объем ИР превысит случайный уровень ξ .

Таким образом, эволюцию всей системы (с момента времени $t = 0$) можно описать следующим образом. Состояние системы задается парой $(x, z) \in R_+^1 \times R^1$, где x характеризует состояние производственного сектора, а z — уровень инновационных ресурсов. Управляющим параметром в этом состоянии являются c , $0 \leq c \leq x$, — инвестиции в инновационный сектор. Тогда к следующему моменту времени состояние производственного сектора преобразуется в $x' = \lambda_0(x - c)$, а состояние ИР — в $z' = z + g(c)$. При этом к началу следующего момента времени система с вероятностью $(1 - \pi(z + g(c))) / (1 - \pi(z))$ остается в технологии a_0 и процесс функционирования повторяется заново, исходя из нового состояния (x', z') , а с дополнительной вероятностью $(\pi(z + g(c)) - \pi(z)) / (1 - \pi(z))$ появляется технология a_1 и система продолжает развиваться с темпом роста λ_1 , исходя из состояния x' (после появления новой технологии инновационный сектор для ее разработки уже перестает существовать, поскольку здесь рассматривается лишь случай одного изменения технологии).

2.1. Основные предположения. Стационарная задача. Базовое уравнение. Сделаем теперь предположения относительно функций π и g . Будем предполагать, что уровень ξ , определяющий момент появления новой технологии, равномерно распределен на некотором интервале $[a, b]$. Такое допущение соответствует ситуации, когда известны границы, в которых должен лежать уровень научных фондов, требуемых для появления новой технологии, и нет оснований выделять какие-то значения внутри этих границ как более вероятные. С помощью линейного преоб-

⁵ Результаты этого раздела получены автором совместно с В.З. Беленьким и частично изложены в (Беленький, Сластников, 1997).

разования (выбора начала отсчета и единицы масштаба) произвольное равномерное распределение можно свести к стандартному на отрезке $[0,1]$, функция распределения которого имеет вид

$$\pi(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z, & 0 \leq z \leq 1 \\ 1, & z > 1. \end{cases}$$

В качестве функций приращения уровня ИР от инвестиций будем рассматривать семейство вогнутых степенных функций $g(c) = c^\gamma$, $0 < \gamma \leq 1$ (случай линейной функции $g(c) = c$ был подробно исследован в (Беленький, Сластников, 1997)).

Как было показано в разд. 1, с описанной выше моделью можно связать некоторую стационарную задачу, функция Беллмана которой является решением следующего функционального уравнения

$$\lambda_1 V(x, z) = \max_{0 \leq c \leq x} [qV(\lambda_0(x-c), z+c^\gamma) + (1-q)(x-c)], \quad x \geq 0, \quad z < 1, \quad (8)$$

где $q = (1 - \pi(z + c^\gamma)) / (1 - \pi(z))$.

Согласно теореме 2, это уравнение полностью определяет асимптотическое поведение решений задачи максимизации среднего значения состояния системы в конце заданного интервала планирования: $\mathbb{E}x_T \rightarrow \max$ при больших горизонтах планирования T . В частности, оптимальные инвестиции в инновационные ресурсы как функция от текущего состояния системы (x, z) близки к инвестициям $c^* = c^*(x, z)$, на которых достигается максимум в правой части уравнения (8).

Как следует из теоремы 1, уравнение (8) имеет единственное решение V в классе неотрицательных функций $\Phi(x, z)$, ограниченных по z и растущих по x не быстрее линейных, т.е.

$$\sup_{x>0, |z|<\infty} [\Phi(x, z) / x] < \infty.$$

Для решения и анализа функционального уравнения (8) была предложена достаточно эффективная процедура, связанная с редукцией к задаче меньшей размерности и последовательного пересчета, что помогло избавиться от малоэффективных “лобовых” итеративных процессов для функций нескольких переменных. Проведенные расчеты позволяют дополнить аналитические методы и сделать определенные заключения качественного характера относительно оптимальных стационарных инвестиций $c^*(x, z)$ в инновационный сектор (см. п. 2.3).

2.2. Анализ и процедура решения базового уравнения. Стационарная оптимальная задача (8) требует исследования только при $z < 1$, при этом содержательной является нормальная область $0 \leq z < 1$. В состояниях с субнормальным уровнем ИР ($z < 0$) требуются предварительные инвестиции для того, чтобы войти в нормальную область, после чего появляется шанс на переход к новой технологии. Анализ уравнения (8) удобно проводить отдельно в различных областях.

Нормальная область $0 \leq z < 1$. Здесь уравнения (8) можно переписать в виде

$$\lambda_1 V(x, z) = \max_{0 \leq c \leq x \wedge (1-z)^{1/\gamma}} \left[(1 - c^\gamma / (1-z)) V(\lambda_0(x-c), z+c^\gamma) + c^\gamma(x-c) / (1-z) \right]$$

(здесь и далее будем обозначать $a \wedge b = \min(a, b)$). Сделав теперь замены $x^\gamma / (1-z) = p$, $c^\gamma / (1-z) = s$ и представляя функцию V в виде $V(x, z) = (1-z)^{1/\gamma} v(p)$, нетрудно показать, что функция v должна удовлетворять следующему уравнению

$$\lambda_1 v(p) = \max_{0 \leq s \leq p \wedge 1} \left[(1-s)^{1+1/\gamma} v(\tilde{p}) + s(p^{1/\gamma} - s^{1/\gamma}) \right], \quad (9)$$

где $\tilde{p} = \lambda_0^\gamma (p^{1/\gamma} - s^{1/\gamma})^\gamma / (1-s)$, $p \geq 0$. Таким образом, в области $z \geq 0$ базовое уравнение (8) свелось к уравнению от одной переменной (9).

Предположим теперь, что в какой-то области $p \geq p_0 > 1$ максимум в правой части уравнения (9) достигается на $s = s^* = 1$. В этом случае функционал Φ имеет явный вид

$$v(p) = (p^{1/\gamma} - 1) / \lambda_1. \quad (10)$$

Подставляя это представление в уравнение (9), можно показать, что соотношение (10) будет справедливо в области $p > p_0 = \left(1 + (1 - \kappa)^{-1/\gamma}\right)^\gamma$, где $\kappa = \lambda_0 / \lambda_1$.

Заметим, что в области $p \geq 1$ правая часть уравнения (9) определяется лишь значениями функции v в точках $\tilde{p} > p$. Это приводит к следующей процедуре решения уравнения (9) в области $p \geq 0$, а тем самым и базового уравнения (8) в области $z \geq 0$.

1. При $p \geq p_0$ функция $v(p)$ имеет явное выражение (10).
2. При $1 \leq p < p_0$ функция $v(p)$ находится из уравнения (9), используя уже вычисленные ранее значения функции $v(\tilde{p})$.
3. При $0 < p < 1$ применяются обычные итеративные методы (для функции одной переменной), т.е. рассматривается предел последовательности $\{v_n(p), n \geq 1\}$, где $v_n(p)$ определяется из соотношения

$$\lambda_1 v_n(p) = \max_{0 \leq s \leq p} \left[(1-s)^{1+1/\gamma} v_{n-1}(\tilde{p}) + s(p^{1/\gamma} - s^{1/\gamma}) \right].$$

Продолжение решения в субнормальную область $z < 0$. В этой области базовое уравнение (8) записывается в виде

$$\lambda_1 V(x, z) = \max_{0 \leq c \leq x} \left[(1 - \pi(z + c^\gamma)) V(\lambda_0(x - c), z + c^\gamma) + \pi(z + c^\gamma)(x - c) \right].$$

Первоначально рассмотрим область $z + x^\gamma > 0$, в которой имеется возможность сделать инвестиции в ИР, дающие ненулевую вероятность перехода к новой технологии. При этом $\max[\dots] = \max\{M_1, M_2\}$, где

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_{0 \leq c^\gamma \leq -z} V(\lambda_0(x - c), z + c^\gamma), \\ M_2 &= \max_{-z < c^\gamma \leq x^\gamma \wedge (1-z)} \left[(1 - z - c^\gamma) V(\lambda_0(x - c), z + c^\gamma) + (z + c^\gamma)(x - c) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая, что функция $V(x, z)$ в M_2 рассматривается в нормальной области $z \geq 0$ и, значит, имеет уже известное представление (описанное выше), получаем

$$M_2 = \max_{0 \leq d \leq (x^\gamma + z) \wedge 1} \left\{ (1-d)^{1+1/\gamma} v(y) + d[x - (d-z)^{1/\gamma}] \right\}, \quad (12)$$

где $y = \lambda_0^\gamma [x - (d-z)^{1/\gamma}]^\gamma / (1-d)$, $v(\cdot)$ — уже известная функция (решение уравнения (9)). При этом точки, в которых достигаются максимумы в (11) и (12), связаны соотношением: $c^* = (d^* - z)^{1/\gamma}$.

Это обстоятельство можно использовать для предварительного этапа при вычислении функции $V(x, z)$. Положим $\tilde{V}(x, z) = \lambda_1^{-1} M_2$ при $z + x^\gamma \geq 0$. Учитывая, что функция $V(x, z)$ определяется через значения V на больших значениях z и $V(x, 0) = v(x^\gamma)$, можно предложить следующую процедуру решения базового уравнения (8) при $z < 0$.

1. Полагаем $V(x, 0) = v(x^\gamma)$ и $\tilde{V}(x, z) = \lambda_1^{-1} M_2$ при $z + x^\gamma \geq 0$.
2. Последовательно переходя к меньшим значениям z (с каким-то шагом), начиная с $z = 0$, для каждого z :

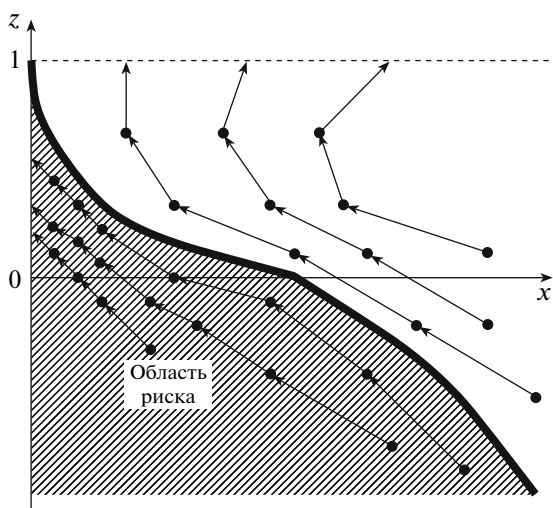
а) вычисляем M_1 при $V(x, z) = \tilde{V}(x, z)$;

б) в тех точках, где $M_1 > M_2$, применяем итеративный метод, используя уже вычисленные ранее значения $V(x, z)$ для больших значений z .

Такая процедура позволяет послойно (по z) вычислять значения функции $V(x, z)$. Отметим, что и здесь метод последовательных итераций применяется лишь в сравнительно небольшой области Y , для которой имеет место неравенство $M_1 > M_2$.

При $\gamma = 1$ область Y лежит справа от кривой $z = z(x)$, определяемой из соотношения $\lambda_1 v(x + z(x)) = v(\lambda_0 x + z(x))$, при других γ вид этой кривой аналитически найти не удастся.

Интересным представляется также и вопрос о характере оптимальных инвестиций в области $z + x^\gamma < 0$, когда обеспечить появление новой технологии с положительной вероятностью еще невозможно. Оказывается, что здесь многое определяет показатель эластичности γ функции



приращения ИР $g(\cdot)$. Так, можно доказать, что при $\gamma < 1$ оптимальные инвестиции всегда должны быть положительными (если $x > 0$). В линейном случае ($\gamma = 1$) суммарное приращение фондов за несколько шагов равносильно одному приращению при суммарном инвестировании; поэтому нет смысла осуществлять предварительное инвестирование мелкими дозами, а выгоднее сделать инвестиции один раз, максимально отсрочив момент их осуществления (чтобы максимально нарастить продукт x в рамках исходной технологии). При этом $c^*(x, z) = 0$ всюду в области Y .

2.3. Некоторые качественные выводы. Несмотря на достаточно простой вид базового уравнения (8), исследовать его чисто аналитическими методами весьма затруднительно и вряд ли целесообразно. Для представления общей картины были проделаны

многочисленные расчеты, которые вместе с аналитическими приемами (зачастую, дополняя их) позволяют сделать определенные выводы о качественном поведении решений для моделей роста с эндогенным дискретным изменением технологии. Остановимся на наиболее интересных (на наш взгляд) выводах, которые либо не имеют аналогов, либо существенно отличаются от соответствующих результатов для обычных моделей роста (без изменения технологии). Подробное описание свойств стационарных оптимальных инвестиций, являющихся решением уравнения (8), и порождаемых ими оптимальных траекторий для случая линейной функции $g(c) = c$ приведено в (Беленький, Сластников, 1997).

2.3.1. Изменение характера выпуклости. Из свойства сходимости последовательных итераций к решению уравнения (8) нетрудно вывести, что функция $V(x, z)$, являющаяся функцией Беллмана в стационарной задаче, будет выпуклой по x при любом уровне инновационных ресурсов $z < 1$. Напомним, что в традиционных моделях экономической динамики (без изменения технологии) функции Беллмана являются вогнутыми, а опорные к ним будут соответствующими стимулирующими ценами. Хотя модели с дискретным изменением технологии перестают, вообще говоря, обладать свойством выпуклости, тем не менее для них существует система цен, стимулирующих конечные оптимальные траектории (Аркин, 1986; Arkin, 1989).

2.3.2. Стационарная кривая и ее разделяющее свойство. Если параметры базового уравнения (8) связаны между собой соотношением $\lambda_0(1 + \gamma / \lambda_1) \leq 1 + \gamma$, то в плоскости (x, z) , $x \geq 0$, $-\infty < z \leq 1$ существует особая кривая l , вид которой определяется следующими формулами:

$$l = \begin{cases} \{x^\gamma = p^*(1 - z)\}, & \text{где } z \geq 0; \\ \{x - (d^* - z)^{1/\gamma} = [p^*(1 - d^*)]^{1/\gamma} / \lambda_0\}, & \text{где } z < 0, \end{cases}$$

где p^* — корень уравнения

$$\lambda_0 \gamma p^{1+1/\gamma} - \lambda_1(1 + \gamma)p^{1/\gamma} + \lambda_0 \lambda_1 = 0, \quad (13)$$

$$d^* = \operatorname{argmax}_{0 \leq d \leq (x^\gamma + z) \wedge 1} \left[(1 - d)^{1+1/\gamma} V(y, 0) + a(x - (d - z)^{1/\gamma}) \right], \quad y = \lambda_0^\gamma (x - (d - z)^{1/\gamma})^\gamma / (1 - d).$$

Отметим, что при $\gamma = 1$ кривая l состоит из отрезка $x = p^*(1 - z)$ при $z \geq 0$ и луча $x + z = p^*$ при $z < 0$.

Кривая l обладает той особенностью, что при выборе оптимального управления $c^*(x, z)$ находящаяся на ней точка (x, z) продолжает оставаться на ней и в следующий момент времени. Поэтому можно назвать эту кривую *стационарной*. Стационарная кривая разделяет всю фазовую плоскость, подобно барьеру, на две части. Оптимальные стационарные траектории (порождаемые решением базового уравнения (8)), начинающиеся по какую-то сторону от этой кривой, никогда не

могут через нее перескочить. Поле оптимальных стационарных траекторий, исходящих из различных начальных состояний для случая строго вогнутой функции g , приведено на рисунке.

Заметим, что в классических моделях Неймана—Гейла (без изменения технологии) бесконечно оптимальные траектории, порождаемые соответствующим стационарным уравнением Беллмана, сходятся к некоторой стационарной траектории (неймановскому лучу) (подробнее см. в (Рубинов, 1980; Беленький, 1981)). Однако такое “притяжение” к стационарным траекториям (магистральное свойство) исчезает в моделях с дискретным изменением технологии.

2.3.3. Область риска. Стационарная кривая l характеризует также и вероятность появления новой технологии при дальнейшем развитии системы.

Так, для оптимальных стационарных траекторий, исходящих из точек (x, z) , лежащих правее кривой l (в том смысле, что найдется точка кривой $(x_l, z) \in l$ такая, что $x_l < x$), переход к новой технологии происходит с вероятностью единица за конечное число шагов.

Для траекторий, начальные точки которых лежат на стационарной кривой l , появление новой технологии осуществляется с вероятностью единица за бесконечный интервал времени.

Точки (x, z) , лежащие левее стационарной кривой l (для которых найдется точка кривой $(x_l, z) \in l$ такая, что $x_l > x$), составляют так называемую область риска R (заштрихованная зона на рисунке). Для оптимальной траектории (x_t, z_t) , начинающейся в точке $(x_0, z_0) \in R$, валовый продукт x_t стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а уровень инновационных ресурсов $z_t \rightarrow z_\infty = z_0 + x_0^\gamma / p^* < 1$. Это означает, что вероятность непоявления новой технологии за бесконечное число шагов будет положительна и равна $1 - z_0 - x_0^\gamma / p^*$, где p^* — корень уравнения (13). Таким образом, при достаточно малых начальных ресурсах $(x, z) \in R$ “рискованное поведение”, грозящее системе полным разорением, оказывается более выгодным, чем “рассудительная” стратегия гарантированного перехода к новой технологии.

Для общих моделей Гейла с дискретным изменением технологии в (Аркин, 1988; Arkin, 1989) было установлено, что на конечной оптимальной траектории переход к новой технологии может происходить с вероятностью, меньшей единицы. Однако этот факт мало что дает при переходе к бесконечному интервалу времени.

Наличие области риска, попадание в которую не гарантирует (с вероятностью единица) системе переход к новой технологии на бесконечном интервале времени, является, по-видимому, характерной особенностью моделей роста с дискретно меняющейся (вероятностным образом) технологией. Подобная область возникает также и для аналогичной односекторной линейной модели, в которой распределение порогового значения уровня инновационных ресурсов (необходимых для появления новой технологии) является экспоненциальным — см. (Беленький, Смирнов, 2000).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Для заданной функции $\Phi \in \mathcal{F}_{i+1}$ определим на пространстве $\mathcal{F}_i$ операторы $\mathcal{H}_i$ следующим образом:

$$\mathcal{H}_i(\Phi)f(x, z) = \frac{1}{\lambda_m} \max_{d \in D_i(x, z)} [q_i f(\text{pr}_{1,2} d) + (1 - q_i) \Phi(\text{pr}_{3,4} d)], \quad i = 0, \dots, m-2,$$

$$\mathcal{H}_{m-1}f(x, z) = \frac{1}{\lambda_m} \max_{d \in D_{m-1}(x, z)} [q_{m-1} f(\text{pr}_{1,2} d) + (1 - q_{m-1}) G_m(\text{pr}_3 d)].$$

Нетрудно показать, что для любой функции $\Phi \in \mathcal{F}_{i+1}$ оператор $\mathcal{H}_i(\Phi)$ отображает пространство $\mathcal{F}_i$ в себя, а само пространство $\mathcal{F}_i$ является полным ($i = 0, \dots, m-1$). Докажем, что для любых $\Phi \in \mathcal{F}_{i+1}$ операторы $\mathcal{H}_i(\Phi)$ будут сжимающими с коэффициентами сжатия λ_i / λ_1 ($i = 0, \dots, m-1$, и формально полагаем $\mathcal{H}_{m-1}(\Phi) = \mathcal{H}_{m-1}$). В самом деле, для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_i(\Phi)f_1(x, z) - \mathcal{H}_i(\Phi)f_2(x, z)| &\leq \frac{1}{\lambda_m} \max_{(y, w, w') \in D_i(x, z)} |f_1(y, w) - f_2(y, w)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m} \max_{y \in a_i(x), w \in Z_i} [(|f_1(y, w) - f_2(y, w)|) / p_i y] p_i y \leq \|f_1 - f_2\|_i \lambda_i p_i x / \lambda_m \end{aligned}$$

(здесь использовано условие А3 и свойство неймановских цен $p_i y \leq \lambda_i p_i x$ при всех $y \in a_i(x)$). Отсюда следует, что $\|\mathcal{H}_i(\Phi)f_1 - \mathcal{H}_i(\Phi)f_2\|_i \leq (\lambda_i / \lambda_m) \|f_1 - f_2\|_i$. Тогда, очевидно, набор функций $V_0, \dots, V_{m-1}$, где V_{m-1} — неподвижная точка оператора $\mathcal{H}_{m-1}$, V_i — неподвижная точка оператора $\mathcal{H}_i(V_{i+1})$, $i = 0, \dots, m-2$, является единственным решением системы уравнений (6).

Доказательство теоремы 2. Положим $V_m(x, z) = G_m(x)$, $F_T^i(x, z) = \lambda_m^{-T} V_T^i(x, z)$. Тогда для $i = 0, \dots, m-1$ из уравнений оптимальности (4) и стационарной системы (6) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_m |F_T^i(x, z) - \gamma V_i(x, z)| &\leq \max_{d \in D_i(x, z)} |F_{T-1}^i(pr_{1,2}d) - \gamma V_i(pr_{1,2}d) + F_{T-1}^{i+1}(pr_{3,4}d) - \gamma V_{i+1}(pr_{3,4}d)| \leq \\ &\leq \max_{y, w} [F_{T-1}^i(y, w) - \gamma V_i(y, w)] / p_i y + \max_{y, w} [F_{T-1}^{i+1}(y, w) - \gamma V_{i+1}(y, w)] / p_{i+1} y \leq \\ &\leq \lambda_i p_i x (\|F_{T-1}^i - \gamma V_i\|_i + C \|F_{T-1}^{i+1} - \gamma V_{i+1}\|_{i+1}) \end{aligned}$$

(в последнем неравенстве использовано условие А4, а также неравенства $p_{i+1} y' \leq C |y'| \leq C |x| \leq C p_i x$ для $y' \in \text{pr}_3 D_i(x, z)$). Отсюда

$$\Delta_T^i = \|F_T^i - \gamma V_i\|_i \leq \alpha \Delta_{T-1}^i + \beta \Delta_{T-1}^{i+1}, \quad \alpha = \max_{0 \leq i \leq m-1} \lambda_i / \lambda_1 < 1, \quad \beta > 0.$$

Продолжая эти неравенства, получим

$$\Delta_T^i \leq \alpha^{T-1} \Delta_1^i + \beta \sum_{k=0}^{T-2} \alpha^k \Delta_{T-1-k}^{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1.$$

В силу (5) $\Delta_T^m \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Отсюда последовательно получаем $\Delta_T^i \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ для $i = m-1, \dots, 0$. Утверждение 1 теоремы 2 доказано.

Далее для $(x, z) \in Y_i$, $d = (y, w, y', w') \in D_i(x, z)$ будем обозначать $\psi_i(x, z, d) = q_i(x, z, d) V_i(y, w) + (1 - q_i(x, z, d)) V_{i+1}(y', w')$. Покажем сначала, что для любого компакта $K \subset Y_i$

$$\max_{(x, z) \in K, d^* \in D_i^*(x, z)} [\psi_i(x, z, d^*) - \psi_i(x, z, d_i^T)] \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (14)$$

В самом деле, из уравнения (6) получаем: для всех $d^* \in D_i^*(x, z)$

$$\begin{aligned} \lambda_m V_i(x, z) &= \psi_i(x, z, d^*) \geq \psi_i(x, z, d_i^T), \\ 0 &\leq \gamma \psi_i(x, z, d^*) - \gamma \psi_i(x, z, d_i^T) = \gamma \psi_i(x, z, d^*) - q_i(x, z, d_i^T) F_{T-1}^i(y_1^T, w_1^T) - \\ &- (1 - q_i(x, z, d_i^T)) F_{T-1}^{i+1}((y')_1^T) + q_i(x, z, d_i^T) [F_{T-1}^{i+1}(y_i^T, w_i^T) - \gamma V_i(y_i^T, w_i^T)] + \\ &+ (1 - q_i(x, z, d_i^T)) [F_{T-1}^{i+1}((y')_1^T) - \gamma V_{i+1}((y')_1^T, (w')_1^T)] = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \end{aligned}$$

$\delta_1 = \gamma \lambda_m V_i(x, z) - \lambda_m F_T^i(x, z) \rightarrow 0$ равномерно по $(x, z) \in K$ в силу доказанного утверждения 1), аналогично $\delta_2 \leq |F_{T-1}^i(y_1^T, w_1^T) - \gamma V_i(y_1^T, w_1^T)| \rightarrow 0$, $\delta_3 \leq |F_{T-1}^{i+1}((y')_1^T, (w')_1^T) - \gamma V_{i+1}((y')_1^T, (w')_1^T)| \rightarrow 0$ равномерно по $(x, z) \in K$. Тем самым (14) доказано.

Предположим теперь, что утверждение 2 теоремы неверно, т.е. существуют точка (x_0, z_0) , последовательность $\{T_n\}$ и положительное число δ , такие что $\rho_i(d_n, D_0^*) \geq \delta$, где $d_n = d_i^{T_n}(x_0, z_0)$, $D_0^* = D_i^*(x_0, z_0)$. Поскольку $D_i(x_0, z_0)$ есть компакт, то $d_{n_k} \rightarrow d_0 \in D_i(x_0, z_0)$ для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$. Переходя в последнем неравенстве к пределу, имеем

$$\rho(d_0, D_0^*) \geq \delta. \quad (15)$$

Однако для любого $d^* \in D_0^*$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \psi_i(x_0, z_0, d^*) - \psi_i(x_0, z_0, d^*) = \\ &= \psi_i(x_0, z_0, d^*) - \psi_i(x_0, z_0, d_{n_k}) + \psi_i(x_0, z_0, d_{n_k}) - \psi_i(x_0, z_0, d^*) \rightarrow 0, \quad n_k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в силу (14) и непрерывности ψ_i . Отсюда $\psi_i(x_0, z_0, d^*) = \psi_i(x_0, z_0, d_0)$, т.е. $d_0 \in D_0^*$, что противоречит (15). Утверждение 2 доказано.

Для доказательства утверждения 3 заметим, что отображение $D_i^*(x, z)$ полунепрерывно сверху, а поскольку оно однозначно, то $d_i^*(x, z)$ является непрерывной функцией. Теперь утверждение 3 нетрудно вывести рассуждениями, аналогичными примененным выше при выводе утверждения 2.

Доказательство теоремы 3. Достаточно показать, что для любого $t \geq 0$ $d_i^t(T) \rightarrow \tilde{d}_i^t$ при $T \rightarrow \infty$. Как и выше, заметим, что в условиях теоремы 3 функции $d_i^*(x, z)$ будут непрерывны по (x, z) . Из уравнений оптимальности (4), как нетрудно понять, следует, что для оптимального переходного процесса $d_{i+1}^t(T) = d_i^t(x_i^t(T), z_i^t(T))$, $t \geq 0$. Отсюда имеем (опуская ради краткости индексы i и T):

$$d_1(T) = d^T(x, z) \rightarrow d^*(x, z) = \tilde{d}_1 \text{ (по теореме 2),}$$

$$\rho(d_2(T), \tilde{d}_2) \leq \rho(d^T(\text{pr}_{1,2} d_1), d^*(\text{pr}_{1,2} d_1)) + \rho(d^*(\text{pr}_{1,2} d_1), d^*(\text{pr}_{1,2} \tilde{d}_1)) \rightarrow 0$$

в силу теоремы 2 и непрерывности d . Действуя аналогично, получим сходимость d_t к $\tilde{d}_t$ для любого $t \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Аркин В.И. (1986): Модели экономической динамики с эндогенно меняющейся технологией. Стимулирующие цены. В сб.: *“Исследования по стохастической оптимизации и математической экономике”*. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Аркин В.И., Пресман Э.Л., Сонин И.М. (1976): Вероятностные модели экономической динамики с учетом управляемого научно-технического прогресса. В кн.: *“Моделирование научно-технического прогресса и управление экономическими процессами в условиях неполноты информации”*. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Беленький В.З. (1981): Стационарные модели экономической динамики. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Беленький В.З. (1988): Модель оптимального $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ перехода для пары гейловских технологий (промежуточная магистраль). В сб.: *“Вероятность и математическая экономика”*. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Беленький В.З., Сластников А.Д. (1997): Модель оптимального инвестирования проекта новой технологии // *Экономика и мат. методы*. Т. 33. Вып. 3.
- Беленький В.З., Смирнов В.Н. (2000): Структура оптимального управления в двухпараметрической одномерной стохастической модели инвестирования (случай экспоненциального распределения) // *Экономика и мат. методы*. Т. 36. Вып. 2.
- Глазьев С.Ю. (2007): О задачах структурной политики в условиях глобальных технологических сдвигов // *Экономическая наука современной России*. № 3–4.
- Зеликина Л.Ф. (1976): О моделях научно-технического прогресса, описываемых производственными функциями. В кн.: *“Моделирование научно-технического прогресса и управление экономическими процессами в условиях неполноты информации”*. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Зеликина Л.Ф. (1986): Динамические модели оптимального замещения технологий. В кн.: *“Исследования по стохастической оптимизации и математической экономике”*. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Макаров В.Л. (2009): Обзор математических моделей экономики с инновациями // *Экономика и мат. методы*. Т. 45. Вып. 1.
- Макаров В.Л., Рубинов А.М. (1973): Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука.
- Рубинов А.М. (1980): Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. Л.: Наука.
- Сластников А.Д. (1989): Модели экономического роста со скачкообразно меняющейся технологией: стационарный подход. В сб.: *“Стохастическое управление в экономике”*. М.: ЦЭМИ АН СССР.
- Aghion P., Howitt P. (1998): *Endogenous Growth Theory*. Cambridge: The MIT Press.
- Arkin V.I. (1989): Probabilistic Models of Economic Dynamics with Endogeneous Changes of Technology. Working Paper WP-89-100. Laxenburg: IIASA.
- Ghosh A., Kato T., Morita H. (2007): Discrete Innovation, Continuous Improvement, and Competitive Pressure. Discussion Paper № 3132. Bonn: IZA.
- Redding S. (2002): Path Dependence, Endogenous Innovation, and Growth // *International Econ. Rev.* Vol. 43.
- Romer P.M. (1986): Increasing Returns and Long-Run Growth // *J. of Polit. Econ.* Vol. 94.
- Romer P.M. (1990): Endogenous Technological Change // *J. of Polit. Econ.* Vol. 98.