
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭКОНОМИКЕ

© 2009 г. К. Н. Адамян, А. Г. Багдоев, С. В. Варданян,
Д. Р. Карапетян, Ю. С. Сафарян

(Республика Армения)

Рассматриваются некоторые детерминированные и случайные волновые процессы в экономике, анализ которых проводится с использованием математического аппарата нелинейной газовой динамики и теории упругости.

В данной статье сделана попытка использовать методы решения волновых задач нелинейной газовой динамики (Lighthill, Whitham, 1955; Багдоев, 1967, гл. 1) и задач теории упругости (Багдоев, Мовсисян, 1968) при анализе случайных волновых процессов в экономике. Используя метод (Lighthill, Whitham, 1955), авторы рассматривают движение транспорта как детерминистический поток частиц с образованием ударной волны или затора, а затем полученные результаты распространяют на задачи о детерминированных и случайных процессах с помощью диффузионных уравнений для плотности вероятности перехода Релея, Колмогорова или Фоккера–Эйнштейна. В этих уравнениях в коэффициент сноса добавлено малое нелинейное слагаемое, как это принято в волновых задачах (Lighthill, Whitham, 1955; Багдоев, 1967, гл. 1). Выведенные нелинейные нестационарные уравнения решаются методами (Lighthill, Whitham, 1955; Багдоев, 1967, гл. 1; Багдоев, Мовсисян, 1968) с расчетом ударных волн или скачков функции распределения плотности вероятности переходов процессов.

1. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ
МЕТОДАМИ ГАЗОДИНАМИКИ

Рассмотрим некоторые модельные задачи.

Задача 1. Возьмем некоторый ряд дискретных объектов, для которых имеется сосредоточение продуктов. Аналогично методу, изложенному в (Lighthill, Whitham, 1955) на примере движения машин на шоссе, заменим дискретное распределение непрерывным. Будем исследовать одномерную по x задачу о движении продуктов, зависящих от времени, где в качестве оси x берется шоссе.

Предположим, что имеется некоторая, в общем случае кривая линия, отождествляемая с осью x , на которой непрерывно распределены указанные продукты с плотностью $\rho(x, t)$, представляющей объем продукта на единицу длины. По условиям задачи передвижение продуктов по оси x зависит от времени t . Помимо плотности можно ввести поток $j(x, t)$ продукта, выражаемый количеством продукта, проходящим через точку x в единицу времени, при этом $j = \rho v$, где v — скорость движения продукта. Считаем, что $j = j(\rho)$ определяется экспериментально и каждый продукт (или в нашем подходе его плотность) влияет на скорость движения потока транспорта, причем чем больше плотность ρ , тем меньше должна быть скорость v , но при этом плотность потока продуктов ρv может быть больше. Таким образом, полагаем, что $j'(\rho) > 0$, а знак $j''(\rho)$ будем выяснять из опыта, который можно провести для одного базового объекта (т.е. при $x = 0$), наблюдая, как от объема продукта в нем (плотности ρ) зависит их поток.

Задача 2. Детерминированная задача о движении продуктов в рамках еврорынка.

Задача 3. Детерминированные процессы движения ценных бумаг. Ниже эта задача будет рассмотрена в рамках случайных процессов.

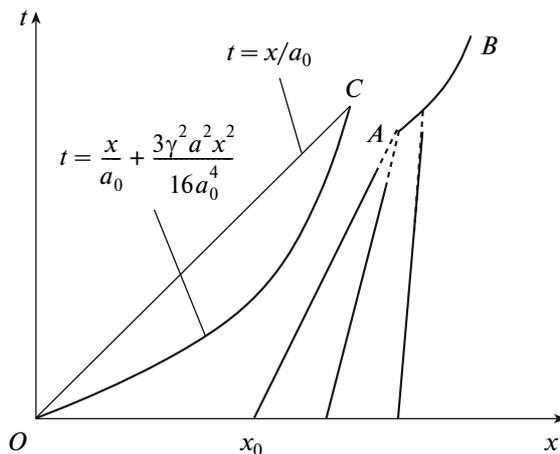


Рисунок.

В задаче 1 о движении продуктов на линии можно сделать те же предположения, что и в (Lighthill, Whitham, 1955): будем считать функцию $j(\rho)$ известной из опыта. Тогда можно записать уравнение сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

отсюда вытекает нелинейное уравнение для ρ –

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + j'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) известно и имеет вид уравнений характеристик, вдоль которых ρ имеет постоянные значения

$$\frac{\partial x}{\partial t} = j'(\rho), \quad \rho = \text{const}. \tag{3}$$

Интегрируя (3), можно получить решение

$$x = x_0 + j'(\rho)t. \tag{4}$$

Вид этих характеристик показан на рисунке. Точка O соответствует входу на линию. Зададим начальное распределение плотности при $t = 0$ в виде

$$\rho = \rho_0(x_0). \tag{5}$$

Из (4) следует решение

$$x = x_0 + j'(\rho)t, \quad \rho = \rho_0(x_0), \tag{6}$$

которое представляет собой веер характеристик. В качестве характерных зависимостей можно выбрать функцию

$$j(\rho) = j_0 + A_0 \sqrt{\rho - \rho_0}, \tag{7}$$

где j_0 – начальный постоянный поток, а $\rho_0(x_0)$ можно взять в виде

$$\rho_0(x_0) = \rho_1 + ax_0^2, \quad a \neq 0, \quad \rho_1 = \text{const}, \quad a = \text{const}. \tag{8}$$

В общем случае для произвольных по величине изменений $\rho - \rho_1$ можно изучить решения (6), (7) и выделить условия, при которых пересекаются уравнения характеристик, т.е. определить, при каких условиях образуется неоднозначность решения¹. Как известно из газовой динамики (Багдоев, 1967, гл. 1), подобная неоднозначность приводит к образованию разрыва AB (см. рисунок), от-

¹ В этой точке пересекаются несколько линий ρ , и поэтому координаты этой точки принадлежат каждой линии.

секающего область неоднозначности. В (Lighthill, Whitham, 1955) это явление связывается с пробкой.

Аналогичные рассуждения можно перенести на задачи экономики, в частности на задачу образования затора движения продуктов.

Решение задач о движении частиц. Ограничимся для простоты изложения случаем $\rho_0(x_0) = \rho_1$, $\rho_1 = \text{const}$ и наличием малых возмущений. Тогда можно считать, что $\rho' = \rho - \rho_1$. Уравнение (2) с учетом малых порядка ρ'^2 запишется в виде

$$j'(\rho) = j'(\rho_1) + j''(\rho_1)\rho', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + a_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \gamma \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$a_0 = j'(\rho_1), \quad \gamma = j''(\rho_1),$$

где a_0 – постоянная линейная скорость возмущений; γ – постоянный нелинейный коэффициент.

Введем переменную, связанную с волной:

$$\tau = t - x/a_0, \quad (10)$$

теперь (9) можно записать в стандартном виде

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_x = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_t = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\gamma}{a_0^2} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} = 0, \quad (11)$$

где производная по x берется при постоянном τ и в последнем нелинейном члене оставлено основное по порядку слагаемое (в окрестности волны τ является малой величиной, а x – нет). Тогда

$$\frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \gg \frac{\partial}{\partial x}.$$

Решение (11) аналогично (4) и имеет вид (Багдоев, Мовсисян, 1968):

$$-d\tau = \frac{\gamma}{a_0^2} \rho' dx, \quad \rho' = \text{const}, \quad (12)$$

или (после интегрирования)

$$\tau + \frac{\gamma}{a_0^2} \rho' x = f(\rho'), \quad (13)$$

где f – произвольная функция. Обозначим $f(\rho') = y_1$, $\rho' = F(y_1)$, тогда решение (13) можно записать в виде

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{\gamma x}{a_0^2} F(y_1) = y_1, \quad (14)$$

где $y_1 = \text{const}$ – уравнение нелинейных характеристик. После пересечения характеристик в точке A образуется ударная волна AB (см. рисунок). Условие на ударной волне получается из (9), если искать стационарное решение (9) в виде $\rho' = \rho'(\xi)$, $\xi = x - Vt$, где $V = dx/dt$ – скорость ударной волны. Принимая в (9)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x} = \frac{d\rho'(\xi)}{d\xi}, \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -V \frac{d\rho'(\xi)}{d\xi},$$

можно получить

$$-V \frac{d\rho'}{d\xi} + a_0 \frac{d\rho'}{d\xi} + \gamma \rho' \frac{d\rho'}{d\xi} = 0.$$

Интегрируя поперек ударной волны и учитывая, что впереди нее $\rho' = 0$, тогда

$$(a_0 - V)\rho' + 0.5\gamma\rho'^2 = 0 \quad (15)$$

или после сокращения на ρ'

$$V = a_0 + 0.5\gamma\rho'. \quad (16)$$

Подставив решение (14) в (16), получим дифференциальное уравнение вдоль ударной волны:

$$x = x(t), \quad V = \frac{dx}{dt}, \quad 1 - \frac{V}{a_0} + \frac{\gamma}{a_0^2} \left(F \frac{dx}{dt} + x \frac{dF}{dt} \right) = \frac{dy_1}{dt}, \quad (17)$$

где $\rho' = F(y_1)$. Умножим (17) на F , тогда

$$-\frac{\gamma}{2a_0} F^2(y_1) + \frac{\gamma}{a_0^2} \left(F^2 \frac{dx}{dt} + x F \frac{dF}{dt} \right) = F \frac{dy_1}{dt} \quad (18)$$

или, поскольку $dx/dt \approx a_0$, то второе слагаемое в (18)

$$\frac{\gamma}{2a_0^2} \left(F^2 \frac{dx}{dt} + x \frac{dF^2}{dt} \right) = F \frac{dy_1}{dt}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\gamma}{2a_0^2} d(xF^2) = F dy_1. \quad (20)$$

После интегрирования получим уравнение ударной волны:

$$F^2(y_1) = \frac{2a_0^2 y_1}{\gamma x} \int_0^{y_1} F(y_1') dy_1'. \quad (21)$$

Если $F(y_1)j''(\rho_1) < 0$, то решение (21) будет существовать лишь при $F(y_1) = 0$, т.е. ударная волна отсутствует с самого начала. Если $F(y_1)j''(\rho_1) > 0$, то образуется ударная волна *ОС* (как это показано на рисунке). Если $j''(\rho_1) < 0$, $F(y_1) > 0$ (т.е. плотность товаров растет вдоль линии), то характеристические линии начинаются на оси t , а затем расходятся и ударной волны не возникает.

Если $F(y_1) < 0$, $j''(\rho_1) < 0$, то наблюдается уменьшение плотности по сравнению с ее значением ρ_1 при $x = 0$ и образуется ударная волна (т.е. затор товаров, начиная с первого объекта). Полагая, что начальная плотность $\rho = \rho_1$ при $t = 0$ постоянна, а на первом объекте плотность меняется по формуле $x = 0$, $F(t) = \rho_2 - \rho_1 + A\sqrt{t}$, $\rho_2 > \rho_1$, $A < 0$, то с помощью интегрирования из (21) уравнение на ударной волне можно записать в виде

$$(\rho_2 - \rho_1 + A\sqrt{y_1})^2 = (2a_0^2/\gamma x) \{ (\rho_2 - \rho_1)y_1 + 2Ay_1^{3/2}/3 \}. \quad (22)$$

Задавая числа ρ_1 , ρ_2 , A , γ , a_0 и решая кубическое уравнение для $y_1^{1/2}$, найдем числовое значение y_1 в функции x , затем определим $\rho' = F(y_1)$ и из (14) найдем значение ударной волны.

В частном случае $\rho_2 = \rho_1$, и из (21) получим

$$y_1^{1/2} = 3A\gamma x / 4a_0^2, \quad \rho' = 3A^2\gamma x / 4a_0^2,$$

а уравнение ударной волны *ОС* (14) примет вид

$$t - x/a_0 + 3A^2\gamma^2 x^2 / 16a_0^4 = 0, \quad \gamma < 0.$$

2. ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РЕЛЕЯ ДЛЯ ПРИМЕРА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ

Рассмотрим в качестве примера марковский процесс, описанный в (Рытов, 1976, гл. 3). Пусть частица в момент $N\Delta t$, $N = 1, 2, \dots$, делает скачок на шаг $\Delta x = a$ вправо или влево с вероятностями p и $q = 1 - p$. Считаем, что при $t = 0$, $x = 0$ в момент $t = N\Delta t$: $x = ma$. Введем вероятность перехода вправо или влево за N шагов:

$$p(N\Delta t, ma | 0, 0) = p_{N,m}, \quad (23)$$

т.е. при шаге N частица может попасть в точку $x = ma$ при условии, что на шаге $N - 1$ она оказалась в точке $(m - 1)a$ или в точке $(m + 1)a$ с вероятностью p и $q = 1 - p$, соответственно. По формуле

полной вероятности можно записать

$$p_{N,m} = pp_{N-1,m-1} + qp_{N-1,m+1}. \quad (24)$$

Из дискретного распределения можно получить непрерывное распределение. Для этого обозначим $v(t,x)a = p_{N,m}$ тогда из (24) имеем

$$v(t,x) = pv(t-\Delta t, x-a) + qv(t-\Delta t, x+a). \quad (25)$$

Разложим v по Δt и $\Delta x = a$ и, учитывая, что $q = 1 - p$, имеем

$$-\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t - (p-q)\frac{\partial v}{\partial x}a + \frac{\partial^2 v a^2}{\partial x^2 2} + (p-q)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}a\Delta t + \frac{\partial^2 v (\Delta t)^2}{\partial t^2 2} = 0. \quad (26)$$

Разделим полученное уравнение на Δt и устремим $\Delta t \rightarrow 0$, $p - q \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$. Обозначим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} ((p-q)a/\Delta t) = A', \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a^2/\Delta t = B, \quad (27)$$

где $a \sim (\Delta t)^{1/2}$, $p - q \sim (\Delta t)^{1/2}$, тогда в (26) останутся только три первые члена и уравнение плотности вероятности перехода в точке (t, x) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A' \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (28)$$

Используя начальное условие (при $t = 0$ должно быть $x = 0$), можно записать

$$v(0,x) = \delta(x), \quad (29)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция. Тем самым однозначно определено решение уравнения (28):

$$v_0(t,x,0,0) = \exp\left\{(x-at)^2/2Bt\right\}/\sqrt{2\pi Bt}. \quad (30)$$

Соотношения (27) позволяют рассчитать коэффициент, характеризующий скорость волнового движения A' в (28), другими словами, среднюю скорость блуждания частицы влево и вправо. Данную методику можно обобщить до случая нелинейного подхода, как в нелинейной газодинамике и теории упругости (Багдоев, Мовсисян, 1968), учитывая в скорости волнового движения A' нелинейный член. Для этого можно ввести плотность вероятности малого отклонения от гауссовского процесса (30):

$$v'(t, x | 0,0) = v(t, x | 0,0) - v_0(t, x | 0,0),$$

где v_0 удовлетворяет (30), а v удовлетворяет (28), в котором вместо A' будет стоять $A' + \chi v'$, причем получится нелинейное уравнение вида

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -A' \frac{\partial v'}{\partial x} - \chi v' \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{B^2}{2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} - \chi v' \frac{\partial v_0}{\partial x}. \quad (31)$$

Здесь χ – постоянная, которая должна в каждой задаче определяться опытным путем, как и в задачах волновой динамики и движения транспорта (Lighthill, Whitham, 1955; Багдоев, Мовсисян, 1968). Отбросив слагаемое, в которое входит B , можно получить обычное волновое уравнение (оно решается методами, описанными в (Багдоев, Мовсисян, 1968)). В волновой зоне $x \approx At$ в (31) можно пренебречь и последним слагаемым, т.е. при конечных t

$$|\partial v_0/\partial x| \ll 1. \quad (32)$$

Тогда нелинейное волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -A' \frac{\partial v'}{\partial x} - \chi v' \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad (33)$$

который совпадает с (9), где $v' = 1$, $\rho, A' = a_0$, $\chi = \gamma$.

Тогда, формулируя для возмущенной плотности вероятности перехода v' задачу с условиями $t = 0$, $v' = 0$ и $x = 0$ в виде $v' = F(t)$, $F(t) = v_2' - v_1' + A\sqrt{t}$, где из начального условия следует, что

Таблица

x	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
$\sqrt{y_1}$	0.0487377	0.0662364	0.0788699	0.0890548	0.0977097
v'	0.191877	0.188961	0.186855	0.185158	0.183715
t	0.022619	0.0450496	0.0674035	0.0897119	0.11199

$v'_2 = 0$, можно взять решение из разд. 1 для волнового уравнения (33), в том числе решение вдоль ударной волны AC (22) и далее, где a_0, γ заменено на A', χ .

В таблице приведены результаты расчетов при $a_0 = 1, \gamma = 1.5, v'_1 = 0, v'_2 = 0.2, A = -1/6$.

3. ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАРКОВСКИХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, ВОЛНЫ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим случайную функцию $\xi = \xi(t)$, представляющую марковский процесс, т.е. система переходит в состояния $\xi(t)$ из $\xi(s), t > s$, при фиксированном $\xi(s) = x$ и процесс не зависит от $\xi(u), u \leq s$.

Плотность вероятности $p(s, x, t, y)$ перехода от состояния (s, x) к текущему состоянию (t, y) называется *переходной вероятностью по y* . Для нее имеет место нелинейное уравнение Колмогорова–Эйнштейна, или Смолуховского (см. (Рытов, 1976, гл. 3)):

$$p(s, x, t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, u, z) p(u, z, t, y) dz. \tag{34}$$

В (Прохоров, Розанов, 1967, гл. 5; Розанов, 1979, ч. 2, разд. 9; Рытов, 1976, гл. 3) из (34) получены линеаризованные уравнения для p в предположениях малости возмущений во времени и малости величин $u - s$ и $z - x$. Кроме того, для $\xi(t)$ введено малое приращение

$$\xi(s + \Delta t) = \xi(s) + \alpha \{s, \xi(s)\} \Delta t + \sigma \{s, \xi(s)\} \Delta \eta, \tag{35}$$

где $\Delta \eta$ – белый шум. Величина $a(s, x)$ характеризует среднюю тенденцию к эволюции случайного процесса $\xi(s)$ за малый промежуток времени от s до $s + \Delta t$ при условии, что $\xi(s) = x$, и называется *коэффициентом сноса* (Розанов, 1979).

В уравнении (34) можно считать произвольный момент времени u близким к t или s и предполагать $z \approx x$ или $z \approx y$, соответственно. Вводя во втором случае некоторые коэффициенты сноса α и диффузии, как в (Прохоров, Розанов, 1967, гл. 5; Розанов, 1979, ч. 2, разд. 9):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|z-x|<\epsilon} (z-x) p(s, x, s + \Delta t, z) dz / \Delta t &= a(s, x), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|z-x|<\epsilon} (z-x)^2 p(s, x, s + \Delta t, z) dz / \Delta t &= b(s, x), \end{aligned} \tag{36}$$

и проводя линеаризацию в (34) относительно начального состояния s, x , можно получить обратное уравнение Колмогорова для $p(s, x, t, y)$:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a \frac{\partial p}{\partial x} + 0.5 b \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{37}$$

а проводя ту же процедуру вблизи точки t, y – прямое уравнение Колмогорова, или уравнение Фоккера–Эйнштейна:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial a p}{\partial y} + 0.5 \frac{\partial^2 b p}{\partial y^2}. \tag{38}$$

В случае гауссовского процесса для разности $y - x$ можно считать, что

$$p_0(s, x, t, y) = \exp\left[-(y - x - a_0\Delta t)^2 / \left[2\sigma^2(t - s)\right]\right] / \sqrt{2\pi\sigma^2(t - s)}, \quad \Delta t = t - s, \quad (39)$$

и из (36) следует

$$b = \sigma^2, \quad a = a_0. \quad (40)$$

Следуя методам нелинейной волновой динамики (Багдоев, Мовсисян, 1968) и процедуре, описанной в разд. 2, в окрестности волны, для которой в уравнениях (37), (38) величина a представляет скорость линейной волны для p , необходимо учитывать нелинейность. При этом, как и в (Рытов, 1976), в (37) удобно заменять обозначения s, x на t_0, x_0 , а в (38) — y на x , a на a_0 . Тогда в (38) следует в нелинейном случае заменять a_0 через

$$a(s, x) \rightarrow a_0 + \chi p', \quad (41)$$

где выбрано $p' = p - p_0$, постоянная χ может быть определена из опыта над $\xi(t)$, задаваемой с помощью (35), или сравнивая окончательные формулы решения из разд. 1 с опытными данными. При этом для опытной средней кривой $\xi(t) = \bar{x}(t)$, представляющей математическое ожидание случайного процесса x, t (Рытов, 1976) $\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(t_0, x_0; t, x)dx$, $\bar{x}(t_0) = x_0$, можно получить связь ее наклона $d\bar{x}/dt = \bar{a}$ с математическим ожиданием \bar{a} коэффициента $a(t, x)$ нелинейного уравнения, задаваемого в (41). В частности, полагая $a_0 = \text{const}$, $b = \text{const}$, $\chi = \text{const}$, можно записать, что $\bar{a} = a_0$, $\bar{b} = (\Delta x)^2/\Delta t$, где Δx соответствует отклонению от средней кривой (Рытов, 1976). Тогда из (38) и (41) для избыточной по сравнению с гауссовским распределением плотности вероятности p' получится

$$-\frac{\partial p'}{\partial s} = a_0 \frac{\partial p'}{\partial x} + \chi p' \frac{\partial p'}{\partial x} + 0.5b \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \quad (42)$$

где $a_0, \chi, b = \text{const}$. Заменяя обозначение s на t и отбрасывая последний диффузионный член, можно видеть, что (42) совпадает с уравнением разд. 1 для волнового движения и полученные там решения можно использовать для задачи данного раздела по определению переходной плотности вероятности для случайного марковского процесса общего вида, в частности для такой важной задачи, как динамика ценных бумаг. При этом образование ударной волны или затора в этом волновом движении может иметь значение момента нарушения непрерывности процесса их распределения. Как и в (Рытов, 1976, с. 163), можно истолковать (37), (38), где $p = p(t, x, t_0, x_0)$, таким образом, что в момент t_0 из точки x_0 выходит большое число частиц. Их концентрация в точке x в момент t будет $p(t, x, t_0, x_0)$. Поток частиц S складывается из “гидродинамического” потока ap , где a — скорость систематического движения, и из диффузионного потока

$$-0.5 \frac{\partial bp}{\partial x}, \quad s = av - 0.5 \frac{\partial bv}{\partial x}.$$

Тогда (38) совпадает с уравнением $\partial p/\partial t + \partial s/\partial x = 0$ из разд. 1. Когда при $t = t_0$ задано $p(t, x, t_0, x_0) = p_0(t_0, x_0)$, то, введя одномерную функцию распределения $p_1(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(t_0, x_0)p(t, x, t_0, x_0)dx_0$ и умножив (38) (где y заменено на x) на $p_0(t_0, x_0)$, а затем проинтегрировав по x_0 полученное уравнение, нетрудно убедиться, что вероятность состояния $p_1(t, x)$ удовлетворяет тому же уравнению (38) (где y заменено на x) с начальным условием $p_1(t_0, x) = p_0(t_0, x)$. При этом вышеприведенное нелинейное решение из разд. 1 имеет место для $p_1(t, x)$. Можно также учесть и диффузионное слагаемое с коэффициентом b и помимо решения из разд. 2 найти ме-

тодами газовой динамики или нелинейной теории упругости решения (42). Для этого нужно ввести переменную

$$\begin{aligned} \tau &= t - x/a_0, \\ \frac{\partial p'}{\partial t}\Big|_x &= \frac{\partial p'}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial p'}{\partial x}\Big|_t = \frac{\partial p'}{\partial x}\Big|_\tau - \frac{1}{a_0} \frac{\partial p'}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial p'}{\partial \tau} \gg \frac{\partial p'}{\partial x}\Big|_\tau, \\ \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\chi}{a_0^2} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - 0.5 \frac{b}{a_0^3} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} &= 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Как было сказано ранее, при $b = 0$ уравнение (43) совпадает по форме с (26) и все решения разд. 1 применимы и для ударных волн вероятности p' . В общем случае в (43) можно заменить

$$p' = -\frac{b}{a_0 \chi U} \frac{1}{\partial \tau} \tag{44}$$

и (43) примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \delta_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad \delta_1 = -\frac{b}{2a_0^3}. \tag{45}$$

Задавая начальные условия для $p'(x, t)$ в виде $p'(x, 0) = 0$, а граничное условие для $p'(x, t)$ в виде $t > 0, p' = v(0, t)$, из (44) можно получить

$$U(x, 0) = 1, \quad U(0, t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{a_0 \chi}{b} v(0, t) dt\right) \tag{46}$$

и решение (45) при условиях (46) будет

$$U(x, \tau) = 0.5 \frac{1}{\sqrt{\pi \delta_1 x}} \int_0^\tau \exp\left(-(\xi - \tau)^2 / 4\delta_1 x\right) U(0, \xi) d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau/2\sqrt{\delta_1 x}}^\infty \exp(-u^2) du. \tag{47}$$

Тогда также можно, формулируя указанную задачу для данного состояния, описываемого уравнением (38), найти $p'(t, y)$ при фиксированных s, x . При этом p' находится из (44). Методом стационарной фазы (Багдоев, 1967, с. 225–226) из (44) и (47) при $\delta_1 \rightarrow 0$ получим решение

$$p'(x, t) = v(\xi), \quad \xi = \tau + \chi v(\xi) x / a_0^2,$$

которое совпадает с решением из разд. 1 для ударных волн.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье по аналогии с известными волновыми задачами для сплошной среды исследуются вопросы динамики дискретных объектов, которые, как и в (Lighthill, Whitham, 1955), моделируются непрерывными сплошными движущимися средами. В разд. 1 находится решение нелинейного волнового уравнения в детерминистическом рассмотрении и получено условие образования ударной волны или разрыва плотности распределения объектов на линии (в (Lighthill, Whitham, 1955) оно называется пробкой или заторможенным движением). Для характерных начальных и граничных условий находится аналитически и численно ударная волна. Помимо перечисленных в начале статьи задач экономики методику можно применять к задачам о движении капиталов, утечке капитала, движении процентных ставок (Кулинич, 1999; Бурда, Виплош, 1998, гл. 1). В разд. 2, 3 эти задачи рассматриваются на базе стохастических теорий. Для случайной величины x (например, для количества ценных бумаг), изменяющейся со временем как марковский диффузионный процесс (Прохоров, Розанов 1967, гл. 5; Розанов, 1979, ч. 2 разд. 9; Рытов, 1976, гл. 3), известно полученное другим путем в экономической задаче динамики ценных бумаг линейное диффузионное уравнение Блека–Шоульза для опционов (Fisher, Merton, 1973). Следует учесть, что поскольку заданные в некоторый момент времени условия для опционов могут быть большими по величине при больших x , то в указанном диффузионном уравнении нужно учесть нелинейность. Поэтому подобно волновым уравнениям сплошной среды (Багдоев, 1967, гл. 2; Багдоев, Мовсисян, 1968) это уравнение дополняется нелинейным слагаемым в скорости волны опциона,

или в терминологии данной статьи вероятности p' , а именно, слагаемым $0.5\chi p'$, коэффициент χ должен определяться экспериментально. Тогда решения из разд. 1–3 могут быть использованы и для решения задачи Блека–Шоульза. Указанная задача решена в статье (Багдоев и др., 2007). Возможно, более важными будут не нестационарные задачи, а задачи о колебательных движениях в экономике (Бурда, Виплош, 1998, гл. 1), которые могут рассматриваться методами нелинейных квазимонохроматических волн (Багдоев, 1981, гл. 6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Багдоев А.Г.** (1967): Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости. Ереван: Гитутюн.
Багдоев А.Г. (1981): Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Гитутюн.
Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. (1968): Определение ударной волны в нелинейных задачах теории упругости // *Известия АН АрмССР. Механика.* Т. 21. № 3.
Багдоев А.Г., Керобян Х.В., Нерсисян Г.Г., Даниелян Р.С. (2007): Аналитические и численные исследования динамических процессов в экономике и информатике методами волновой динамики // *Вестник РАУ.* № 2.
Бурда М., Виплош Ч. (1998): Макроэкономика. СПб.: Судостроение.
Кулинич Е.И. (1999): Эконометрия. М.: Фин. и стат.
Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. (1967): Теория вероятностей. М.: Наука.
Розанов Ю.А. (1979): Случайные процессы. М.: Наука.
Рыгов С.М. (1976): Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука.
Fisher В., Myron S. (1973): The Pricing of Options and Corporative Liabilities // *J. of Polit. Econ.* Vol. 81. № 3.
Lighthill M.J., Whitham G.B. (1955): On Kinematic Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences.* Vol. 229. № 1178.

Поступила в редакцию
22.08.2007 г.

Nonlinear Wave Dynamics for Some Stochastic Processes in Economics

K. N. Adamyan, A. G. Bagdoyev, S. V. Vardanyan, D. R. Karapetyan, Yu. S. Safaryan

Some economical models on deterministic and stochastic wave processes are considered. The solutions are investigated in the frame of nonlinear gas dynamics and elasticity theories. It is shown that the mentioned theories of applications of mathematical methods of nonlinear wave dynamics are successful for dynamical economical processes investigations.