ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2009, том 45, № 2, с. 85–95

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

"АНАТОМИЯ" ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ: ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ МЕНЮ И ВЫБОР НАИЛУЧШЕЙ ТЕХНОЛОГИИ

© 2009 г. В. Д. Матвеенко

(Санкт-Петербург)

Исследуется представление "глобальной" производственной функции как максимума локальных производственных функций при выборе технологических коэффициентов из заданного множества (технологического меню). Показано, что такое представление имеет место, если технологическое меню является опорным множеством глобальной производственной функции. Подробно рассмотрено представление в такой форме глобальных производственных функций Кобба–Дугласа и *CES*.

1. ВВЕДЕНИЕ

Последнее десятилетие иногда называют периодом "неоклассического возрождения" (например (Klenow, Rodriguez-Clare, 1997; Klump et al., 2004)) ввиду всплеска интереса к неоклассической теории экономического роста и, в частности, к понятию производственной функции. Появилось немало публикаций, посвященных двум классам производственных функций, чаще всего используемых в макроэкономических исследованиях: функциям Кобба–Дугласа и *CES*[1].

Значительная часть этих публикаций связана с эконометрическим оцениванием эластичности замещения. Согласно ряду эмпирических исследований (например (Antrás, 2004)), эластичность замещения факторов оказывается существенно меньше единицы, поэтому многие авторы предпочитают в качестве производственной функции брать *CES*-функцию с эластичностью замещения из интервала (0, 1) (например (Klump et al., 2004)). Однако Дж. Даффи и Х. Папагеоргиу (Duffy, Papageorgiou, 2000) на основе панельной выборки из 82 стран за период 28 лет пришли к иному выводу: эластичность замещения превышает 1. Отвергая случай Кобба–Дугласа по всей выборке, они, однако, заметили, что труд и капитал являются более взаимозаменяемыми ресурсами в промышленно развитых странах, чем в развивающихся. В то же время в (Jalava et al., 2006) авторы, производя оценивание производственной функции для Финляндии, приходят к выводу, что функция Кобба–Дугласа не может быть отвергнута, если речь идет о большом промежутке времени (100 лет).

Такой разброс в эмпирических результатах лишь подчеркивает необходимость дальнейших исследований по теории производственных функций. В литературе последних лет активно обсуждается вопрос о микрооснованиях, приводящих к основным классам производственных функций. Ряд авторов считают, что производственная функция (получившая в работах последних лет атрибут "глобальная") не является первичным экономическим объектом, а представляет собой результат выбора среди "локальных" технологий.

Так, в работах (Абасов, Рубинов, 1995; Matveenko, 1997; Rubinov, Glover, 1998) показано, что всякая (глобальная) n-факторная производственная функция $F(x)$ с постоянной отдачей от масштаба (constant returns to scale, *CRS*) может быть представлена как оптимальный выбор среди (локальных) леонтьевских технологий:

$$F(x) = \max_{l \in \Lambda_F} \min_{i=1,..,n} l_i x_i.$$

Здесь Λ_F – некоторое множество наборов $l = (l_1,\ldots,l_n)$ леонтьевских технологических коэффициентов. Множество Λ_F взаимно однозначно соответствует производственной функции F, в некотором смысле является ее опорным множеством.

[1] Напомним, что имеются три класса производственных функций с постоянной эластичностью замещения: функция Кобба–Дугласа (эластичность замещения $\sigma = 1$), функция Леонтьева ($\sigma = 0$) и *CES*-функция ($\sigma \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$) (например (Ашманов, 1984; Клейнер, 1986)).

Позднее Ч. Джонс (Jones, 2005) указал аналогичное представление двухфакторной производственной функции с *CRS*:

$$F(K,L,N) = \max_{a,b:H(a,b)=N} \tilde{F}(bK,aL).$$

Здесь, в терминологии Джонса, F – глобальная производственная функция; $\tilde{F}$ – локальная производственная функция, которая имеет эластичность замещения меньше единицы[2]; N – параметр, характеризующий доступные технологии; множество $\{(a,b) : H(a,b) = N\}$ – технологическое меню, из которого выбираются технологические параметры локальной производственной функции. (Джонс предполагает выполнение некоторых геометрических свойств локальной производственной функции, но не специфицирует ее аналитическую форму.)

Джонс заметил, что, когда технологическое меню имеет вид

$$H(a,b) = a^{\alpha}b^{\beta} = N, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \tag{1}$$

построенная по этому технологическому меню глобальная производственная функция F оказывается функцией Кобба–Дугласа

$$F(K,L,N) = N^{1/(\alpha+\beta)}K^{\beta/(\alpha+\beta)}L^{\alpha/(\alpha+\beta)}. \tag{2}$$

Возникает вопрос: почему так происходит? Означает ли результат (Jones, 2005), что функция Кобба–Дугласа обладает неким уникальным свойством, выгодно отличающим ее, например, от *CES*-функции?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно понять "генетическую" связь технологического меню (1) с функцией Кобба–Дугласа (2). Покажем, что (1) представляет собой не что иное, как опорное множество Λ_F функции (2), поэтому вполне естественно, что технологическое меню (1) ведет к функции Кобба–Дугласа (2). Если же выбрать в качестве технологического меню опорное множество *CES*-функции, то оно столь же естественно приведет к *CES*-функции.

Кроме того, в (Jones, 2005) предлагаются микрооснования, использующие вероятностное распределение Парето ("модель идей") и приводящие к технологическому меню (1), соответствующему функции Кобба–Дугласа. В данной статье мы будем обсуждать эти микрооснования и предложим аналогичные микрооснования, приводящие к технологическому меню, соответствующему *CES*-функции. Другая попытка модифицировать "модель идей" сделана недавно в (Growiec, 2008).

Ниже будет показано, что по-прежнему сохраняется своеобразный паритет между производственными функциями Кобба–Дугласа и *CES*. Другой подход используется в (Acemoglu, 2003), где также строятся микрооснования производственной функции, приводящие на большом промежутке времени к *CES*-функции.

2. Опорное множество глобальной производственной функции: случай локальных функций Леонтьева

Будем рассматривать класс (производственных) функций, обладающих следующими свойствами: функции определены в пространстве R^n_{++}, состоящем из всевозможных n-мерных векторов со строго положительными элементами и начала координат[3], они принимают неотрицательные значения, непрерывны, возрастают и обладают *CRS*, т.е. являются положительно однородными первой степени.

Для n-мерных векторов $x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n)$ будем использовать обозначения:

1) $x \geq y$, если $x_i \geq y_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$,

2) $x > y$, если $x \geq y$ и $x \neq y$,

3) $x >> y$, если $x_i > y_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

[2] Напомним, что эластичность замещения функции Леонтьева равна нулю.

[3] Тем самым, не сужая класса функций, исключаем из рассмотрения точки координатных осей (в 2-мерном случае) или плоскостей.

Функция f называется возрастающей, если из $x \geq y$ следует, что $f(x) \geq f(y)$. Функция f называется строго возрастающей, если из $x > y$ следует, что $f(x) > f(y)$.

Пусть задана “глобальная” производственная функция $F(x)$; ее поверхность единичного уровня – множество $M_F = \{x : F(x) = 1\}$. Пусть задана также некоторая “локальная” функция $\phi(l, x)$ двух n-мерных векторов $l \gg 0$, $x \gg 0$, обладающая CRS по x. Далее для каждого из рассматриваемых случаев по вектору x будет определен вектор x^-, служащий решением уравнения $\phi(x^-, x) = 1$.

Множество

$$\Lambda_F = \{l : l = x^-,\ x \in M_F\} \tag{3}$$

будем называть *опорным множеством функции F.*

В частности, пусть $\phi(l, x)$ – функция Леонтьева

$$\phi(l, x) = \min_{i=1,\ldots,n} l_i x_i.$$

Определим вектор x^- как

$$x^- = x^{-1} = (x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ – n-факторная “глобальная” производственная функция, $\phi(l, x)$ – “локальная” функция Леонтьева, Λ_F – опорное множество функции F, которое определено согласно* (3), (4). *Тогда*

$$F(x) = \max_{l\in\Lambda_F} \min_{i=1,\ldots,n} l_i x_i = \min_{l\in\Lambda_F} \max_{i=1,\ldots,n} l_i x_i, \quad x \in R^n_{++}. \tag{5}$$

Доказательство приводится в Приложении.

Представление (5) интересно как с математической, так и с экономической точки зрения. Математический комментарий к теореме 1 дается в Приложении – там показано, что теорема 1 является аналогом известных в выпуклом анализе и математической экономике теорем о представлении суперлинейной и сублинейной функций.

Экономический смысл равенств (5) поясним на примере двухфакторной производственной функции $F(K, L)$, когда (5) принимает вид

$$F(K, L) = \max_{(b,a)\in\Lambda_F} \min\{bK, aL\} = \min_{(b,a)\in\Lambda_F} \max\{bK, aL\}. \tag{6}$$

Функция Леонтьева $\min\{bK, aL\}$, как хорошо известно, показывает гарантированные возможности производства при имеющихся производственных ресурсах K, L (т.е. максимально возможный выпуск при ресурсных ограничениях).

Функция $\max\{bK, aL\}$ определяет потенциальные возможности “открытой экономики” при условии, что хотя бы один используемый фактор не превышает имеющегося ресурса. (Например, представим себе ситуацию, когда при изменении относительной цены ресурсов можно, продав небольшое количество относительно подорожавшего ресурса, приобрести значительное количество относительно подешевевшего ресурса и в результате увеличить выпуск.)

Равенство (6) означает, что при наличии ресурсов K, L из технологического меню Λ_F выбирается технология с наилучшими гарантированными возможностями; она же является одновременно и технологией с наихудшими потенциальными возможностями.

Иллюстрацией равенства (6) служит рисунок, где изображено технологическое меню Λ_F для функции Кобба–Дугласа. Вектор ресурсов (K, L) фиксирован. На рисунке *а* стрелками показаны направления увеличения величины $\min\{bK, aL\}$ при выборе технологии из технологического меню Λ_F (точка A является точкой $\arg\max_{(a,b)\in\Lambda_F} \min\{bK, aL\}$), а на рисунке *б* – направления увели-

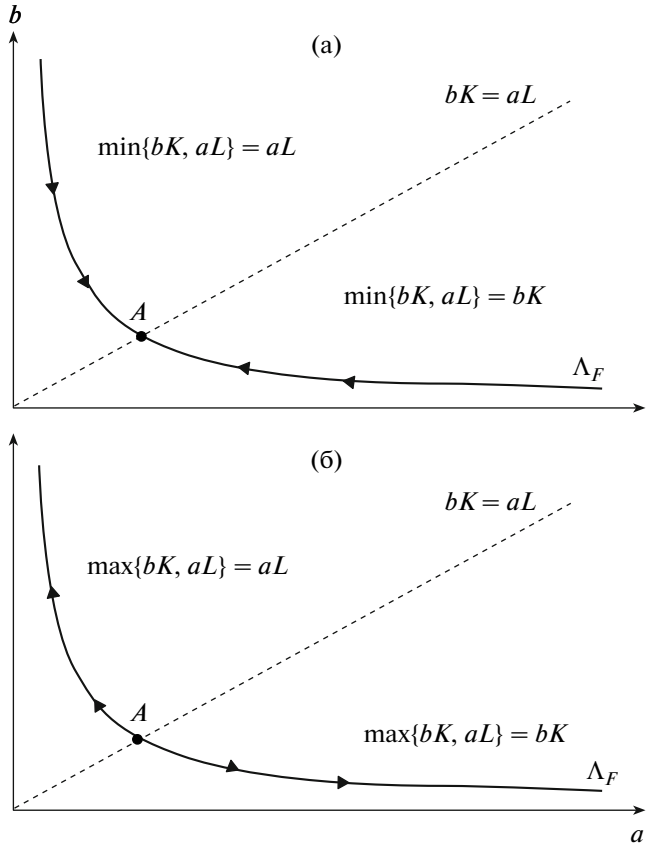

Рисунок.

чения $\max\{bK, aL\}$ (точка A является точкой $\arg\min\limits_{(b,a)\in\Lambda_F} \max\{bK, aL\}$).

В общем n-мерном случае

$$\arg\max_{l\in\Lambda_F}\min_{i=1,\ldots,n} l_i x_i = \arg\min_{l\in\Lambda_F}\max_{i=1,\ldots,n} l_i x_i = F(x)x^{-1}.$$

3. ОПОРНЫЕ МНОЖЕСТВА ФУНКЦИИ КОББА–ДУГЛАСА И *CES*-ФУНКЦИИ: СЛУЧАЙ ЛОКАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕОНТЬЕВА

Продолжим рассматривать случай локальных функций Леонтьева и вычислим опорные множества для основных двухфакторных "глобальных" производственных функций – функции Кобба–Дугласа и *CES*-функции. Когда в качестве технологического меню взято опорное множество, оптимальный выбор локальной леонтьевской технологии из этого меню, в силу теоремы 1, приводит к соответствующей глобальной производственной функции.

Для функции Кобба–Дугласа

$$F(K, L, \bar{N}) = \bar{N}K^{\bar{\beta}}L^{\bar{\alpha}},\ \ \bar{\alpha}+\bar{\beta}=1,\ \ \ 0<\bar{\alpha}<1, \quad (7)$$

множество единичного уровня представляет собой

$$M_F = \{(K, L) : \bar{N}K^{\bar{\beta}}L^{\bar{\alpha}} = 1\},$$

соответственно, опорное множество равно

$$\Lambda_F = \{(a,b) : \bar{N}b^{-\bar{\beta}}a^{-\bar{\alpha}} = 1\} = \{(a,b) : b^{\bar{\beta}}a^{\bar{\alpha}} = \bar{N}\}. \quad (8)$$

С другой стороны, технологическое меню (1) можно представить в виде

$$\left\{(a,b) : a^{\alpha/(\alpha+\beta)}b^{\beta/(\alpha+\beta)} = N^{1/(\alpha+\beta)}\right\}. \quad (9)$$

Сравнивая множества (8) и (9), заключаем, что технологическое меню (1) представляет собой опорное множество функции Кобба–Дугласа (7) при

$$\bar{N} = N^{1/(\alpha+\beta)},\ \ \bar{\alpha} = \alpha/(\alpha+\beta),\ \ \bar{\beta} = \beta/(\alpha+\beta),$$

т.е. опорное множество функции (2).

Найдем теперь технологическое меню, приводящее к глобальной *CES*-функции

$$F(K,L,N) = N\left[AL^{-r} + BK^{-r}\right]^{-1/r}$$

с параметрами $A,\ B > 0,\ r \geq -1,\ r \neq 0$. Множеством единичного уровня для этой производственной функции является

$$M_F = \{(K,\ L) : AL^{-r} + BK^{-\gamma} = N^r\}.$$

Отсюда находим опорное множество

$$\Lambda_F = \{(b,\ a) : Aa^r + Bb^r = N^r\} = \{(b,a) : (Aa^r + Bb^r)^{1/r} = N\}.$$

Согласно теореме 1, соответствующее технологическое меню приводит к производственной функции *CES*.

4. ОПОРНЫЕ МНОЖЕСТВА: СЛУЧАЙ ЛОКАЛЬНЫХ *CES*-ФУНКЦИЙ

Теорема 1 относится к случаю локальных функций Леонтьева. В этом разделе аналогичные результаты будут получены для случая, когда локальной производственной функцией является *CES*-функция

$$\phi(l, x) = (l_1 x_1^p + \ldots + l_n x_n^p)^{1/p}, \tag{10}$$

где $p < 0$ – фиксированный параметр. В качестве глобальной производственной функции будем рассматривать сначала *CES*-функцию, а затем функцию Кобба–Дугласа.

4.1. Найдем технологическое меню, приводящее к глобальной производственной *CES*-функции

$$F(x) = (a_1 x_1^q + \ldots + a_n x_n^q)^{1/q}, \quad p < q < 0. \tag{11}$$

Для всякого n-мерного вектора $x \gg 0$ определим вектор x^- следующим образом:

$$x_i^- = a_i x_i^{q-p}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Тогда $\phi(x^-, x) = F(x) = 1$ при всех $x \in M_F$.

Опорное множество Λ_F можно представить в виде:

$$\Lambda_F = \{l : l_i = a_i x_i^{q-p}, \quad x \in M_F\} = \left\{l : \sum_{i=1}^n a_i a_i^{-q/(q-p)} l_i^{q/(q-p)} = 1\right\} =$$

$$= \left\{l : \sum_{i=1}^n a_i^{-p/(q-p)} l_i^{q/(q-p)} = 1\right\},$$

т.е.

$$\Lambda_F = \{l : \sum_{i=1}^n l_i^\alpha a_i^{1-\alpha} = 1\}, \tag{12}$$

где $\alpha = q/(q-p) < 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\phi(l, x)$ *– локальная производственная функция вида* (10)*, а технологическое меню имеет вид* (12)*, где* $\alpha < 0$. *Тогда глобальная производственная функция*

$$F(x) = \max_{l \in \Lambda_F} \phi(l, x), \; x \gg 0$$

имеет вид (11)*, где* $q = \alpha p/(\alpha - 1)$.

Доказательство приводится в Приложении.

4.2. Теперь найдем технологическое меню, приводящее к глобальной производственной функции Кобба–Дугласа:

$$F(x) = A x_1^{\theta_1} \ldots x_n^{\theta_n}, \quad \theta_1 + \ldots + \theta_n = 1, \quad \theta_i \in (0,1), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{13}$$

Для каждого n-мерного вектора $x \gg 0$ определим вектор x^- следующим образом:

$$x_i^- = \theta_i x_i^{-p}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Тогда $\phi(x^-, x) = F(x) = 1$ при всех $x \in M_F$.

Опорное множество Λ_F имеет вид:

$$\Lambda_F = \{l : x_i = l_i^{-1/p} \theta_i^{1/p} = 1, \quad i = 1,\ldots,n, \quad x \in M_F\} =$$

$$= \left\{ l : A\left(l_1^{-1/p}\theta_1^{1/p}\right)^{\theta_1} \ldots \left(l_n^{-1/p}\theta_n^{1/p}\right)^{\theta_n} = 1 \right\} = \left\{ l : A^p l_1^{-\theta_1} \ldots l_n^{-\theta_n}\ \theta_1^{\theta_1} \ldots \theta_n^{\theta_n} = 1 \right\},$$

т.е.

$$\Lambda_F = \{ l : l_1^{\theta_1} \ldots l_n^{\theta_n} = B \}, \tag{14}$$

где $B = A^p \theta_1^{\theta_1} \ldots \theta_n^{\theta_n}$.

Теорема 3. *Пусть* $\phi(l, x)$ *– локальная производственная функция вида* (10)*, технологическое меню имеет вид* (14)*, где* $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$. *Тогда глобальная производственная функция* $F(x) = \max\limits_{l \in \Lambda_F} \phi(l, x)$, $x \gg 0$, *имеет вид* (13)*, где* $A = B^{1/p} \theta_1^{-\theta_1/p} \ldots \theta_n^{-\theta_n/p}$.

Доказательство приводится в Приложении.

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть случай, когда локальная производственная функция Кобба–Дугласа приводит к глобальной *CES*-функции с эластичностью замещения $\sigma > 1$.

5. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО МЕНЮ: МОДЕЛЬ ИДЕЙ

В качестве возможного объяснения происхождения технологического меню в случае локальной функции Леонтьева в (Jones, 2005) предлагается модель технологических идей. Леонтьевские технологии (идеи) возникают случайным образом, их множество описывается вероятностными распределениями Парето[4]. Следствием этой модели оказывается технологическое меню (1), приводящее к функции Кобба–Дугласа. Далее модифицируем модель идей таким образом, что она будет приводить к *CES*-функции. Другая модификация модели идей предложена в (Growiec, 2008).

Идея i состоит в возможности использования леонтьевских технологических коэффициентов a_i, b_i (эти коэффициенты в (Jones, 2005) возникают (вместе с идеей) случайным образом и при этом независимы). Параметры a_i, b_i описываются независимыми распределениями Парето

$$P\{a_i \le a\} = 1 - (a / \gamma_a)^{-\alpha}, \quad P\{b_i \le b\} = 1 - (b / \gamma_b)^{-\beta},$$

где $a \ge \gamma_a > 0$, $b \ge \gamma_b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 1$; на основе этих независимых распределений строится общее распределение

$$G_1(b,a) = P\{b_i > b,\ a_i > a\} = (b / \gamma_b)^{-\beta} (a / \gamma_a)^{-\alpha}.$$

Однако совершенно неясно, почему при появлении идей технологические коэффициенты a_i, b_i независимы. Сделаем иное предположение: каждая идея состоит в совместном выборе технологических коэффициентов a_i, b_i. В таком случае в качестве простейшей модели можно рассматривать совместное вероятностное распределение, которое также основано на распределении Парето:

$$G_2(b,a) = P\{b_i > b,\ a_i > a\} = \left[\lambda (b / \gamma_b)^{-h} + (1-\lambda)(a / \gamma_a)^{-h} \right]^s,$$

где $a \ge \gamma_a > 0$, $b \ge \gamma_b > 0$, $0 < \lambda < 1$, $h > 0$, $hs > 1$.

Заметим, что функции G_1, G_2 имеют похожие свойства, более того, при $h \to 0$, $hs = \text{const} > 1$ имеет место сходимость $G_2(b, a) \to G_1(b, a)$, где параметры функций G_1, G_2 связаны равенствами $\beta = \lambda hs$, $\alpha = (1 - \lambda) hs$.

[4] Ранее модель с распределением Парето и функцией Леонтьева рассматривалась в (Houthakker, 1955–1956). Там результирующая производственная функция имеет убывающую отдачу от масштаба.

В случае распределения G_2

$$H(\tilde{y}) = P\{Y_i > \tilde{y}\} = P\{b_i K > \tilde{y},\ a_i L > \tilde{y}\} = \tilde{y}^{-hs}\left[\lambda(K\gamma_b)^h + (1-\lambda)(L\gamma_a)^h\right]^s.$$

При наличии N идей

$$P\{Y \le \tilde{y}\} = (1 - H(\tilde{y}))^N = \left[1 - \tilde{y}^{-hs}\left[\lambda(K\gamma_b)^h + (1-\lambda)(L\gamma_a)^h\right]^s\right]^N,$$

используя нормализацию

$$z_N = \left[\lambda(K\gamma_b)^h + (1-\lambda)(L\gamma_a)^h\right]^{1/h} N^{1/hs},$$

получаем

$$P\{Y \le z_N\tilde{y}\} = \left[1 - (z_N\tilde{y})^{-hs}\left[\lambda(K\gamma_b)^h + (1-\lambda)(L\gamma_a)^h\right]^s\right]^N =$$

$$= \left(1 - \tilde{y}^{-hs} / N\right)^N \to \exp(-\tilde{y}^{-hs}), \quad \tilde{y} > 0.$$

Таким образом, в случае функции G_2, как и в случае функции G_1, при больших N имеем, что $Y \approx z_N\varepsilon$, где ε – случайная величина, которая описывается распределением Фреше[5]. Иными словами, когда число идей стремится к бесконечности, приходим к производственной функции *CES*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Доказательство теоремы 1. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Если* $F(x)$ – *возрастающая функция однородная степени* $\alpha > 1$, *то для любых* $x \in M_F,\ l \in \Lambda_F$,

$$\min_{i=1,\dots,n} l_i x_i \le F(x) = 1 \le \max_{i=1,\dots,n} l_i x_i.$$

Если $F(x)$ – *строго возрастающая функция*, *то для любых* $x \in M_F,\ l \in \Lambda_F,\ l \ne x^{-1}$

$$\min_{i=1,\dots,n} l_i x_i < F(x) = 1 < \max l_i x_i.$$

Доказательство.

1. Пусть $x \in M_F$. Докажем, что $\min\limits_{i=1,\dots,n} l_i x_i \le 1$ для любого $l \in \Lambda_F$. Предположим противное: $\min\limits_{i=1,\dots,n} l_i x_i > 1$ для некоторого $l \in \Lambda_F$. Тогда $l_i x_i > 1,\ \ i = 1,\dots,n$, и, значит, $x \gg l^{-1}$. Можно подобрать такое число $\lambda > 1$, что $x \gg \lambda l^{-1}$. Тогда $F(x) \ge F(\lambda l^{-1}) = \lambda^{\alpha} F(l^{-1}) > F(l^{-1})$, что противоречит $x, l^{-1} \in M_F$. Неравенство $1 \le \max\limits_{i=1,\dots,n} l_i x_i$ доказывается аналогично.

2. Пусть $x \in M_F$. Покажем, что $\min\limits_{i=1,\dots,n} l_i x_i < 1$ при $l \in \Lambda_F,\ l \ne x^{-1}$. Предположим противное: $\min\limits_{i=1,\dots,n} y_i^{-1} x_i \ge 1$ для некоторого $y \in M_F,\ y \ne x$. Тогда $x_i \ge y_i,\ \ i = 1,\dots,n$, и, значит, $x > y$. Следовательно, $F(x) > F(y)$, что противоречит $x, y \in M_F$. Неравенство $1 < \max\limits_{i=1,\dots,n} l_i x_i$ доказывается аналогично.

[5] По поводу распределения Фреше см. (Jones, 2005).

Доказательство теоремы 1. Всякий вектор $x \in R^n_{++}$ можно представить в виде $x = F(x)\bar{x}$, где $\bar{x} \in M_F$. Для любого $l \in \Lambda_F$ из леммы следует, что

$$\min_{i=1,\dots,n} l_i x_i \le F(\bar{x}) = 1.$$

Отсюда

$$\min_{i=1,\dots,n} l_i x_i = F(x) \min_{i=1,\dots,n} l_i \bar{x}_i \le F(x), \quad l \in \Lambda_F, \quad \min_{i=1,\dots,n} \bar{x}_i^{-1} x_i = F(x) \min_{i=1,\dots,n} \bar{x}_i^{-1} \bar{x}_i = F(x).$$

Это означает, что

$$F(x) = \max_{l \in \Lambda_F} \min_{i=1,\dots,n} l_i x_i.$$

Аналогично доказывается, что

$$F(x) = \min_{l \in \Lambda_F} \max_{i=1,\dots,n} l_i x_i.$$

2. Математический комментарий к теореме 1. Возрастающая однородная первой степени функция (такова производственная функция) представляет собой аналог суперлинейной и сублинейной функций одновременно. Дадим соответствующие определения.

Будем рассматривать непрерывные функции, определенные в пространстве R^n_{++}. Функция q называется суперлинейной, если она супераддитивна (т.е. $q(x+y) \ge q(x) + q(y)$ при всех $x, y \in R^n_{++}$) и положительно однородна первой степени. Функция p называется сублинейной, если она субаддитивна (т.е. $p(x+y) \le p(x) + p(y)$) и положительно однородна первой степени.

Известным свойством суперлинейной и сублинейной функций (Макаров, Рубинов, 1973) является возможность представить их в виде:

$$q(x) = \inf_{r \in R_q} rx, \tag{15}$$

$$p(x) = \sup_{s \in S_p} sx, \tag{16}$$

где rx, sx – скалярные произведения векторов; R_q – опорное множество к поверхности единичного уровня $M_q = \{x : q(x) = 1\}$, определяемое следующим образом:

$$R_q = \{r \in R^n_{++} : rx \ge 1, x \in M_q\};$$

S_p – "нижнее" опорное множество к поверхности единичного уровня $M_p = \{x : p(x) = 1\}$:

$$S_p = \{s \in R^n_{++} : sx \le 1,\ x \in M_p\}.$$

Будем использовать символ "$\wedge$" для обозначения минимума чисел и покоординатного минимума векторов, а символ "$\vee$" – для обозначения максимума чисел и покоординатного максимума векторов.

Заменяя операцию "+" на "$\wedge$" в определении субаддитивной функции, приходим к следующему определению. Функция P называется субаддитивной в смысле минимума, если

$$P(x \wedge y) \le P(x) \wedge P(y) \quad \forall x,\ y \in R^n_{++}.$$

Аналогично, замена операции "+" на "$\vee$" в определении супераддитивной функции приводит к следующему определению. Функция Q называется супераддитивной в смысле максимума, если

$$Q(x \vee y) \ge Q(x) \vee Q(y) \quad \forall x, y \in R^n_{++}.$$

Следующее утверждение показывает, что каждое из этих понятий эквивалентно понятию возрастающей функции.

Теорема 4. *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) *функция H является возрастающей*;

2) *функция H является субаддитивной в смысле минимума*;

3) *функция H является супераддитивной в смысле максимума*.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Для любых $x, y \in R^n_{++}$ выполняются неравенства $x \wedge y \le x$, $x \wedge y \le y$; отсюда и из утверждения 1 следует, что $H(x \wedge y) \le H(x)$, $H(x \wedge y) \le H(y)$, и, значит, $H(x \wedge y) \le H(x) \wedge H(y)$, т.е. выполняется утверждение 2.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $x \ge y$. Тогда $x \wedge y = y$, значит, $H(x \wedge y) = H(y)$. Отсюда и из утверждения 2 следует, что $H(y) \le H(x) \wedge H(y)$, тогда $H(x) \ge H(y)$.

Аналогично, выполняются переходы 1) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 1).

Теорема 4 показывает, что понятие возрастающей функции аналогично как понятию супераддитивной функции, так и понятию субаддитивной функции. Таким образом, можно ожидать, что для возрастающей однородной функции одновременно имеют место представления, аналогичные (15) и (16). Этот факт и составляет содержание теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 2. Сначала покажем справедливость равенства $\max\limits_{l \in \Lambda_F} \phi(l, x) = F(x) = 1$ для каждого $x \in M_F$. Выберем $x \in M_F$ и найдем $\max\limits_{l \in \Lambda_F} \phi(l, x)$, т.е. $\max(l_1 x_1^p + \ldots + l_n x_n^p)^{1/p}$ при условии $a_1^{-p/(q-p)} l_1^{q/(q-p)} + \ldots + a_n^{-p/(q-p)} l_n^{q/(q-p)} = 1$.

С помощью метода множителей Лагранжа запишем условия оптимальности

$$(1/p)\left(l_i x_i^p + \ldots + l_n x_n^p\right)^{1/p-1} x_i^p - \lambda[q/(q-p)] a_i^{-p/(q-p)} l_i^{p/(q-p)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где λ – множитель Лагранжа. Таким образом, вектор l может быть получен из системы уравнений:

$$a_1^{1/(q-p)} l_1^{-1/(q-p)} x_1 = \ldots = a_n^{1/(q-p)} l_n^{-1/(q-p)} x_n, \tag{17}$$

$$a_1^{-p/(q-p)} l_1^{q/(q-p)} + \ldots + a_n^{-p/(q-p)} l_n^{q/(q-p)} = 1. \tag{18}$$

В (17) введем обозначение $a_i^{1/(q-p)} l_i^{-1/(q-p)} x_i = c \quad (i = 1, \ldots, n)$, тогда

$$l_i^{q/(q-p)} = a_i^{q/(q-p)} x_i^q c^{-q}.$$

Подставляя в (18), имеем $(a_1 x_1^q + \ldots + a_n x_n^q) c^{-q} = 1$. Поскольку $x \in M_F$, это равенство превращается в $c^{-q} = 1$, т.е. $c = 1$. Следовательно, в точке максимума $l_i = a_i x_i^{q-p}$, $i = 1, \ldots, n$, и значение функции равно

$$\phi(l, x) = (a_1 x_1^{q-p} x_1^p + \ldots + a_n x_n^{q-p} x_n^p)^{1/p} = F(x) = 1.$$

Каждый вектор $x \gg 0$ можно представить в виде $x = \mu \bar{x}$, где $\bar{x} \in M_F$. В силу однородности и с учетом доказанного

$$F(x) = F(\mu \bar{x}) = \mu F(\bar{x}) = \mu \max_{l \in \Lambda_F} \phi(l, \bar{x}) = \max_{l \in \Lambda_F} \phi(l, x).$$

4. Доказательство теоремы 3. Установим справедливость равенства $\max\limits_{l \in \Lambda_F} \phi(l, x) = F(x) = 1$ для произвольного $x \in M_F$. Для задачи $\max\limits_{l \in \Lambda_F} \phi(l, x)$, т.е. $\max(l_1 x_1^p + \ldots + l_n x_n^p)^{1/p}$ при

$Al_1^{-\theta_1/p}\ldots l_n^{-\theta_n/p}\theta_1^{\theta_1/p}\ldots\theta_n^{\theta_n/p}=1$, условия оптимальности имеют вид

$$\left(l_1x_1^p+\ldots+l_nx_n^p\right)^{1/p-1}x_i^p-\lambda\theta_i l_i^{-1}=0,\ i=1,\ldots,n,$$

где λ – множитель Лагранжа. Таким образом, вектор l может быть получен из системы уравнений:

$$x_1^p\theta_1^{-1}l_1=\ldots=x_n^p\theta_n^{-1}l_n, \tag{19}$$

$$Al_1^{-\theta_1/p}\ldots l_n^{-\theta_n/p}\theta_1^{\theta_1/p}\ldots\theta_n^{\theta_n/p}=1. \tag{20}$$

В (19) введем обозначение $x_i^p\theta_i^{-1}l_i=c,\ \ i=1,\ldots,n$, тогда $l_i=x_i^{-p}\theta_i c$. Равенство (20) принимает вид

$$Ax_1^{\theta_1}\theta_1^{-\theta_1/p}c^{-\theta_1/p}\ldots x_n^{\theta_n}\theta_n^{-\theta_n/p}c^{-\theta_n/p}\theta_1^{\theta_1/p}\ldots\theta_n^{\theta_n/p}=1.$$

Отсюда, поскольку $x\in M_F$, следует, что $c=1$. Следовательно, в точке максимума $l_i=\theta_i x_i^{-p}$, $i=1,\ldots,n$, и максимальное значение функции равно

$$\phi(l,x)=(\theta_1x_1^{-p}x_1^p+\ldots+\theta_nx_n^{-p}x_n^p)^{1/p}=(\theta_1+\ldots+\theta_n)^{1/p}=F(x)=1.$$

Результат переносится на векторы $x\gg 0$ аналогично доказательству теоремы 2.

Автор признателен А.М. Рубинову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абасов Т.М., Рубинов А.М. (1995): Субдифференциалы некоторых классов негладких функций // *Вопросы механики и процессов управления*. № 16.

Ашманов С.А. (1984): Введение в математическую экономику. М.: Наука.

Клейнер Г.Б. (1986): Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Фин. и стат.

Макаров В.Л., Рубинов А.М. (1973): Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука.

Acemoglu D. (2003): Labor- and Capital-Augmenting Technical Change // *J. of the European Econ. Association*. Vol. 1. № 1.

Antrás P. (2004): Is the U.S. Aggregate Production Function Cobb–Douglas? New Estimates of the Elasticity of Substitution // *Contributions to Macroeconomics*. Vol. 4. № 1.

Duffy J., Papageorgiou Ch. (2000): A Cross-Country Empirical Investigation of the Aggregate Production Function Specification // *J. of Econ. Growth*. Vol. 5.

Growiec J. (2008): A New Class of Production Functions and an Argument Against Purely Labor-Augmenting Technical Change // *International J. of Econ. Theory*. Vol. 4. № 4.

Houthakker H.S. (1955–1956): The Pareto Distribution and the Cobb–Douglas Production Function in Activity Analysis // *Rev. of Econ. Stud*. Vol. 23. № 1.

Jalava J., Pohjola M., Ripatti A., Vilmunen J. (2006): Biased Technical Change and Capital-Labor Substitution in Finland, 1902–2003 // *Topics in Macroeconomics*. Vol. 6. № 1.

Jones C.I. (2005): The Shape of Production Function and the Direction of Technical Change // *Quarterly J. of Econ*. Vol. 120. № 2.

Klenow P.J., Rodriguez-Clare A. (1997): The Neoclassical Revival in Growth Economics: Has it Gone Too Far? // *NBER Macroeconomic Annual*. Vol. 12.

Klump R., McAdam P., Willman A. (2004): Factor Substitution and Factor Augmenting Technical Progress in the US: A Normalized Supply-Side System Approach // *European Central Bank Working Paper Series*. № 367.

Matveenko V. (1997): On a Dual Representation of CRS Functions by Use of Leontief Functions. In: "*Proceedings of the First International Conference on Mathematical Economics, Non-Smooth Analysis, and Informatics*". Baku, Azerbaijan.

Rubinov A.M., Glover B.M. (1998): Duality for Increasing Positively Homogeneous Functions and Normal Sets // *Operations Res*. Vol. 12. № 2.

Поступила в редакцию
08.02.2008 г.

An “Anatomy” of Production Functions: A Technological Menu and a Choice of the Best Technology

V. D. Matveenko

The paper studies a representation of a “global” production function as a maximum of local production functions under a choice of technological coefficients from a given set – a technological menu. It is shown that such a representation takes place if the technological menu is a support set of the global production function. A representation of global Cobb-Douglas and CES production functions in such form is considered in details.