

---

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

---

### МОДЕЛЬ СТАДНОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ СПРОСА

© 2009 г. М. М. Вороновицкий

(Израиль)

Г. Беккер рассматривал пример стадного поведения потребителей, когда подавляющее количество потребителей выбирает только один из двух одинаковых по качеству и ценам товаров. В симметрической ситуации из двух подобных и находящихся рядом ресторанов часто наблюдается асимметрический выбор: один ресторан пользуется значительно большей популярностью у потребителей.

Формулируется и исследуется модель поведения коллектива потребителей для этого примера. В этой модели изменение предпочтения потребителей происходит в результате парных взаимодействий. Показано, что при равных ценах ресторанов стационарному распределению соответствует ожидаемое число потребителей, предпочитающих каждый ресторан, равное половине всех потребителей. Состояния системы, в которых почти половина потребителей предпочитает определенный ресторан, являются наиболее вероятными, т.е. при использовании потребителями локальной информации отсутствует стадное поведение потребителей.

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Часто в экономике наблюдаются ситуации, когда среди одинаковых по качеству и цене потребительских благ подавляющее большинство агентов отдадут предпочтение одному и тому же товару. Это явление противоречит теории потребительского выбора на базе цен, финансовых ограничений и функции полезности, зависящей от качественных характеристик потребительских благ. Такие явления в экономике по аналогии с живой природой называют стадным поведением потребителей.

В начале 1950-х годов Х. Лебенстейн использовал образ фургона с оркестром (bandwagon). В качестве аналога эффекта увеличения спроса на товар, вследствие того что другие тоже потребляют его, он предложил визуальный образ — фургон, полный играющих музыкантов, который сопровождает толпа (Liebenstein, 1950). Однако в экономических системах многие примеры стадного поведения невозможно объяснить только подражанием. Агенты часто извлекают дополнительную информацию об истинных качествах предлагаемых благ из наблюдения поведения других агентов. Было выявлено большое число примеров стадного поведения в экономике: распространение моды, поведение менеджеров инвестиционных компаний, поведение вкладчиков банков, участников биржевых операций, поведение экономических аналитиков и многое другое.

С начала 1990-х годов стали проводиться исследования стадного поведения в экономике с помощью математических моделей, в которых это поведение объяснялось не только подражанием и конформизмом, но и стремлением увеличить полезность выбора благодаря информации, полученной при наблюдении поведения всей массы потребителей, информации, полученной непосредственно от отдельных потребителей того же блага, или желанием учитывать так или иначе публичную информацию о товарах.

Начало исследованиям математических моделей стадного поведения на бирже положил Р. Тополь (Topol, 1991), который для теоретического объяснения наблюдаемого движения цен на фондовом рынке применил микроэкономические процессы, представляющие динамику индивидуального поведения. В своей модели он рассматривал индивидуальных инвесторов на рынке, где существует коллективное мнение. Последующие многочисленные исследования стадного поведения участников биржевых торгов предлагали другие подходы к моделированию и исследованию такого поведения на бирже, но, по нашему мнению, ни одна из работ еще не дала адекватного объяснения этому явлению. Д. Шарфштейн и Дж. Штейн (Scharfstein, Stein, 1990) предложили рассматривать поведение менеджеров на рынке инвестиций в рамках проблемы принципал–агент. В их модели на выбор менеджерами объектов инвестиций влияет их будущее положение на рынке труда: в случае удачной инвестиции положение менеджера улучшается; в случае неудачной инвестиции, которую сделали также и другие менеджеры, его положение на

рынке труда, по крайней мере, не ухудшится. В этой модели стадное поведение приводит к некоторому равновесию на рынке труда. Подобное явление наблюдалось и в случае поведения экономических аналитиков (Trueman, 1994; Ashiya, Doi, 2001; Avery, Chevalier, 1999). Стадное поведение вкладчиков банка, вероятно, появляется в так называемых нападениях на банк (Bank run). Моделированию такого поведения вкладчиков уделялось большое место в работах (Allen, Gale, 1998; Diamond, Dybvig, 1983). Но в этих работах исследования стадного поведения вкладчиков выступали в качестве вспомогательного средства при поиске механизма оптимального поведения банка в ситуации нападения на банк и решения проблемы страхования вкладов.

А. Банержи, С. Бикчандани и другие (Banerjee, 1992; Bikchandany, Hirsheifer, Welch, 1992) рассматривали модель стадного поведения, в которой каждый принимающий решение участник наблюдает за принятием решения предшествующими участниками и учитывает эти наблюдения при принятии своего решения. Предполагается, что есть некоторая фиксированная очередность в принятии решений. Авторы показывают, что участник будет, скорее, повторять действия других, чем использовать при принятии решения собственную информацию.

Простым примером стадного поведения потребителей является случай двух ресторанов, предложенный Г. Беккером (Becker, 1991). В качестве примера он взял часто наблюдаемое явление, которое позволяет искать причины стадного поведения — случай двух очень похожих ресторанов, расположенных на двух сторонах улицы. Практика показывает, что большинство потребителей предпочитают посещать какой-то один ресторан в ущерб другому, несмотря на возникающие из-за этого очереди. Г. Беккер сформулировал несколько предположений:

- потребитель получает больше удовольствия от товара, если видит, что большое число людей разделяют его вкусы;

- предпочтение потребителя зависит не только от цен, но также и от суммарного предпочтения других потребителей (спроса);

- имеется некоторая цена, при которой спрос как функция цены имеет разрыв в некоторой точке на оси цен, и в этой точке спрос падает до нуля при любом малом увеличении цены.

Для объяснения парадокса, связанного с поведением посетителей ресторанов, М.М. Вороновицкий и Ш. Мейталь (Вороновицкий, Мейталь, 2003) предложили и исследовали модель Г. Беккера.

В модели имеется два ресторана, отличающихся лишь ценами, и потребители, принимающие решения, какой ресторан предпочесть в данный момент времени. Для каждого потребителя в каждый момент времени существует вероятность выбора каждого ресторана, которая зависит не только от соотношения цен ресторанов, но и от числа потребителей, предпочитавших данный ресторан в предыдущий момент времени. Динамика распределения вероятностей (вероятностей иметь в заданный момент данное число потребителей, предпочитающих первый ресторан) описывается однородной цепью Маркова.

Если предположить, что цены ресторанов постоянны на протяжении длительного времени, то, как показано в (Вороновицкий, Мейталь, 2003), существуют стационарные распределения, и цепь Маркова сходится к стационарному распределению из любого начального распределения. Эти выводы обусловлены некоторыми предположениями о характере исходной вероятности — вероятности того, что данный потребитель выбирает в момент  $t$  первый ресторан. Если цены одного ресторана выше, чем цены другого, то имеется одно финальное стационарное предпочтение и оно глобально устойчиво (т.е. достигается из любого начального предпочтения). Если цены ресторанов примерно равны, то имеется множество финальных стационарных предпочтений. В этом случае при разных начальных предпочтениях достигаются разные финальные предпочтения. Это исследование дает ответ на заданный Г. Беккером вопрос. В (Вороновицкий, Мейталь, 2003) показано, что существуют равновесные состояния, т.е. состояния, в которых ни одному из ресторанов не выгодно менять свои цены. В таких состояниях почти все потребители предпочитают только один из двух ресторанов.

К рассматриваемой модели очень близка модель А. Кирмана (Kirman, 1993), дающая объяснение стадного поведения в живой природе. Наблюдения энтомологов показали, что коллектив муравьев в очевидно симметрических ситуациях ведет себя асимметричным образом. Сталкиваясь с двумя идентичными источниками пищи, муравьи пользуются одним значительно более интенсивно, чем другим. Кроме того, время от времени они почти все сразу переключаются с одного источника пищи на другой, от которого ранее отказывались.

Чтобы объяснять такое поведение муравьев, А. Кирман предложил простую модель. В этой модели индивидуальное поведение участников состоит в выборе источника пищи в каждый мо-

мент времени, и стохастические столкновения пар участников определяют поведение индивидов, принимающих решения. Поскольку модель Кирмана призвана объяснить поведение коллектива муравьев, а каждый муравей определяет направление движения другого муравья по запаху, исходящему от его следа, то взаимодействия в модели односторонние: первый муравей наблюдает состояние второго муравья, а второй — только предоставляет информацию. Каждый участник выбирает первый источник пищи с определенной вероятностью, изменяющейся в результате столкновений с другими участниками. Кроме выбора, который участники сделали в предшествующий момент времени, вероятность выбора для первого участника зависит от двух внешних параметров. Если характеризовать состояние модели в момент  $t$  числом участников, предпочтших в этот момент первый источник пищи, то динамика модели описывается цепью Маркова. Существует стационарное распределение вероятности того, что некоторая часть муравьев выбирает определенный источник пищи. При некоторых значениях внешних параметров это стационарное распределение соответствует наблюдаемому поведению муравьев.

Если сравнить модели Вороновицкого—Мейтала и Кирмана, то бросается в глаза различие в объеме информации, используемой участником при выборе ресторана (или источника пищи). В модели двух ресторанов участник имеет информацию о выборе, сделанном большим числом участников, наблюдая за длиной очереди в ресторан, или по количеству занятых мест, а в других случаях, например о театрах, моде и т.п. — из средств массовой информации. В модели поведения муравьев — участник обладает локальной информацией о выборе только одного участника, со следом которого он столкнулся. Возникает вопрос: можно ли говорить о стадном поведении в примере Беккера в том случае, если получение информации каждым участником происходит посредством парных взаимодействий, так как это происходит в модели Кирмана?

В этой работе будем рассматривать модель двух ресторанов Г. Беккера, но в отличие от (Вороновицкий, Мейталь, 2003) теперь модель будет подобна модели Кирмана. Потребитель не обладает информацией о выборе, сделанном большинством потребителей. Он взаимодействует с другими участниками посредством парных столкновений. В момент встречи оба потребителя сообщают друг другу, в каком ресторане обедал каждый из них накануне. Каждый потребитель может сравнить свое предпочтение и предпочтение партнера. Он формирует новое предпочтение, используя информацию о предыдущем моменте  $t - 1$  и учитывая соотношения цен ресторанов. Предполагается, что эти два потребителя в момент встречи обсуждают качества ресторанов и принимают общее решение, которое состоит в определении вероятности того, чтобы выбрать первый ресторан. Принято довольно сильное предположение о том, что после обсуждения эти вероятности одинаковы у обоих участников. Потребители в нашей модели отличаются от муравьев тем, что их встреча связана с обменом мнениями и формированием одинакового предпочтения.

В разд. 2 производится постановка модели и показывается, что существует стационарное распределение. В разд. 3 исследуются стационарные состояния цепи Маркова. Доказано, что при равных ценах ресторанов отсутствует стадное поведение. В заключительной части работы обсуждается значение полученных результатов для объяснения механизмов возникновения стадного поведения в модели Г. Беккера, а также — перспективы дальнейшего исследования вопроса о том, при каких взаимодействиях между участниками возникают довольно часто наблюдаемые парадоксы типа ресторанного парадокса Г. Беккера.

## 2. МОДЕЛЬ

Имеются два ресторана (или два товара) со сходным качеством услуг и продовольствием (или подобным качеством обоих товаров). Предположим, что в округе нет других ресторанов, расположенных достаточно близко к этому месту.

Существует некоторая популяция из  $N$  потребителей и каждый потребитель выбирает предпочитаемый им ресторан в каждый момент времени  $t$  (время — дискретно  $t = 0, 1, \dots$ ). И пусть  $k(t)$  — число потребителей, которые выбрали первый ресторан в момент времени  $t$ .

Средняя цена первого ресторана —  $v_1$ , второго ресторана —  $v_2$ . Рассмотрим  $v_1 < V$ ,  $v_2 < V$ , полагая, что если  $v_1 > V$  и  $v_2 > V$ , то потребители предпочитают не посещать оба ресторана. Если, например, только  $v_1 > V$ , то потребители не будут посещать первый ресторан при любом условии. Пусть  $w = v_2/v_1$ .

Предположим, что мнения потребителей о качествах ресторанов (физически эти качества считаем одинаковыми) распространяются только посредством обмена мнениями между потребителями (газеты, телевидение и другие средства информации, конечно, играют большую роль в

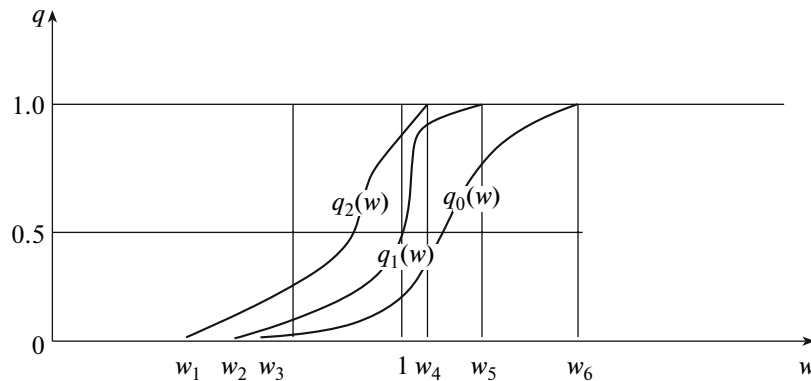


Рис. 1

процессе выбора, даже в небольших поселках, но в нашей простой модели не рассматриваются). В некоторые моменты времени образуются группы посетителей, обсуждающих качества ресторанов и тем самым формирующих предпочтения участников группы. Реально в группе могут быть одновременно два, три и более участников, кроме того, в любой момент времени качество ресторанов может обсуждаться в нескольких группах. Учет этих предположений сделает модель сложной для анализа и добавит эффекты формирования предпочтения в коллективе. Понятно, что разобраться с влиянием способа распространения информации на возникновение стадного поведения можно с помощью довольно простых моделей. Поэтому в модели предполагается, что все результаты обсуждения в группах формируются из результатов парных обсуждений и предпочтений.

Если в момент  $t$  образовались  $\tau$  пар участников, обсуждающих качества ресторанов, выявленные при посещениях одного из этих ресторанов в предыдущий момент, то без нарушения общности можно считать, что имеется  $t\tau$  моментов времени, в каждый из которых только одна пара обсуждает качества ресторанов и устанавливает предпочтения. Для удобства изложения не будем делить момент времени на  $\tau$  тактов, а будем считать каждый такт отдельным моментом времени.

В противоположность модели Кирмана наша модель симметрическая. Предположим, что в каждый момент  $t$  встречаются какие-то два потребителя. Если до этого момента они предпочитали второй ресторан (т.е. посетили его), то в момент  $t + 1$  каждый из них выбирает первый ресторан с вероятностью  $q_0(w(t))$  и второй ресторан — с вероятностью  $1 - q_0(w(t))$ .

Если оба потребителя выбрали перед столкновением (встречей) в момент  $t$  первый ресторан, то в момент  $t + 1$  каждый из них с вероятностью  $q_2(w(t))$  предпочтет первый ресторан и с вероятностью  $1 - q_2(w(t))$  — второй.

Если один потребитель перед столкновением в момент  $t$  предпочитал второй ресторан, а другой потребитель — первый ресторан, то каждый из них в момент  $t + 1$  предпочтет первый ресторан с вероятностью  $q_1(w(t))$  и второй — с вероятностью  $1 - q_1(w(t))$ .

Имеем три функции вероятности:  $q_0(w(t))$ ,  $q_1(w(t))$ ,  $q_2(w(t))$ . Очевидно, что  $q_0(w(t)) < q_1(w(t)) < q_2(w(t))$  и  $q_i(w)$  — неубывающая функция  $w$  ( $i = 0, 1, 2$ ).

Поскольку оба ресторана идентичны и все потребители также идентичны, то  $q_i(w)$  должны удовлетворить следующим условиям симметрии:

$$q_0(w) = 1 - q_2(1/w), \quad q_2(w) = 1 - q_0(1/w), \quad q_1(w) = 1 - q_1(1/w). \quad (1)$$

Из (1) для  $w = 1$  ( $v_1 = v_2$ ) имеем:

$$q_0(1) = 1 - q_2(1), \quad q_1(1) = 1 - q_1(1), \quad q_1(1) = 0.5. \quad (2)$$

Если  $v_1 \geq v_2$  (т.е.  $w \leq 1$ ), то  $q_0(w) = q_1(w) = q_2(w) = 0$ . Если  $v_1 \leq v_2$  (т.е.  $w \geq 1$ ), то  $q_0(w) = q_1(w) = q_2(w) = 1$ . На рис. 1 изображена одна из возможных зависимостей  $q_i$  от  $w$  ( $i = 0, 1, 2$ ).

Из (1) следует, что  $w_4 = 1/w_3$ ,  $w_6 = 1/w_1$ ,  $w_5 = 1/w_2$ ,  $w_3 < 1 < w_4$ .

Предположим, что цены ресторанов постоянны в течение длительного периода времени. Обозначим  $r_i(w, k)$  вероятность того, что  $k(t) = k$  при  $v_2/v_1 = w$ , где  $r_i(w, k)$  удовлетворяет равенству:

$$\sum_{k=0}^N r_i(w, k) = 1. \quad (3)$$

Пусть в момент  $t$  первый ресторан предпочитают  $k$  потребителей. Вероятность встречи двух потребителей, которые оба в момент  $t$  выбрали первый ресторан, равна  $k(k-1)/N(N-1)$ , вероятность встречи двух потребителей, которые оба предпочитают в момент  $t$  второй ресторан —  $(N-k)(N-k-1)/N(N-1)$ , а вероятность встречи двух потребителей, имеющих разные предпочтения —  $2k(N-k)/N(N-1)$ .

Обозначим через  $a_{kl}(w)$  условную вероятность, что после столкновения двух участников число потребителей, предпочитающих первый ресторан, станет равным  $l$ , если до столкновения оно равнялось  $k$ . Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} a_{k-2,k}(w) &= (N-k+2)(N-k+1)q_0^2(w) / (N(N-1)), \\ a_{k-1,k}(w) &= 2(N-k+1)[(k-1)q_1^2(w) + (N-k)q_0(w)(1-q_0(w))] / (N(N-1)), \\ a_{k,k}(w) &= [k(k-1)q_2^2(w) + 4k(N-k)q_1(w)(1-q_1(w)) + \\ &\quad + (N-k)(N-k-1)(1-q_0(w))^2] / (N(N-1)), \\ a_{k+1,k}(w) &= 2(k+1)[kq_2(w)(1-q_2(w)) + (N-k-1)(1-q_1(w))^2] / (N(N-1)), \\ a_{k+2,k}(w) &= (k+2)(k+1)(1-q_2(w))^2 / (N(N-1)), \\ a_{l,k}(w) &= 0, \text{ если } k-l > 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что  $\sum_{i=0}^N a_{ik}(w) = 1$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Это означает, что матрица  $A = \|a_{ik}(w)\|$  стохастическая. Из (1) и (4) следует, что

$$\begin{aligned} a_{k-2,k}(w) &= a_{N-k+2, N-k}(1/w); \\ a_{k-1,k}(w) &= a_{N-k+1, N-k}(1/w); \\ a_{k,k}(w) &= a_{N-k, N-k}(1/w); \\ a_{k+1,k}(w) &= a_{N-k-1, N-k}(1/w); \\ a_{k+2,k}(w) &= a_{N-k-2, N-k}(1/w). \end{aligned} \quad (5)$$

Динамика модели описывается некоторой цепью Маркова:

$$r_{t+1}(w, i) = \sum_{k=0}^N a_{i,k}(w) r_t(w, k). \quad (6)$$

Из (4) вытекает, что за исключением случая, когда  $q_0 = 0$  и  $q_2 = 1$  одновременно, все компоненты стохастической матрицы  $A^m$  положительны, по крайней мере, если  $m > N-2$ . Поэтому для любого  $w$ , если  $t \rightarrow \infty$ , то  $r_t(w, k) \rightarrow r(w, k)$ , где  $r(w, k)$  удовлетворяет равенствам:

$$\sum_{k=0}^N a_{i,k}(w) r(w, k) = r(w, i), \quad \sum_{k=0}^N r(w, k) = 1. \quad (7)$$

Итак, при данном  $w$  имеется стационарное распределение вероятностей  $r(w, k)$ , и распределение вероятностей  $r_t(w, k)$  стремится к стационарному распределению  $r(w, k)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\gamma$  некоторая малая константа. Назовем множество распределений вероятностей  $\rho(w, k)$ , удовлетворяющих при заданных  $w$  и  $\gamma$  условию

$$\max_k |\rho(w, k) - r(w, k)| \leq \gamma / (N+1),$$

$\gamma$ -окрестностью стационарного распределения вероятностей  $r(w, k)$ .

Тогда можно сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение 1.** При данном  $\gamma$  и начальном распределении вероятностей  $r_0(w, k)$  после некоторого момента времени  $T_\gamma(w, r_0(w, k))$  будет иметь место распределение вероятностей, которое будет принадлежать  $\gamma$ -окрестности стационарного распределения вероятностей  $r(w, k)$ .

Обозначим через  $K(w, r_l(w, k))$  математическое ожидание  $k$  при распределении вероятностей  $r_l(w, k)$ , т.е.

$$K(w, r(w, k)) = \sum_{k=0}^N k r_l(w, k), \quad (8)$$

а через  $K(w)$  — математическое ожидание  $k$  при стационарном распределении вероятностей  $r(w, k)$ , которое соответствует отношению цен  $w$ .

### 3. СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом разделе будем предполагать, что  $w(t) = w = \text{const}$  (т.е. что цены в ресторанах постоянны, по крайней мере в течение времени достижения распределения, близкого к стационарному). Заметим, что из (4) и (7) имеем:

$$\begin{aligned} r(w, 0) &= (1 - q_0(w))^2 r(w, 0) + \{2(1 - q_1(w))^2/N\} r(w, 1) + 2(1 - q_2(w))^2/(N(N-1)) r(w, 2); \\ r(w, 1) &= 2q_0(w)(1 - q_0(w)) r(w, 0) + \{4(q_1(w)(1 - q_1(w)))/N + (N-2)(1 - q_0(w))^2/N\} r(w, 1) + \\ &+ \{4q_2(w)(1 - q_2(w))/(N(N-1)) + (N-2)(1 - q_1(w))^2/(N(N-1))\} r(w, 2) + \\ &+ \{6(1 - q_2(w))^2/(N(N-1))\} r(w, 3). \end{aligned}$$

Если  $w \leq w_3$ , т.е.  $q_0(w) = 0$ , и при этом  $q_1(w) < 1$ , тогда из этих равенств и из (7) получаем:

$$r(w, 0) = 1, r(w, k) = 0, \text{ если } 0 < k \leq N, \quad (9)$$

а из (4) и (7) —

$$\begin{aligned} r(w, N-1) &= 6q_0^2(w)/(N(N-1)) r(w, N-3) + \{4(N-2)q_1^2(w)/(N(N-1)) + 4q_0(w)(1 - \\ &- q_0(w))/(N(N-1))\} r(w, N-2) + \{(N-2)q_2^2(w)/N + 4q_1(w)(1 - q_1(w))/N\} r(w, N-1) + \\ &+ 2q_2(w)(1 - q_2(w)) r(w, N); \end{aligned}$$

$$r(w, N) = q_2^2(w) r(w, N) + \{2q_1^2(w)/N\} r(w, N-1) + \{2q_0^2(w)/(N(N-1))\} r(w, N-2).$$

Если  $w \geq w_4$ , т.е.  $q_2(w) = 1$ , и при этом  $q_0(w) < 1$ , тогда из этих неравенств и из (7) имеем:

$$r(w, N) = 1, r(w, k) = 0, \text{ если } 0 \leq k < N. \quad (10)$$

Итак, можно сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Если  $w \leq w_3$  и  $w_3 \neq w_4$ , тогда имеется стационарное распределение вероятностей  $R_1(k)$ :  $r(w, 0) = 1, r(w, k) = 0 \forall k \neq 0$ .

Если  $w \geq w_4$  и  $w_3 \neq w_4$ , тогда — стационарное распределение вероятностей вида  $R_2(k)$ :  $r(w, N) = 1, r(w, k) = 0 \forall k \neq N$ .

Если  $w_3 < w < w_4$ , т.е.  $0 < q_0(w) \leq q_1(w) \leq q_2(w) < 1$ , тогда ситуация более сложная. Распределения вероятности  $R_1(k)$  и  $R_2(k)$  не стационарны. Но, согласно утверждению 1, при  $w_3 < w < w_4$  существуют стационарные распределения вероятностей  $r(w, k)$ , к которым с течением времени сходится текущее распределение вероятностей  $r_l(w, k)$ .

Рассмотрим частный случай одинаковых цен в ресторанах,  $w = 1$ . Как было отмечено ранее:  $q_1(1) = 0.5, q_2(1) = 1 - q_0(1)$ . Обозначим  $q_0 = q_0(1)$ . Из (2) и (5) при таких  $q_1(w), q_2(w), q_0(w)$  имеем:

$$\begin{aligned} a_{k-2,k}(1) &= a_{N-k+2,N-k}(1); \quad a_{k-1,k}(1) = a_{N-k+1,N-k}(1); \\ a_{k,k}(1) &= a_{N-k,N-k}(1); \quad a_{k+1,k}(1) = a_{N-k+1,N-k}(1); \\ a_{k+2,k}(1) &= a_{N-k-2,N-k}(1). \end{aligned} \quad (11)$$

В этом случае стационарное распределение должно быть симметричным, т.е.  $r(1, k) = r(1, N-k)$ . Из симметричности стационарного распределения следует утверждение.

**Утверждение 3.**  $K(1) = N/2$  при всех значениях  $q_0 > 0$  и  $q_2(1) = 1 - q_1(1) = 0.5$ .

То, что это математическое ожидание равно половине потребителей, вовсе не означает, что при данном взаимодействии посетителей ресторанов в случае равных цен отсутствует стадное поведение. Например, это возможно, если во всех реализациях (во все моменты времени после достижения стационарного распределения) половина потребителей предпочитает каждый ресторан. Наряду с этим возможно, что в половине реализаций все потребители предпочитают первый ресторан, тогда как в другой половине реализаций все потребители предпочитают второй ресторан.

Заметим, что в случае  $q_0 = q_1 = q_2 = 0.5$  имеем  $r(1, k) = \{N!/(k!(N-k)!)\}(1/2)^N$ . Эта симметричная относительно  $k = N/2$  функция возрастает при увеличении  $k$  до  $k < N/2$ . В другом случае при  $q_0 = 0$ ,  $q_1 = 0.5$ ,  $q_2 = 1$  имеем  $r(1, 0) = r(1, N) = 0.5$ ,  $r(1, k) = 0$  для  $k \neq 0$  и  $k \neq N$ . Эта симметричная относительно  $k = N/2$  функция  $r(1, 1) > r(1, 0)$  при условии, что  $q_0(1 - q_0) > 1/(4N)$  сосредоточена только в двух точках  $k = 0$  и  $k = N$ .

Для других значений  $q_0$  воспользуемся тем, что рассматриваемый нами симметрический процесс установления стационарного распределения  $r(1, k)$  является обратимым; поэтому:

$$\begin{aligned} r(1, k)(a_{k,k+1} + a_{k,k+2}) &= r(1, k+1)a_{k+1,k} + r(1, k+2)a_{k+2,k}, \\ r(1, k)(a_{k,k-1} + a_{k,k-2}) &= r(1, k-1)a_{k-1,k} + r(1, k-2)a_{k-2,k}. \end{aligned} \quad (12)$$

В частности, для  $k = 1$  имеем  $r(1, 1)a_{1,0} = r(1, 0)a_{0,1}$ . Из (4) при  $q_1 = 0.5$  и  $q_2 = 1 - q_0$  получим

$$r(1, 1) = \begin{cases} > r(1, 0), & \text{если } q_0(1 - q_0) > 1/(4N); \\ = r(1, 0), & \text{если } q_0(1 - q_0) = 1/(4N); \\ < r(1, 0), & \text{если } q_0(1 - q_0) < 1/(4N). \end{cases}$$

Предположим, что  $r(1, k+1) > r(1, k)$ . Используя это предположение и второе из равенств (12), можно установить, что

$$r(1, k+1)(a_{k,k+1} + a_{k,k+2}) > r(1, k+1)a_{k+1,k} + r(1, k+2)a_{k+2,k},$$

т.е.

$$r(1, k+2)/r(1, k+1) < a_{k,k+2}/(a_{k+1,k} + a_{k+2,k} - a_{k,k+1}).$$

Подставляя в это выражение значения из (4), при  $q_1 = 0.5$  и  $q_2 = 1 - q_0$  получаем, что при  $k < (N-1)/2$  будет  $r(1, k+2)/r(1, k+1) < 1$ . Таким образом, для  $k < (N+1)/2$  с ростом  $k$  функция

$$r(1, k) = \begin{cases} \text{возрастает,} & \text{если } q_0(1 - q_0) > 1/(4N); \\ \text{постоянна,} & \text{если } q_0(1 - q_0) = 1/(4N); \\ \text{падает,} & \text{если } q_0(1 - q_0) < 1/(4N), \end{cases}$$

а для  $k > (N+1)/2$  свойства распределения  $r(1, k)$  асимметричны:

$$r(1, k) = \begin{cases} \text{падает,} & \text{если } q_0(1 - q_0) > 1/(4N); \\ \text{постоянна,} & \text{если } q_0(1 - q_0) = 1/(4N); \\ \text{возрастает,} & \text{если } q_0(1 - q_0) < 1/(4N). \end{cases}$$

Доказательство проводится аналогичным способом, только в этом случае нужно использовать функции  $r(1, N)$ ,  $r(1, N-1)$  и первое равенство из выражения (12).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 4.** При  $q_0(1 - q_0) < 1/(4N)$  стационарная функция распределения  $r(1, k)$  имеет максимум при  $k = N/2$ , при этом с ростом  $k$  она возрастает при  $k < N/2$  и убывает при  $k > N/2$ . При  $q_0(1 - q_0) < 1/(4N)$ , наоборот, стационарная функция распределения  $r(1, k)$  имеет минимум при  $k = N/2$ , при этом с ростом  $k$  она убывает при  $k < N/2$  и возрастает при  $k > N/2$ . При  $q_0(1 - q_0) = 1/(4N)$  стационарное распределение оказывается равномерным.

Используя матрицу перехода марковской цепи, можем численно рассчитать функции  $r(1, k)$  для довольно больших значений  $N$  от 20 до 10000. На рис. 2 показаны функции  $r(1, k)$  для случая  $q_0(1 - q_0) > 1/(4N)$ , а на рис. 3 — функции  $r(1, k)$  для случая  $q_0(1 - q_0) < 1/(4N)$ .

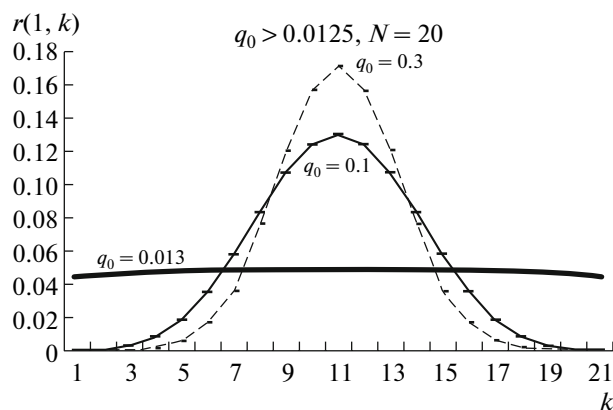


Рис. 2.

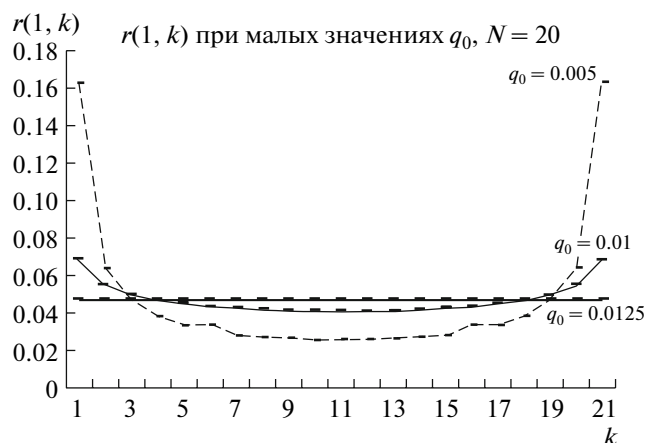


Рис. 3.

При равных ценах в ресторанах ( $w = 1$ ) имеем  $K(1) = N/2$ , т.е. ожидаемое число потребителей, выбравших первый ресторан, равно ожидаемому числу потребителей, выбравших второй ресторан. Но это не означает отсутствия стадного поведения, ситуация определяется вероятностью выбора в данный момент первого ресторана двумя потребителями, побывавшими в нем же накануне —  $q_0$ . Когда  $q_0(1 - q_0) > 1/(4N)$ , максимум распределения  $r(1, k)$  достигается при  $k = N/2$ , при этом при больших, но меньших 0.5 значениях  $q_0$  этот максимум сильно выражен. Поэтому наиболее вероятными будут случаи, в которых почти половина потребителей предпочитают первый ресторан и почти половина потребителей предпочитают второй ресторан. Таким образом, при  $q_0(1 - q_0) > 1/(4N)$  нельзя говорить, что имеет место стадное поведение.

Когда  $q_0(1 - q_0) < 1/(4N)$  при том же ожидаемом числе потребителей, предпочитающих первый ресторан ( $N/2$ ), вид распределения иной. Например, при  $q_0$ , близком к нулю, в половине испытаний почти все потребители предпочитают первый ресторан, а в другой половине испытаний почти все потребители предпочитают второй ресторан. В этих условиях можно говорить о стадном поведении потребителей.

Следует иметь в виду, что с ростом  $N$  интервал значений  $q_0$ , на котором выполняется условие  $q_0(1 - q_0) < 1/(4N)$ , стягивается в точку  $q_0 = 0$ ,  $q_2 = 1$  ( $w_3 = w_4$ ). Но при этом, если два потребителя, посетивших накануне первый ресторан, почти с единичной вероятностью идут во второй, а два потребителя, посетивших накануне второй ресторан, почти с единичной вероятностью идут в первый ресторан, такая ситуация представляется несколько абсурдной.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во введении к данной работе был задан вопрос о возможности парадокса Беккера в соответствующей модели, когда участники взаимодействуют посредством парных столкновений и цены ресторанов тождественны. В разд. 3 показано, что в этом случае математическое ожидание числа потребителей, выбирающих после некоторого времени первый ресторан, почти равно математическому ожиданию числа потребителей, выбравших в этот же момент времени второй ресторан. Более того, финальная вероятность того, что в каждый ресторан пойдет почти половина всех потребителей, оказывается в этом случае максимальной и, следовательно, финальная вероятность того, что почти все потребители предпочтут только один из ресторанов, крайне мала. Это означает отсутствие явления стадного поведения.

Таким образом, парные взаимодействия потребителей, по крайней мере включенные в нашу модель, не приводят к асимметричному равновесию. Если принять это во внимание, то кажется вероятным, что в результате парных взаимодействий потребители получают информации слишком мало для того, чтобы в их коллективе возникло стадное поведение.

В случае двух ресторанов, находящихся недалеко друг от друга, потребители всегда могут оценить очереди или степень заполнения каждого ресторана. Поэтому модель из (Вороновицкий, Мейталь, 2003) более соответствует реальности.

Впрочем, существуют также ситуации, например потребление слабо рекламируемых, но подобных товаров, когда информация распространяется среди потребителей посредством парных

обменов, и в конечном итоге равновесию соответствуют близкие цены товаров и почти равный спрос на каждый из них.

Может быть, причиной отсутствия в нашей модели стадного поведения, такого как описано в модели (Вороновицкий, Мейталь, 2003), является отсутствие при формировании предпочтения потребителя инерции (присутствующей в модели Кирмана). Однако, возможно, стадное поведение возникает большей частью при наличии общего для всей системы центра распространения информации о спросе, такого как реклама, мода или что-то подобное. Может оказаться, что в формировании стадного поведения играют роль оба фактора, но для выяснения этого вопроса необходимы дальнейшие исследования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Вороновицкий М.М., Мейталь Ш.** (2003): Модель социального влияния на цены // *Экономика и мат. методы*. Вып. 39. № 4.
- Allen F., Gale D.** (1998): Optimal Financial Crises // *J. of Finance*. Vol. 53.
- Ashiya M., Doi T.** (2001): Herd Behavior of Japanese Economists // *J. of Econ. Behavior and Organization*. Vol. 46.
- Avery C.N., Chevalier J.A.** (1999): Herding over the Career // *Econ. Letters*. Vol. 63.
- Banerjee A.V.** (1992): A simple Model of Herd Behavior // *The Quarterly J. of Econ.* Vol. CVII. August.
- Becker G.S.** (1991): A Note on Restaurant Pricing and Other Example on Social Influence on Price // *J. of Polit. Econ.* Vol. XCIX.
- Bikhandany S., Hirsheifer D., Welch I.** (1992): A Theory of Fads, Fashion, Custom, and Cultural Change as Information Cascades // *J. of Polit. Econ.* Vol. 100. № 5.
- Diamond D.W., Dybvig P.** (1983): Bank Runs, Deposit Insurance and Liquidity // *J. of Polit. Econ.* Vol. 91.
- Kirman A.** (1993): Ants, Rationality and Recruitment // *Quarterly J. of Econ.* Feb.
- Liebenstein H.** (1950): Bandwagon, Snoband, Veblen Effect in the Theory of Consumer Demand // *Quarterly J. of Econ.* May.
- Scharfsein D.S., Stein J.C.** (1990): Herd Behavior and Investment // *American Econ. Rev.* Vol. 80(3).
- Topol R.** (1991): Bubbles and Volability of Stock Prices: Effect of Mimetic Contagion // *The Econ. J.* Vol. 102. July.
- Trueman B.** (1994): Analyst Forecast and Herding Behavior // *The Rev. of Financial Stud.* Vol. 7. № 1.

Поступила в редакцию  
27.03.2008 г.

## The Model of the Social Interaction at Forming Demand

M. M. Voronovitsky

The simple example of herd behavior when most of consumers choose one from two restaurants similar in qualities and prices of goods, was considered by G. Becker. Asymmetric choice of consumers is observable in the symmetric situation, which consisted in two similar and located near each other restaurant: one of restaurants is often more popular for consumers. The model of behavior of consumers in the example is formulated and investigated in this paper. The change of consumer's preference occurs in this model as a result of interactions of a pair of consumers. It is shown, that expected number of consumers preferring each restaurant, which equals a half of all consumers, corresponds to stationary distribution in case of equal prices in the restaurants. The state of the system, in which half of consumers prefers each restaurant, is most probable. This means absence of herd behavior for consumers at described use by consumer of local information.