

НАУЧНАЯ СЕССИЯ: ИННОВАЦИОННАЯ ЭКОНОМИКА:
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

ФИНАНСОВЫЕ ИННОВАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ*

© 2009 г. А. Н. Ширяев
(Москва)

1. ПЕРВЫЕ ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЦЕН

Построение правильных вероятностно-статистических моделей, описывающих динамику цен основных финансовых инструментов (таких как банковский счет, облигации, акции и т.д.), является, несомненно, одним из ответственных этапов на пути использования достижений финансовой математики и методов финансовой инженерии. Без правильных, адекватных моделей для цен не может быть и речи об успешном управлении риском (risk management), составлении оптимального портфеля ценных бумаг (portfolio optimization), распределении фондов (allocation of funds), расчетов в производных ценных бумагах (derivative pricing) и др. Основной акцент в статье сделан на конструкции гиперболических процессов Леви, широко используемых в последнее время в эконометрических моделях, описывающих движение финансовых индексов.

Будем считать, что $S = (S_t)_{t \geq 0}$ — цена одного (для простоты) актива.

Напомним, что первым, кто стал строить математическую модель эволюции движения цен, был Л. Башелье (Bachelier, 1900). Он считал, что $S_t = S_0 + \mu t + \sigma B_t$, где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение (гауссовский процесс с независимыми приращениями, непрерывными траекториями, $B_0 = 0$, $EB_t = 0$, $E(B_t - B_s)^2 = t - s$, где E — математическое ожидание).

Важным этапом в понимании того, как изменяются цены, были исследования М. Кендалла (Kendall, 1953). Им был проведен эмпирический анализ (недельных) цен $S = (S_n)_{n \geq 0}$ на пшеницу (Чикагский рынок, 1883–1934), хлопок (Нью-Йоркская торговая биржа, 1816–1951). Вопреки ожиданиям, этот анализ не выявил ни ритмов, ни циклов. Оказалось, что наблюдаемые данные выглядят так, как если бы “the Demon of Chance drew a random number and added it to the current price to determine the next price”: $S_n = S_0 e^{H_n}$, где $H_n = h_1 + \dots + h_n$ — сумма независимых случайных величин (“гипотеза случайного блуждания”).

Следующие две работы сыграли важную роль в построении модели (неотрицательных) цен, в которой “случайность” описывалась броуновским движением. Это работы М.Ф.М. Осборна (Osborne, 1959) и П.Э. Самуэльсона (Samuelson, 1965), в которых предложили использовать для цен следующее представление:

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \quad H_t = (\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma B_t.$$

Процесс $S = (S_t)_{t \geq 0}$ носит название “экономическое (геометрическое) броуновское движение”; по формуле замены переменных Ито

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

(как известно, эта модель легла в основу теории Блэка–Шоулса расчетов в опционах).

2. МАРТИНГАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ МОДЕЛЕЙ $S = (S_n)_{n \geq 0}$

Будем записывать S_n в виде $S_n = S_0 e^{H_n}$, $H_n = h_1 + \dots + h_n$ ($h_n = \log(S_n/S_{n-1})$ — “возврат”, “логарифмический возврат”). Базисную роль в мартингальном подходе к описанию динамики движения цен играет разложение Дуба. Предполагается, что стохастические колебания рынка описываются фильтрованным вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$ и $E | H_n | < \infty$, $n \geq 0$. Ясно,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00740, 08-01-91205-ЯФ).

что $h_n = E(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) + (h_n - E(h_n | \mathcal{F}_{n-1})) \equiv \mu_n + \delta_n$, где μ_n — $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримы, δ_n — $\mathcal{F}_n$ -измеримы. Последовательность (δ_n) является мартингал-разностью, т.е. $E | h_n | < \infty$ и $E(\delta_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$, $n \geq 1$.

С точки зрения разложения Дуба уместно сейчас рассмотреть некоторые традиционные модели.

1970-е годы (большие временные интервалы — год, квартал, месяц). В эти годы основными были линейные модели типа AR, MA, ARMA с $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$ (т.е. $\delta_n = \sigma_n \varepsilon_n$), где μ_n и σ_n — $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримы, ε_n — стандартные нормально распределенные, $\mathcal{N}(0,1)$, и независимые случайные величины, $n \geq 1$. В случае:

- $AR(p)$ -модели: $\mu_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}$, $\sigma_n = \text{const}$;
- $MA(q)$ -модели: $\mu_n = b_0 + b_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q}$, $\sigma_n = \text{const}$;
- $ARMA(p, q)$ -модели: $\mu_n = [a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}] + [b_0 + b_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + b_q \varepsilon_{n-q}]$, $\sigma_n = \text{const}$.

1980-е годы (анализ дневных данных). Основным интересом был связан с нелинейными моделями:

- $ARCH(p)$ -модель¹ — $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n = (\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2)^{1/2}$;
- $GARCH(p, q)$ -модель² — $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$, $\sigma_n = \left(\left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{n-i}^2 \right] + \left[\sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{n-j}^2 \right] \right)^{1/2}$;
- бинарная CRR -модель³ — $h_n = \log(1 + \rho_n)$, где ρ_n принимает два значения, $\rho_n > -1$.

1990-е годы (внутридневной анализ данных). В эти годы основным интересом был связан с анализом данных, описываемых случайными процессами “тиковой” структуры ($H_t = \sum h_k I(\tau_k \leq t)$, где τ_k — тики) и процессами с непрерывными траекториями.

Отметим ряд недостатков модели $S_t = S_0 e^{H_t}$, $H_t = (\mu - \sigma^2 / 2)t + \sigma B_t$, основанной на броуновском движении: $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$ с постоянной волатильностью σ . Реально наблюдаемый так называемый “smile effect” говорит о том, что на самом деле волатильность σ не является постоянной величиной. Объясняется это следующим образом.

Рассматривается стандартный опцион-колл (опцион покупателя) с платежной функцией $(S_T - K)^+$. Пусть $C(t, x) = E_P[(S_T - K)^+ | S_t = x]$ — цена опциона в момент времени t при условии $S_t = x$. По известной формуле Блэка—Шоулса находим $C(t, x) = C_{BS}(t, x; T, K, \sigma)$. На рынке опционов есть, конечно, реальные цены $\tilde{C}(t, x; T, K)$. Естественно предполагать, что если цены “хорошо” вписываются в модель Блэка—Шоулса, то должно быть выполнено соотношение $C_{BS}(t, x; T, K, \sigma) \approx \tilde{C}(t, x; T, K)$, из которого находим предполагаемую волатильность $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t, x; T, K)$. Фиксируем t, x, T . Тогда из эмпирических данных обнаруживаем, что $\tilde{\sigma}(K)$ имеет U -образную форму с $K_{min} \approx x$.

Первая коррекция модели Блэка—Шоулса была дана Р. Мертоном в (Merton, 1973) и заключалась в замене $\sigma \rightarrow \sigma(t)$. Вторая коррекция была предложена Б. Дюпиром (Dupire, 1994) и состояла в том, что $\sigma(t)$ предполагалось зависимым также и от S_t : $\sigma(t) \rightarrow \sigma(t, S_t)$.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОЦЕССОВ $H = (H_t)_{t \geq 0}$

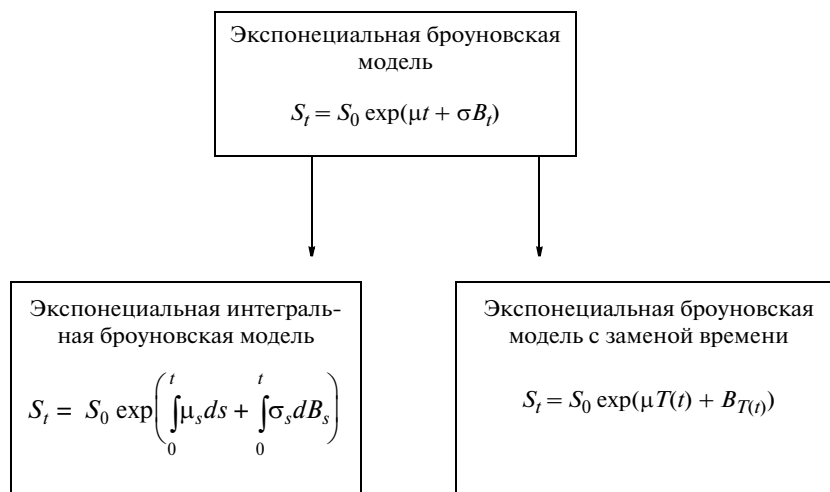
В статистике финансовых данных известны следующие свойства величин $h_t^{(\Delta)} = \log(S_t / S_{t-\Delta})$ для разных значений $\Delta > 0$.

1. Эмпирические одномерные плотности $\hat{p}_t^{(\Delta)}(x)$, построенные по $h_{\Delta}^{(\Delta)}, h_{2\Delta}^{(\Delta)}, \dots$ (при не очень больших $\Delta > 0$), имеют форму, отличную от формы плотности нормального распределения. В окрестности центрального значения плотности $\hat{p}_t^{(\Delta)}(x)$ имеют пикообразную форму. При $x \rightarrow \pm\infty$ наблюдаются “тяжелые хвосты” — плотности $\hat{p}_t^{(\Delta)}(x)$ убывают с ростом $|x|$ много медленнее, нежели принято для нормального распределения.

¹ AutoRegressive Conditional Heteroskedastic Model.

² Generalized ARCH Model.

³ Cox, Ross, Rubinstein Model.



2. Эмпирическая оценка автокорреляции ($t = k\Delta$)

$$\rho(n\Delta) = \left[\mathbf{E} h_t^{(\Delta)} h_{t+n\Delta}^{(\Delta)} - \mathbf{E} h_t^{(\Delta)} \mathbf{E} h_{t+n\Delta}^{(\Delta)} \right] / \left(\mathbf{D} h_t^{(\Delta)} \mathbf{D} h_{t+n\Delta}^{(\Delta)} \right)^{1/2}$$

($\mathbf{D}$ — дисперсия) показывает, что при малых $n\Delta$ величины $\rho(n\Delta)$ отрицательны и для большинства значений $\rho(n\Delta)$ близки к нулю (некоррелированность).

3. Аналогичные оценки для автокорреляции *абсолютных* величин $|h_t^{(\Delta)}|$ и $|h_{t+n\Delta}^{(\Delta)}|$ показывают, что эта автокорреляция для малых $n\Delta$ положительна.

4. МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРОЦЕССАХ ЛЕВИ

Поиски адекватных статистических моделей для описания динамики цен $S = (S_t)_{t \geq 0}$ привели к необходимости рассмотрения класса процессов Леви, к которым принадлежит и броуновское движение. Именно эти процессы занимают сейчас центральное место в моделировании цен финансовых индексов, характерной особенностью которых является то, что в их движении прослеживается *скачкообразный* механизм изменения.

4.1. Экспоненциальные модели, базирующиеся на броуновском движении. Если считать, что $\mu = 0$, то в краткой форме приведенные модели можно представить в виде

$$S = S_0 e^{\sigma \bullet B} \leftarrow S = S_0 e^{\sigma B} \rightarrow S = S_0 e^{B \circ T},$$

где $\sigma \bullet B$ обозначает стохастический интеграл $\int_0^\cdot \sigma_s dB_s$; $B \circ T$ — замену времени в броуновском движении $B_{T(t)}$ (см. рисунок).

4.2. Экспоненциальные модели, базирующиеся на процессах Леви. Обобщение “броуновских” моделей, долго превалировавших в финансовом моделировании, основано на замене броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$ на процессы Леви $L = (L_t)_{t \geq 0}$:

$$S = S_0 e^{\sigma \bullet L} \leftarrow S = S_0 e^{\sigma L} \rightarrow S = S_0 e^{L \circ T}.$$

Процесс Леви $L = (L_t)_{t \geq 0}$ — это процесс со стационарными приращениями, $L_0 = 0$, непрерывный по вероятности. У таких процессов существуют модификации с траекториями, непрерывными справа (при $t \geq 0$) и имеющими пределы слева (при $t > 0$).

При аналитическом изучении процессов Леви центральную роль играет *формула Колмогорова–Леви–Хинчина* для характеристической функции:

$$\mathbf{E} \exp(i\lambda L_t) = \exp\left\{t \left[i\lambda b - 0.5\lambda^2 c + \int (\exp(i\lambda x) - 1 - i\lambda h(x)) F(dx) \right] \right\},$$

где $h(x) = xI(|x| \leq 1)$ — классическая функция “урезания”, $F(dx)$ — σ -конечная мера на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ с $\int \min(1, x^2) F(dx) < \infty$, $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$; $(b, c, F) =: \mathbb{T}$ — триплет характеристик L .

Стохастический анализ процессов Леви основан на *представлении Леви–Ито* для траекторий $L = (L_t)_{t \geq 0}$:

$$L_t = B_t + L_t^c + \int_0^t \int h(x) d(\mu - \nu) + \int_0^t \int (x - h(x)) d\mu,$$

где $B_t = bt$; L_t^c — непрерывная составляющая процесса L , $L_t^c = \sqrt{c}W_t$; W_t — винеровский процесс; μ — мера скачков:

$$\mu(\omega; (0, t] \times A) = \sum_{0 < s \leq t} I_A(\Delta L_s), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (\Delta L_s = L_s - L_{s-});$$

ν — компенсатор меры скачков μ :

$$\nu((0, t] \times A) = tF(A), \quad F(A) = \int_A F(dx).$$

Мера скачков μ — это *пуассоновская* мера с

$$\mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{k \leq n} \lambda_k \mu(G_k) \right\} = \exp \left\{ \sum_{k \leq n} (\exp(i\lambda_k) - 1) \nu(G_k) \right\}, \quad n \geq 1,$$

где G_k — множества из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\nu(dt, dx) = dt F(dx)$.

Примерами процессов Леви являются броуновское движение, процесс Пуассона, составной процесс Пуассона $L_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$, где $(N_t)_{t \geq 0}$ — процесс Пуассона, $(\xi_k)_{k \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

5. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

В связи с финансовой эконометрикой значительный интерес представляют так называемые *гиперболические процессы Леви*, хорошо моделирующие реально наблюдаемые процессы $H = (H_t)_{t \geq 0}$ многих первичных финансовых инструментов — обменных курсов, акций и т.п. Большая заслуга в становлении теории таких процессов и их применений принадлежит Э. Хальфену, О.Е. Барндорфф-Нильсену, Э. Эберлейну.

Приведем (конструктивное) построение таких процессов, пользуясь во многом материалами из (Barndorff-Nielsen, Shiryaev, 2008, ch. 9, 12).

Для каждого процесса Леви $(H_t)_{t \geq 0}$: $\mathbb{E} e^{i\lambda H_t} = (\mathbb{E} e^{i\lambda H_1})^t$. Из свойств процессов Леви следует, что величина $h = H_1$ является безгранично делимой, т.е. при любом n можно найти такие независимые одинаково распределенные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$, что $Law(h) = Law(\xi_1 + \dots + \xi_n)$. Будем искать такие безгранично делимые величины в виде $h = \mu + \beta \sigma^2 + \sigma \varepsilon$, где ε — стандартная гауссовская случайная величина, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\sigma = \sigma(\omega)$ — не зависящая от ε “волатильность”, для квадрата которой (σ^2) в разд. 6 будет построено специальное распределение — *обобщенное обратно-гауссовское распределение GIG*⁴.

Замечательным является то обстоятельство, что это распределение на $\mathbb{R}_+$ действительно *безгранично делимо* и для $h = \mu + \beta \sigma^2 + \sigma \varepsilon$ на $\mathbb{R}$ распределение также *безгранично делимо*. Поэтому существуют процессы Леви $T = (T(t))_{t \geq 0}$ и $H^* = (H_t^*)_{t \geq 0}$ такие, что

$$Law(T(1)) = Law(\sigma^2), \quad Law(H_1^*) = Law(h).$$

Одной из реализаций процесса $H^* = (H_t^*)_{t \geq 0}$ может служить $H_t = \mu t + \beta T(t) + B_{T(t)}$, где “замена времени” $T = (T(t))_{t \geq 0}$ и броуновское движение $B = (B_t)_{t \geq 0}$ независимы.

В дальнейшем не будем различать процессы H и H^* . Процесс H , замечательный во многих отношениях, был назван обобщенным гиперболическим процессом Леви $L(GH)$ ⁵.

⁴ Generalized Inverse Gaussian.

⁵ Generalized Hyperbolic Levy process.

6. ПОСТРОЕНИЕ GIG-РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть $W = (W_t)_{t \geq 0}$ – винеровский процесс (стандартное броуновское движение). Для $A \geq 0$, $B > 0$ положим $T^A(B) = \inf\{s \geq 0: As + W_s \geq B\}$. Формула плотности $p_{T^A(B)}(s) = dP(T^A(B) \leq s)/ds$ хорошо известна:

$$p_{T^A(B)}(s) = \frac{B}{s} \varphi_s(B - As), \quad \text{где} \quad \varphi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/(2s)}. \quad (1)$$

Отсюда находим преобразование Лапласа:

$$E \exp(-\lambda T^A(B)) = \exp\{AB(1 - (1 + 2\lambda/A^2)^{1/2})\}.$$

Полагая $b = B^2 > 0$ и $a = A^2 \geq 0$, для $p(s; a, b) = p_{T^{\sqrt{a}}(\sqrt{b})}(s)$ получаем из формулы (1), что

$$p(s; a, b) = c_1(a, b) s^{-3/2} e^{-(as+b/s)/2}, \quad \text{где} \quad c_1(a, b) = (b/2\pi)^{1/2} e^{\sqrt{ab}}.$$

Распределение с плотностью $p(s; a, b)$ носит название *обратно-гауссовского распределения*⁶ и обозначается $IG = IG(a, b)$.

Определим функцию

$$p(s; a, b, \nu) = c_2(a, b, \nu) s^{\nu-1} e^{-(as+b/s)/2}, \quad (2)$$

в которой параметры $a, b, \nu \in \mathbb{R}$ выбираются так, чтобы $p(s; a, b, \nu)$ была плотностью распределения вероятностей на $\mathbb{R}_+$. Такими комбинациями для a, b, ν являются:

$$a \geq 0, \quad b > 0, \quad \nu < 0; \quad a > 0, \quad b > 0, \quad \nu = 0; \quad a > 0, \quad b \geq 0, \quad \nu > 0.$$

Для этих комбинаций параметров

$$\int_0^\infty s^{\nu-1} e^{-(as+b/s)/2} ds < \infty.$$

Известно, что

$$K_\nu(y) \equiv 0.5 \int_0^\infty s^{\nu-1} e^{-y(s+1/s)/2} ds$$

есть модифицированная функция Бесселя 3-го рода порядка ν , удовлетворяющая при $y > 0$ уравнению $y^2 f''(y) + y f' - (y^2 + \nu^2) f(y) = 0$. Тем самым константа в (2) имеет вид:

$$c_2(a, b, \nu) = (a/b)^{\nu/2} / [2K_\nu(\sqrt{ab})].$$

Распределение на $\mathbb{R}_+$ с плотностью

$$p(s; a, b, \nu) = \{(a/b)^{\nu/2} / [2K_\nu(\sqrt{ab})]\} s^{\nu-1} e^{-(as+b/s)/2}$$

носит название *обобщенного обратно-гауссовского распределения*⁷ и обозначается $GIG = GIG(a, b)$.

Сформулируем важные свойства GIG-распределения для σ^2 .

1. Это распределение *безгранично делимо*.

2. Плотность $p(s; a, b, \nu)$ *унимодальна* с модой

$$m = \begin{cases} b / [2(1 - \nu)], & \text{если } a = 0, \\ [(\nu - 1) + \sqrt{ab + (\nu - 1)^2}] / a, & \text{если } a > 0. \end{cases}$$

⁶ Inverse Gaussian distribution.

⁷ Generalized Inverse Gaussian distribution.

3. Преобразование Лапласа $L(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda s) p(s; a, b, \nu) ds$ определяется формулой

$$L(\lambda) = \left(1 + \frac{2\lambda}{a}\right)^{-\nu/2} \frac{K_{\nu}(\sqrt{ab(1 + 2\lambda/a)})}{K_{\nu}(\sqrt{ab})}.$$

Отсюда можно получить и представление для плотности $f(y)$ меры Леви $F(dy)$. (Заметим, что $L(\lambda) = \exp\left\{\int_0^{\infty} (\exp(-\lambda y) - 1) f(y) dy\right\}$.)

Следующие частные случаи GIG-распределений особенно важны.

1. $a \geq 0$, $b > 0$, $\nu = -0.5$. В этом случае $\mathbf{GIG}(a, b, 0.5) = \mathbf{IG}(a, b)$; плотность меры Леви: $f(y) = (b/2\pi)^{1/2} e^{-ay/2} / y^{3/2}$.

2. $a > 0$, $b = 0$, $\nu > 0$. В этом случае $\mathbf{GIG}(a, 0, \nu) = \mathbf{Gamma}(a/2, \nu)$ — гамма-распределение с плотностью

$$p(s; a, 0, \nu) = \left((a/2)^{\nu} / \Gamma(\nu)\right) s^{\nu-1} e^{-as/2};$$

плотность $f(y)$ меры Леви определяется формулой $f(y) = y^{-1} \nu e^{-ay/2}$.

3. $a > 0$, $b > 0$, $\nu = 1$. В этом случае плотность имеет вид:

$$p(s; a, b, 1) = \left(\sqrt{a/b} / [2K_1(\sqrt{ab})]\right) e^{-(as+b/s)/2};$$

соответствующее распределение носит название *положительно-гиперболического распределения*⁸ (PH), или H^+ -распределения.

Поскольку GIG-распределение безгранично делимо, то, беря его в качестве распределения квадрата волатильности σ^2 , $Law(\sigma^2) = \mathbf{GIG}$, можно построить неотрицательный неубывающий процесс Леви $T = (T(t))_{t \geq 0}$ (субординатор), для которого $Law(T(1)) = Law(\sigma^2) = \mathbf{GIG}$. Этот процесс в дальнейших конструкциях играет роль замены времени, операционного времени.

Построение процесса возврата $H = (H_t)_{t \geq 0}$ осуществляется следующим образом. Образует величину $h = \mu + \beta \sigma^2 + \sigma \varepsilon$, где $Law(\sigma^2) = \mathbf{GIG}$, $Law(\varepsilon) = \mathcal{N}(0, 1)$, σ^2 и ε независимы. Ясно, что $Law(h) = E_{\sigma^2} \mathcal{N}(\mu + \beta \sigma^2, \sigma^2)$ — взвесь нормальных распределений, т.е. плотность $p_h(x)$ распределения h имеет вид

$$p_h(x) = \int_0^{\infty} \left(\sqrt{2\pi y}\right)^{-1} \exp\left\{-(x - (\mu + \beta y))^2 / 2y\right\} p_{\mathbf{GIG}}(y) dy.$$

Интегрируя и обозначая $p_h(x)$ через $p^*(x; a, b, \mu, \beta, \nu)$, находим

$$p^*(x; a, b, \mu, \beta, \nu) = c_3(a, b, \beta, \nu) \left(K_{\nu-0.5}(\alpha \sqrt{b + (x - \mu)^2}) / (\sqrt{b + (x - \mu)^2})^{0.5-\nu} \right) e^{\beta(x - \mu)},$$

где

$$\alpha = \sqrt{a + \beta^2},$$

$$c_3(a, b, \beta, \nu) = (a/b)^{\nu/2} \alpha^{0.5-\nu} / [\sqrt{2\pi} K_{\nu}(\sqrt{ab})].$$

Полученное распределение $Law(h)$ с плотностью $p^*(x; a, b, \mu, \beta, \nu)$ носит название *обобщенное гиперболическое распределение* $\mathbf{GH} = \mathbf{GH}(a, b, \mu, \beta, \nu)$.

В случае $\nu = 1$ график функции

$$\log p^*(x; a, b, \mu, \beta, 1) = \log c_3(a, b, \beta, 1) - \alpha \sqrt{b + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)$$

⁸ Positive Hyperbolic distribution.

есть *гипербола* с асимптотами $\alpha |x - \mu| + \beta(x - \mu)$. По этой причине распределение для h в случае $v = 1$ называют гиперболическим, что и объясняет название “обобщенное гиперболическое распределение” в случае произвольного v .

Приведем некоторые свойства **ГН**-распределения для h .

1*. Это распределение *безгранично делимо*.

2*. Если $\beta = 0$, то распределение *унимодально* с модой $m = \mu$ (в общем случае m определяется как корень некоторого трансцендентного уравнения).

3*. Преобразование Лапласа $L^*(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda x} p(x; a, b, \mu, \beta, v) dx$ (для комплексных λ таких, что

$|\beta + \lambda| < \alpha$, $\alpha = \sqrt{a + \beta^2}$) задается формулой

$$L^*(\lambda) = e^{\lambda \mu} \left[a / (\alpha^2 - (\beta + \lambda)^2) \right]^{v/2} K_v \left(\left(b [\alpha^2 - (\beta + \lambda)^2] \right)^{1/2} \right) / K_v(\sqrt{ab}).$$

Отметим важные частные случаи **ГН**-распределений.

I*. $a \geq 0$, $b > 0$, $v = -0.5$: в этом случае $\mathbf{GIG}(a, b, -0.5) = \mathbf{IG}(a, b)$ — обратно-гауссовское распределение. Соответствующее **ГН**-распределение принято называть *нормальным обратно-гауссовским* и обозначать $\mathbb{N} \circ \mathbf{IG}$. Плотность имеет вид

$$p^*(x; a, b, \mu, \beta, -0.5) = \frac{\alpha b}{\pi} \exp(\sqrt{ab}) \left[K_1(\alpha \sqrt{b + (x - \mu)^2}) / \sqrt{b + (x - \mu)^2} \right] \exp(\beta(x - \mu)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Преобразование Лапласа:

$$L^*(\lambda) = \exp\{\lambda \mu + \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{a - 2\beta\lambda - \lambda^2})\}.$$

II*. $a > 0$, $b = 0$, $v > 0$: в этом случае $\mathbf{GIG}(a, 0, v) = \mathbf{Gamma}(a/2, v)$ — гамма-распределение. Соответствующее **ГН**-распределение называют *нормальным гамма-распределением* (обозначение: $\mathbb{N} \circ \mathbf{Gamma}$) или **VG**-распределением⁹. Плотность $p^*(x; a, 0, \mu, \beta, v)$ этого распределения задается формулой

$$p^*(x; a, 0, \mu, \beta, v) = \frac{a^v}{\sqrt{\pi} \Gamma(v) (2\alpha)^{v-0.5}} |x - \mu|^{v-0.5} K_{v-0.5}(\alpha |x - \mu|) e^{\beta(x - \mu)}.$$

Преобразование Лапласа:

$$L^*(\lambda) = e^{\mu \lambda} (a / [a - 2\beta\lambda - \lambda^2])^v.$$

III*. $a > 0$, $b > 0$, $v = 1$: в этом случае $\mathbf{GIG}(a, b, 1) = \mathbf{H}^+(a, b)$ — *положительно-гиперболическое* распределение. Соответствующее **ГН**-распределение для h есть гиперболическое **Н**-распределение, называемое также *нормальным положительно-гиперболическим распределением* (обозначение: **H** или $\mathbb{N} \circ \mathbf{H}^+$). Плотность:

$$p^*(x; a, b, \mu, \beta, 1) = \frac{a}{2b\alpha K_1(\sqrt{ab})} \exp\left\{-\alpha \sqrt{b + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right\},$$

где $\alpha = \sqrt{a + \beta^2}$.

7. ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

Основываясь на **GIG**-распределениях для σ^2 и **ГН**-распределениях для h , перейдем к построению процесса Леви $H = (H_t)_{t \geq 0}$, используемого в представлении цен $S_t = S_0 e^{H_t}$, $t \geq 0$.

Есть две возможности. При первой, отправляясь от того факта, что h имеет безгранично делимое распределение, строим, пользуясь общей теорией, процесс Леви $H^* = (H_t^*)_{t \geq 0}$ так, что $Law(H_t^*) = Law(h)$.

⁹ Variance Gamma.

Вторая возможность, как уже было отмечено выше, состоит в том, что, используя уже построенный процесс $T = (T_t)_{t \geq 0}$, образуем процесс $H = (H_t)_{t \geq 0}$ по формуле $H_t = \mu t + \beta T(t) + B_{T(t)}$, где броуновское движение $B = (B_t)_{t \geq 0}$ и процесс $T = (T_t)_{t \geq 0}$ берутся независимыми.

Как отмечено выше, процесс $H = (H_t)_{t \geq 0}$ называется обобщенным гиперболическим процессом Леви¹⁰ и обозначается $L(\mathbf{GH})$.

В отмеченных выше случаях I^* , II^* и III^* соответствующие процессы Леви имеют специальные названия:

случай I^* — $L(\mathbb{N} \circ \mathbf{IG})$ -процесс;

случай II^* — $L(\mathbb{N} \circ \mathbf{H}^+)$ -процесс, или $L(\mathbf{H})$ -процесс;

случай III^* — $L(\mathbb{N} \circ \mathbf{Gamma})$ -процесс, или $L(\mathbf{VG})$ -процесс.

Интересно отметить, что $L(\mathbb{N} \circ \mathbf{IG})$ - и $L(\mathbb{N} \circ \mathbf{Gamma})$ -процессы Леви обладают тем важным свойством, что для них распределения $Law(H_t)$ принадлежат к тому же самому типу, что и $Law(H_1)$ (это непосредственно вытекает из вида из преобразований Лапласа).

Замечание. Плотности распределений h ($h = H_1$) определяются *пятью* параметрами (a, b, v, β, ν) , что дает большую степень свободы для отыскания тех параметров, которые адекватно соответствуют эмпирическим данным.

В этой связи уместно напомнить, что в статистике есть хорошо известная система кривых Пирсона, широко применяемых для построения (одномерных) плотностей распределений по независимым наблюдениям над случайной величиной ξ . К. Пирсон такие плотности строил как решения $f(x)$ нелинейной системы уравнений

$$f'(x) = (x - a)f(x) / (b_0 + b_1x + b_2x^2).$$

Эти плотности определяются *четырьмя* параметрами (a, b_0, b_1, b_2) . Плотности $p^*(x; a, b, \mu, \beta, \nu)$

$\mathbf{GH}$ -распределений (конструктивно задаваемых) величин $h = \mu + \beta\sigma^2 + \sigma\varepsilon$ определяются *пятью* параметрами. (Известно, что эти плотности лежат между кривыми Пирсона III и V типов.) Существенное преимущество $\mathbf{GH}$ -распределений в том, что они безгранично делимы (для распределений системы Пирсона это, вообще говоря, не так), что дает возможность строить процессы $H = (H_t)_{t \geq 0}$, адекватно описывающие временную динамику логарифмов возврата цен $S = (S_t)_{t \geq 0}$.

Применению процессов Леви в построении моделей эволюции финансовых индексов посвящена большая литература, с которой читатель может ознакомиться в (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2008; Barndorff-Nielsen, Shiryaev, 2008; Eberlein, 2001; Eberlein, Prause, 2002; Bibby, Sørensen, 2003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Bachelier L. (1900): Theorie de la Speculation // *Ann. Ecole Norm. Sup.* Vol. 17.
- Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2008): Financial Volatility in Continuous Time. Cambridge: Cambridge Univ. Press (in print).
- Barndorff-Nielsen O.E., Shiryaev A.N. (2008): Change of Time and Change of Measures. Singapore: World Science Publ. (in print).
- Bibby M., Sørensen M. (2003): Hyperbolic Processes in Finance. In: Rachev S.T. (ed.) “*Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*”. Amsterdam: Elsevier.
- Dupire B. (1994): Pricing with a Smile // *RISK*. Vol. 7.
- Eberlein E. (2001): Application of Generalized Hyperbolic Levy Motions to Finance. In: Barndorff-Nielsen O.E., Mikosch T., Resnick S. (eds.) “*Levy Processes — Theory and Applications*”. Boston: Birkhäuser.
- Eberlein E., Prause K. (2002): The Generalized Hyperbolic Model: Financial Derivatives and Risk Measures. In: Geman H. et al. “*Mathematical Finance — Bachelier Congress 2000*”. Heidelberg: Springer.
- Kendall L. (1953): The Analysis of Economic Time Series. Part 1. Prices // *J. Roy. Statist. Soc.* Vol. 96.
- Merton R. (1973): Theory of Rational Option Pricing // *Bell J. Econ. Management Science*. Vol. 7.
- Osborne M.F.M. (1959): Brownian Motion in the Stock Market // *Operation Research*. Vol. 7.
- Samuelson P.A. (1965): Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly // *Industrial Management Rev.* Vol. 6.

¹⁰Generalized Hyperbolic Levy process.