ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2009, том 45, № 1, с. 83–86

НАУЧНАЯ СЕССИЯ: ИННОВАЦИОННАЯ ЭКОНОМИКА: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

ОРДИНАЛЬНАЯ СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИКА: НЕПРЕРЫВНЫЙ СЛУЧАЙ

© 2009 г. А. В. Савватеев*, Н. С. Кукушкин**

(Москва)

1. ВВЕДЕНИЕ: ОРДИНАЛЬНЫЙ ПОДХОД К МАКСИМИЗАЦИИ

За последние 350 лет разработано множество методов решения задач нахождения максимума: теорема Ферма, методы Эйлера–Лагранжа, математическое и выпуклое программирование, гамильтонова техника и т.д. Эти методы применимы к решению задачи нахождения максимума функции

$$f(x) \to \max, \quad x \in D, \tag{1}$$

где множество D является подмножеством конечно- или бесконечномерного линейного (чаще, евклидова) пространства X, и зачастую позволяют свести задачу к решению систем уравнений и неравенств. В результате применения метода исследователь находит значение максимума рассматриваемой функции на заданном множестве и множество точек, в которых достигается максимальное значение (так называемое *множество аргмаксимума*). При этом чаще всего[1] исследователя интересует не само максимальное значение функции, а именно множество аргмаксимума:

$$\operatorname{Arg\,max}_D[f] := \{x \in D \mid \forall y \in D[f(x) \ge f(y)]\}. \tag{2}$$

В частности, это связано с тем, что, в отличие от значения максимума функции, множество аргмаксимума имеет *ординальную природу*: оно не меняется при монотонных (строго возрастающих) трансформациях функции f. Для любой строго возрастающей функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ справедливо

$$\operatorname{Arg\,max}_D[f] = \operatorname{Arg\,max}_D[g \circ f], \tag{3}$$

и, следовательно, множество аргмаксимума (в дальнейшем будем писать просто аргмаксимум) корректно определено на классах эквивалентности функций относительно строго возрастающих преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}$. Каждому такому классу эквивалентности можно поставить в соответствие отношение предпочтения $\succeq$ следующим естественным образом:

$$x \succeq y \leftrightharpoons f(x) \ge f(y). \tag{4}$$

Альтернативный подход состоит в максимизации (т.е. нахождении множества точек насыщения) непосредственно *отношения предпочтения* вместо функции:

$$\operatorname{Arg\,max}_D[\succeq] := \{x \in D \mid \forall y \in D[x \succeq y]\}. \tag{5}$$

Заметим, что при этом новом подходе сфера применения получаемых результатов расширяется за счет привлечения тех отношений предпочтения, которые не могут быть заданы ни одной функцией.

Основным примером таких предпочтений служит лексикографическое отношение предпочтения $\succeq$ на $\mathbb{R}^n$, строгая компонента которого задается следующим правилом:

$$(x_1,\dots,x_n) \succ^l (y_1,\dots,y_n) \leftrightharpoons \exists k \in \{1,\dots,n\}[x_k > y_k \;\; \& \, \forall i < k \; [x_i = y_i]]. \tag{6}$$

Иными словами, набор $(x_1,\dots,x_n)$ предпочитается набору $(y_1,\dots,y_n)$ в том случае, когда $x_1 > y_1$, или $x_1 = y_1$, но $x_2 > y_2$ или одновременно $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, но $x_3 > y_3$ и т.д., т.е. первая компонента является

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта государственной поддержки Ведущих научных школ РФ (проект НШ-929.2008.6).

**Работа выполнена при финансовой поддержке гранта государственной поддержки Ведущих научных школ РФ (проект НШ-5379.2006.1).

[1] В особенности в теоретико-игровых приложениях.

определяющей при сравнении наборов, вторая вступает в игру, только если первые компоненты наборов совпадают, и так далее[2].

Известно, что данный вид предпочтений не может быть задан никакой (даже разрывной!) функцией полезности (см., например, классическую работу Ж. Дебре о представлении предпочтений функциями полезности (Debreu, 1954)).

Лексикографические предпочтения не являются непрерывными. Чтобы показать это, напомним определение непрерывности отношения предпочтения.

Определение. Отношение предпочтения $\succeq$, заданное на метрическом пространстве X, называется непрерывным, если для любого элемента $x \in X$ оба множества

$$U[x] := \{y \in X \mid y \succeq x\}, \quad L[x] := \{y \in X \mid y \preceq x\} \tag{7}$$

являются замкнутыми подмножествами пространства X.

Легко увидеть (см., например, (Mas-Colell et al., 1995)), что отношение предпочтения (4) непрерывно, если непрерывна функция f. Однако для введенных выше лексикографических предпочтений условия (7) не выполняются (например, $U[(0,0)]$ для лексикографических предпочтений на $\mathbb{R}^2$ является объединением открытой полуплоскости и примыкающего к ней луча, и, естественно, замкнутым не является). Тем не менее задача (5) корректно определена на любом компакте $D \subset \mathbb{R}^2$; более того, в этом случае множество аргмаксимума всегда одноточечное:

$$\operatorname{Arg\,max}_D\,[\succeq^l] = \{(x^*, y^*) \in D \mid \forall y > y^*\,[(x^*, y) \notin D]\ \&\ \forall x > x^*\ \forall y[(x, y) \notin D]\}. \tag{8}$$

В многомерном случае ситуация совершенно аналогичная[3].

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ

Последние 50–100 лет стало важным изучение параметрических семейств задач на максимум:

$$f(x, \theta) \to \max, \quad x \in D[\theta], \tag{9}$$

в которых как максимизируемая функция, так и множество, на котором она максимизируется, зависят от значения экзогенного (в общем случае, многомерного) параметра θ.

Интерес к задачам такого рода обусловлен спросом со стороны теории игр и теории экономического равновесия, а также необходимостью изучать социальные системы с множеством взаимодействующих агентов. Действительно, во многих приложениях выигрыш данного игрока, будь то экономический агент или же один из живых элементов любой социальной системы, зависит не только от решений, принимаемых этим игроком (т.е. выбранной им стратегии), но также от переменных, влиять на которые он не может. В категорию последних входят в зависимости от приложения стратегические выборы других игроков или агрегирующие параметры, описывающие состояние системы в целом.

Решение задачи (9) – это точечно-множественная функция (соответствие) $F(\theta)$, которая каждому значению параметра θ ставит в соответствие множество аргмаксимума функции $f(x, \theta)$, рассматриваемой как функция от X и ограниченной на множество $D[\theta]$:

$$F(\theta) := \operatorname{Arg\,max}_{D[\theta]}[f(\bullet, \theta)] = \{x \in D[\theta] \mid \forall y \in D[\theta][f(x, \theta) \geq f(y, \theta)]\}. \tag{10}$$

Исследование поведения точечно-множественной функции (10) является критически важным в теории игр и в математическом моделировании и составляет предмет целой ветви математической экономики, так называемой *сравнительной статики*. Последние два десятилетия происходит переосмысление этой области науки, делаются попытки собрать воедино множество разрозненных ее результатов в форме теорем о том, при каких условиях (и в каком смысле) можно утверждать, что функция (10) является непрерывной и/или монотонной функцией аргумента θ.

[2] Подобный принцип используется повсеместно при определении победителя в спортивных соревнованиях, особенно командных – число набранных очков, потом число побед, потом личные встречи и т.д.

[3] Для линейных порядков, примером которых является лексикографическое предпочтение, аргмаксимум, если конечно непуст, всегда состоит из одной точки.

Пример. Рассмотрим лексикографические предпочтения $\succeq$ на $\mathbb{R}^2$ и исследуем параметрическое семейство задач на максимум:

$$F(\theta) = \operatorname{Arg\,max}_{D[\theta]}[\succeq^l], \tag{11}$$

где $D[\theta]$ – квадрат размером 2×2 с вырезанным вверху справа прямоугольником размером $\theta \times 1$ при $\theta > 0$ (рисунок, а), $D[0]$ – квадрат размера 2×2 (рисунок, б).

Тогда $F(\theta) = \{(1, 0)\}$ при $\theta > 0$, но $F(0) = \{(1, 1)\}$. Следовательно, несмотря на корректность определения множества аргмаксимума для лексикографических предпочтений, оно не меняется непрерывно по параметру θ даже тогда, когда множество, на котором ищется аргмаксимум, меняется по θ непрерывным по Хаусдорфу образом (Никайдо, 1972).

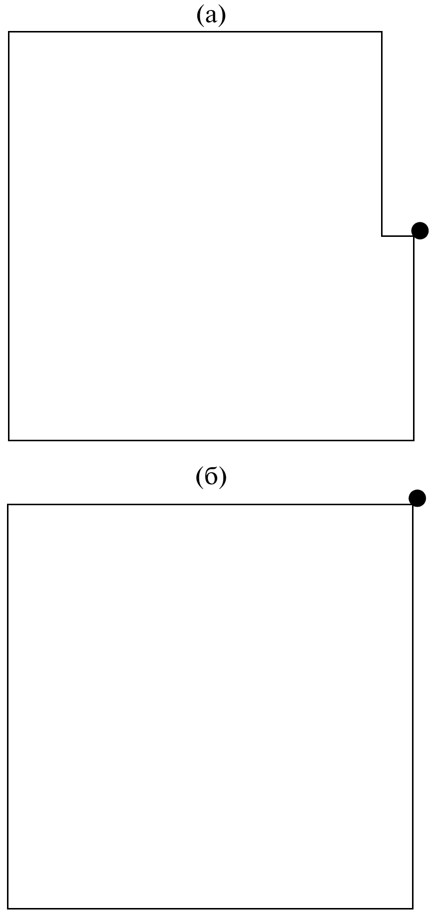

Рисунок. Разрывность аргмаксимума для лексикографических предпочтений:
а) "допредельный" компакт и точка аргмаксимума; б) предельный компакт и точка аргмаксимума.

3. НЕПРЕРЫВНАЯ СРАВНИТЕЛЬНАЯ СТАТИКА

В современных курсах по математической экономике доказывается следующая теорема (см., например, (Sundaram, 1996)).

Теорема об аргмаксимуме. *Пусть $f(x, \theta)$ определена на прямом произведении метрических пространств (например, подмножестве конечномерных евклидовых пространств) и непрерывна по паре аргументов (x, θ), а точечно-множественное отображение $D[\theta]$ является абсолютно непрерывным (т.е. непрерывным в метрике Хаусдорфа на множестве всех компактов). Тогда $F(\theta) := \operatorname{Arg\,max}_{D[\theta]}[f(x,\theta)]$ – полунепрерывно сверху многозначным отображением.*

Для освежения в памяти всех используемых в формулировке теоремы понятий см. (Никайдо, 1972).

Заметим, что эта теорема неприложима к лексикографическим предпочтениям, так как полунепрерывность сверху сводится к обычной непрерывности для однозначных функций, а пример в конце предыдущего раздела показывает, что для лексикографических предпочтений непрерывности нет. Разумеется, причиной служит разрывность лексикографического отношения предпочтения, т.е. нарушение условий (7).

В данной работе мы сосредоточим внимание на поведении аргмаксимума при изменении множества, на котором максимизируется функция или отношение предпочтения. Так как по теореме Дебре (Debreu, 1954) любое непрерывное отношение предпочтения может быть задано непрерывной же функцией (полезности), то получаем простое следствие теоремы об аргмаксимуме.

Следствие. *Пусть $\succeq$ – непрерывное отношение предпочтения, определенное на метрическом пространстве X (например, на $X = \mathbb{R}^n$). Тогда, если семейство подмножеств $D[\theta] \subset X$ непрерывно по параметру θ на множестве всех компактов с метрикой Хаусдорфа, то $F(\theta) := \operatorname{Arg\,max}_{D[\theta]}[\succeq]$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением.*

Постараемся усилить этот результат по аналогии с критерием монотонного поведения аргмаксимума, доказанным в (Milgrom, Shannon, 1994): *Множество аргмаксимума меняется монотонным образом, где монотонность точечно-множественных отображений понимается в смысле Вейнотта (Topkis, 1998) в том и только в том случае, когда максимизируемая функция обладает свойством квазисупермодулярности*.

Отметим, что последнее свойство является по природе своей ординальным и может быть определено непосредственно в терминах отношения предпочтения, заданного максимизируемой функцией.

В нашем же случае непрерывность функции и непрерывность отношения предпочтения – вещи разные, и разрывная функция вполне может задавать непрерывные предпочтения. Поэтому *критерий непрерывности* может быть сформулирован только в терминах непрерывности отношения предпочтения, т.е. на ординальном языке.

Более того, для доказательства необходимости непрерывности отношения предпочтения для полунепрерывного сверху поведения аргмаксимума надо рассмотреть *сразу все* параметрические семейства задач на максимум. Но чтобы обойти технические сложности на этом пути, вместо этого рассмотрим множество D в качестве параметра θ, пробегающего пространство всех компактных подмножеств метрического пространства, снабженное метрикой Хаусдорфа.

Теорема 1. *Точечно-множественное отображение* $F(D) := \operatorname{Arg\,max}_D[\succeq]$ *полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда отношение предпочтения* $\succeq$ *непрерывно.*

Доказательство. Легко увидеть справедливость достаточных условий; докажем их необходимость. Предположим, что $x^k \in U[x]$ при всех k и $x^k \to x^\omega$, но $x^\omega \notin U[x]$ (откуда $x^\omega \neq x$).

Определим $D^k = \{x^k, x\}$ и $D^\omega = \{x^\omega, x\}$, тогда получаем $D^k \to D^\omega$ и $x^\omega \in F(D^k)$, но $x^\omega \notin F(D^\omega)$, что противоречит полунепрерывности сверху. Аналогично, если $x^k \in L[x]$ при всех k и $x^k \to x^\omega$, но $x^\omega \notin L[x]$, то мы рассмотрим те же самые D^k и D^ω. На этот раз $x \in F(D^k)$ при всех k, но $x \notin F(D^\omega)$, что опять противоречит полунепрерывности сверху. ■

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема 1 дает полную характеризацию непрерывной сравнительной статики при фиксированном отношении предпочтения. Пример с лексикографическим отношением предпочтения иллюстрирует доказанный результат, предъявляя параметрическое семейство задач на максимум, решения которого меняются не полунепрерывным сверху образом.

Было бы интересно переформулировать теорему об аргмаксимуме так, чтобы вообще исключить из него функцию, заменив ее на отношение предпочтения. В идеале, теорема должна звучать следующим образом.

Теорема 2. *Точечно-множественное отображение* $F(\succeq, D) := \operatorname{Arg\,max}_D[\succeq]$ *полунепрерывно сверху по паре своих аргументов, если ограничить их, соответственно, пространством непрерывных отношений предпочтения на X и пространством всех компактных подмножеств X.*

Однако для этого нужно прежде всего объяснить, какая метрика вводится на пространстве (непрерывных) отношений предпочтения на X, а как это сделать, пока что не вполне понятно. Будущие исследования должны заполнить этот пробел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Никайдо Х. (1972): Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир.

Debreu G. (1954): Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. In: "*Decision Processes*". Thrall R.M., Coombs C.H., Davis R.L. (eds). N.Y.: Wiley.

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. (1995): Microeconomic Theory. Oxford: Oxford University Press.

Milgrom P., Shannon C. (1994): Monotone Comparative Statics // *Econometrica*. Vol. 62. № 1.

Sundaram R.K. (1996): A First Course in Optimization Theory. Cambridge: Cambridge University Press.

Topkis D. (1998): Supermodularity and Complementarity. Princeton: Princeton University Press.