ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2009, том 45, № 3, с. 87–105

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ПРЕДПОЧТЕНИЯ, ПОЛЕЗНОСТЬ И МЕРЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ

© 2009 г. Р. Е. Саркисян

(Москва)

Для описания и исследования явления убывающей эффективности (или полезности), присущего прикладным многокритериальным задачам, построены меры чувствительности и функции дифференциальной полезности, которые характеризуют динамические свойства предпочтений и полезности многокритериальных альтернатив. На их основе сформулирована задача внутренней оптимизации, решение которой порождает полезные соотношения и связи для оптимизации и выбора. Ряд важных свойств этих соотношений иллюстрируется и оценивается на примере квадратичной аппроксимации функции полезности.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи многокритериальной оптимизации и принятия решения относятся к тем разделам современной математики, которые Ж.-П. Обен (Обен, 1988) называет мотивированными. Постоянно растущий интерес к этим математическим схемам, на наш взгляд, главным образом обусловлен потребностями системных задач, связанных с выдвижением идеи, проектированием, созданием, эксплуатацией и совершенствованием систем и их компонентов в технике, экономике, военном деле, организационном управлении. Необходимость всестороннего обоснования разрабатываемых плановых, проектных и/или управленческих решений системно-сложных задач с учетом наиболее значимых последствий их реализации и приводит к постановке задачи многокритериальной (или векторной) оптимизации, составляющей по существу основу современной исследовательской практики в названных областях науки и техники.

Практически любая интерактивная модель многокритериальной оптимизации хотя бы в своей финальной стадии выработки предпочтительных вариантов решения исследуемой проблемы предполагает сравнение альтернатив и все более адекватное выявление и описание предпочтений лиц, принимающих решения (ЛПР). Однако эти предпочтения характеризуются убывающей эффективностью (или полезностью), поэтому искомые оптимальные решения, которые удовлетворяют определенному уровню предпочтений, проявляют разную чувствительность по отношению к возможным изменениям желательных качеств выбираемых моделей систем и их компонентов.

Другая важная особенность указанных предпочтений относительно системных решений была отмечена еще в 1950-х годах Нобелевским лауреатом по экономике Г. Саймоном. Исследовав проблемы принятия людьми профессиональных решений, на основе обширных эмпирических фактов в области экономики, психологии и других значимых областях знаний он пришел к выводу, что обычно люди редко стремятся к максимизации полезности, а предпочитают выбрать удовлетворительные решения, *более надежные и адаптируемые к реальным ситуациям.* Г. Саймон сформулировал принцип, согласно которому: “*человек – удовлетворяющее существо, которое решает проблему путем поиска, исследования для того, чтобы удовлетворить определенный уровень потребности, а не максимизирующее существо, которое при разрешении проблемы пытается найти наилучшую (на основе определенного критерия) альтернативу*” (Саймон, 1995). Эта точка зрения в принципе созвучна с научной парадигмой, исходящей из необходимости “примирения” рационального выбора с ключевыми особенностями проблемной ситуации, обусловленными динамикой, сложностью, неопределенностью и риском. Драматически изменяющийся мир своими факторами нестабильности, неопределенности и случайности существенно снижает эффективность применения принципа рационального выбора, предписывающего оптимизирующее поведение человека в принятии системных решений. Такое видение проблемы стимулировало развитие методов планирования сценариев для решения глобальных проблем (Поппер, Лемперт, Бенкс, 2005), внедрение в повседневную практику корпоративного управления комплексного риск-менеджмента для снижения потерь организации до приемлемого уровня, поиск более эффективных путей и механизмов выработки решений в социально-гуманитарном познании (Рузавин, 2003).

Необходимость учета фактора убывающей эффективности многокритериальных альтернатив приводит нас к поиску действенных мер чувствительности предпочтений и описывающей их числовой функции полезности, которая в интерактивных процедурах оптимизации и выбора позволяет предельно уменьшить неопределенность и несравнимость альтернатив и сделать правильный выбор (Руа, 1976).

Возможность представления предпочтений с помощью функции полезности многокритериальных альтернатив по существу превращает математическую теорию полезности в общетеоретическую основу исследования и решения этого важного класса задач современной практики. Своими корнями, методологией и инструментарием она тесно связана с теорией рационального выбора и широко применяется в аналитических схемах по конструированию (или выработке) системно-сложных решений. В историческом плане твердый фундамент для построения теории полезности был заложен еще в работах английского экономиста и статистика Ф. Эджворта, итало-швейцарского социолога и экономиста В. Парето, американского экономиста и статистика И. Фишера. В 1930-х годах благодаря трудам Р. Аллена и Дж. Хикса она приобрела завершенную каноническую форму, стала общепринятой и поныне остается одним из мощных аналитических инструментов для решения системных задач. Ряд важных результатов в этой области знаний получен во второй половине прошлого столетия благодаря работам Г. Дебре, Дж. Неймана, О. Моргенштерна и П. Фишберна (Гальперин, Игнатьев, Моргунов, 1997). Несмотря на известные трудности, которые обычно возникают при моделировании предпочтений в терминах функции полезности, тем не менее именно концепция полезности позволяет выявить и описать весьма устойчивые отношения и пропорции, отражающие внутреннюю согласованность и совместность решений, а их учет способствует повышению жизнеспособности систем и эффективности их функционирования.

В настоящей работе мы ограничились лишь исследованием проблемы чувствительности многокритериальных альтернатив применительно к базовой модели задачи математического программирования. Результаты исследования применимы и к другим схемам многокритериальной оптимизации, в том числе и относящимся к неопределенному программированию (Лю, 2005). Построение общей и частных мер чувствительности многокритериальных альтернатив является развитием идеи, обсуждавшейся в работе (Саркисян, 2005) относительно интерактивных методов и процедур аппроксимации решений многокритериальных задач, отвечающих требованию равной чувствительности (или эластичности). Меры чувствительности позволяют описать динамические свойства предпочтений и соответствующей функции полезности, строить устойчивые и инвариантные соотношения между критериями, которые могут быть положены в основу построения гибких и адаптируемых процедур внутренней и внешней оптимизации многокритериальных решений.

1. ПРЕДПОЧТЕНИЯ, ПОЛЕЗНОСТЬ И МЕРЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ

Рассмотрим проблему чувствительности решений задачи многокритериальной оптимизации и выбора применительно к классической постановке задачи математического программирования

$$(D, f): f(x) \to \max, \quad x \in D. \tag{1}$$

Здесь $f\colon E^n \to E^m$ – векторный критерий качества, значение которого желательно максимизировать; $D \subset E^n$, $D \neq \varnothing$, – заданное множество решений; $x \in \mathrm{D}$ – допустимое решение (вектор управления); E^n и E^m – евклидовы пространства размерностей n и m, соответственно. Во избежание трудностей будем предполагать, что множество D замкнуто и ограничено, а компоненты вектора f являются непрерывно дифференцируемыми функциями из E^n в E^1. Эти предположения гарантируют существование подмножества компромиссных (или оптимальных по Парето) решений $\pi(D) \subset D$ с соответствующим подмножеством эффективных оценок $\pi(F) \subset F$, где $F = \{f \in E^m / f = f(x),\ x \in D\}$ – множество оценок, так что $f\colon \pi(D) \to \pi(F)$. В приложениях предполагается, что D – подмножество более широкого множества $X \subset E^n$, в котором определены функции $f_i(x)$, а F принадлежит декартову произведению $F_0 = F_1 x \ldots x F_m$, где составляющие F_i – замкнутые выпуклые отрезки числовой оси E^1, из которых функции $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, принимают свои значения

(Подиновский, Ногин, 1982). Ниже всюду будем предполагать, что множество F_0 принадлежит неотрицательному ортанту E^n_+.

Пусть на множестве F_0 определено отношение предпочтения $\mathfrak{R} \subseteq F_0 \times F_0$, обладающее свойствами:

а) *рефлексивности*, т.е. $f\mathfrak{R}f \quad \forall f \in F_0$;

б) *транзитивности*, т.е. $f^1\mathfrak{R}f^2$ и $f^2\mathfrak{R}f^3 \to f^1\mathfrak{R}f^3 \quad \forall f^1, f^2, f^3 \in F_0$;

в) *полноты*, т.е. для любых f^1 и f^2 из F_0 имеет место либо $f^1\mathfrak{R}f^2$, либо $f^2\mathfrak{R}f^1$, либо и то и другое;

г) *монотонности*, т.е. для произвольного неотрицательного приращения $\delta \ge 0$ имеет место $(f+\delta)\mathfrak{R}f\,\forall f \in F_0$;

д) *непрерывности*, т.е. для произвольной фиксированной оценки $\varphi \in F_0$ множества $\{f\,/f\mathfrak{R}\varphi\}$ и $\{\phi\,/\varphi\mathfrak{R}\phi\}$ замкнуты, другими словами, для произвольной последовательности $\{f^k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, для которой $f^k\mathfrak{R}\varphi\ \forall k$, и $\lim f^k = \overline{f}$ при $k \to \infty$, справедливо $\overline{f}\mathfrak{R}\phi$, а для последовательности $\{\phi^k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, для которой $\varphi\mathfrak{R}\phi^k\ \forall k$, и $\lim \phi^k = \overline{\phi}$ при $k \to \infty$, справедливо $\varphi\mathfrak{R}\overline{\phi}$;

е) *строгой выпуклости*, т.е. если $f\mathfrak{R}\varphi$ и $f \ne \varphi$, то оценка $\alpha f + (1-\alpha)\varphi$ строго предпочтительна φ для всех α из интервала (0, 1).

Отношение предпочтения со свойствами а) – е) может быть представлено непрерывной монотонно возрастающей вогнутой функцией полезности u: $E^m \to E^1$, удовлетворяющей условию

$$f\mathfrak{R}\varphi \leftrightarrow u(f) \ge u(\varphi) \quad \forall f, \varphi \in F_0, \tag{2}$$

а поверхности ее уровней (уровни предпочтений) u=const являются кривыми безразличия для отношения $\mathfrak{R}$, т.е.

$$u(f) = u(\varphi) \leftrightarrow fI\varphi \quad \forall f, \varphi \in F_0, \tag{3}$$

где I – отношение безразличия (симметричная часть $\mathfrak{R}$) или эквивалентности (так как $\mathfrak{R}$ транзитивно) и не содержит отрезков прямых (Экланд, 1983).

Как отмечалось в работах (Руа, 1976; Кини, Райфа, 1981), выявление и описание отношения предпочтения $\mathfrak{R}$ являются центральной задачей любой модели выбора. И то обстоятельство, что при выполнении определенных условий отношение $\mathfrak{R}$ допускает представление в виде функции полезности u: $E^m \to E^1$, позволяет распространить концепцию иерархии на любую модель выбора $\langle D, F, \mathfrak{R}\rangle$, содержащую множество альтернатив D, множество векторных оценок F и систему предпочтений лица, принимающего решения (ЛПР), которая представлена либо в виде отношения предпочтения $\mathfrak{R}$, либо в виде функции полезности u: $E^m \to E^1$. Последняя обычно не бывает задана в явном виде, поэтому в приложениях ее приходится "восстанавливать", причем неоднозначно, так как она определена с точностью до произвольного монотонно возрастающего преобразования $\varphi(u)$, в частности до линейного преобразования $au + b$, $a > 0$.

Далее будем предполагать, что функция полезности u: $E^m \to E^1$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad u_k = \partial u/\partial f_k > 0, \quad k = 1, \ldots, m,\\ &\text{б)}\quad u_{kk} = \partial^2 u/\partial f_k^{\,2} < 0, \quad k = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4}$$

Первое из этих условий означает, что так называемые *предельные полезности* (частные производные первого порядка) положительны, второе условие утверждает, что предельные полезности убывают по мере роста значения критериев. Это свойство, часто называемое *законом Госсена* (немецкий экономист, впервые сформулировавший его в 1854 г., см. (Интрилигатор, 1975)), и характеризует *эффект убывающей полезности*. Естественно, что этот фактор влияет на наши решения и должен быть учтен в процессе их выработки. В традиционных схемах многокритериальной оптимизации обычно ищут решения $x^e \in \pi(D)$, векторные оценки $f^e = f(x^e)$ которых отвечают условию $u(f^e) \ge u(f)\ \forall f \in F$, или, что эквивалентно, $u(f(x^e)) \ge u(f(x))\ \forall x \in D$.

Со времен английского социолога и юриста И. Бентама принцип пользы, а в современной его интерпретации – принцип максимальной полезности стал центральным понятием рационального выбора в процедурах оптимизации и принятия решений применительно к разнообразным практическим задачам системотехники. Справедливости ради следует отметить, что в современной исследовательской практике использования методов оптимизации практически все формализованные правила и процедуры в известной мере исходят из концепции полезности, хотя в них и не всегда ставится задача построения или аппроксимации соответствующей функции полезности. Концепция полезности способна конструктивно описать наши предпочтения в системных исследованиях применительно к описанию, объяснению и предсказанию сколь угодно сложных процессов и явлений, имеющих, как правило, многоуровневый иерархический характер (Саати, 1993).

Конструктивное использование условий (4) приводит нас к понятию дифференциальной (или динамической) полезности, позволяющей исследовать явление потери эффективности в многокритериальных задачах, выявить условия внутренней ее оптимизации, порождающие желательные пропорции между критериями и их динамическими характеристиками.

Из нелинейного программирования известно, что любая вогнутая функция $z: S \to E^1$, определенная на непустом выпуклом множестве S в E^n, удовлетворяет неравенству (Базара, Шетти, 1982)

$$z(x) - z(\bar{x}) \le \zeta^T(x - \bar{x}) \tag{5}$$

для всех $x \in S$, где ς – субградиент функции z в точке $\bar{x} \in S$. Для вогнуто возрастающей на множестве F_0 дифференцируемой функции полезности $u(f)$ неравенство (5) принимает форму дифференциального неравенства

$$u(f) - u(\bar{f}) \le \nabla_f u^T(f - \bar{f}) \quad \forall f \in F_0, \tag{6}$$

где $\nabla_f u$ – градиент функции полезности в точке $\bar{f} \in F_0$. В неравенстве (6) функция $u(\bar{f}) + \nabla_f u^T(f - \bar{f})$ соответствует опорной гиперплоскости к поверхности функции $u(f)$, а градиент $\nabla_f u$ – тангенсу угла наклона этой гиперплоскости. Поэтому, обозначив через $u_0(\bar{f})$ ординату (или высоту) точки пересечения опорной гиперплоскости с осью $u(f)$, получим $u_0(\bar{f}) = u(\bar{f}) + \nabla_f u^T(0 - \bar{f})$, откуда следует, что для произвольной точки $f = \bar{f} \in F_0$ функцию полезности можно представить в виде

$$u(f) = u_0(f) + \nabla_f u^T f = u_0(f) + \sum_{j=1}^{m} f_j \partial u/\partial f_j \quad \forall f \in F_0. \tag{7}$$

В этом выражении функция $v(f) = \nabla_f u^T f = u_0(f) + \sum_{j=1}^{m} f_j \partial u/\partial f_j$ представляет собой скалярное произведение векторов f и $\nabla_f u$ и содержит полезную информацию о локальных динамических свойствах самой функции $u(f)$. Как легко установить, функция $v(f)$ равна производной функции полезности по направлению в точке f и, следовательно, характеризует интенсивность ее изменения вдоль этого направления. Действительно, пусть p – некоторое возможное направление в точке f, и существует величина $\delta > 0$, такая, что для всех $\tau \in (0, \delta)$ имеет место $f + \tau p \in F_0$. Тогда предел

$$Du(f; p) = \lim_{\tau \to 0+} (u(f + \tau p) - u(f))/\tau, \tag{8}$$

называемый производной функции $u(f)$ по направлению p в точке f, существует и ввиду дифференцируемости $u(f)$ равен скалярному произведению $\nabla_f u^T p$ (Васильев, 1988). Заменив в нем направление p на f, получим выражение для функции $v(f)$, т.е. имеет место соотношение $v(f) = Du(f; f)$.

Величина $\sigma(f)$, определенная в произвольной точке $f \in F_0$ в виде предела

$$\sigma(f) = \lim_{t \to 1} \frac{t}{u(tf)} \frac{du(tf)}{dt} = \lim_{t \to 1} \frac{d \ln u(tf)}{d \ln t}, \tag{9}$$

является локальным показателем изменения функции полезности от пропорционального изменения координат вектора $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$, или ее эластичностью по отношению к параметру масштаба $t > 0$ (Интрилигатор, 1975). Учитывая, что $u(tf) = u(tf_1, \ldots, tf_m)$, и дифференцируя обе части этой функции по t, получим

$$\frac{d}{dt} u(tf_1, \ldots, tf_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u(tf)}{\partial (tf_i)} \frac{\partial (tf_i)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u(tf)}{\partial (tf_i)} f_i,$$

следовательно, выражение (9) можно представить в виде

$$\sigma(f) = \frac{1}{u(f)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u(f)}{\partial f_i}f_i. \qquad (10)$$

Величина $\sigma(f)$ служит интегральной мерой чувствительности функции $u(f)$, а вместе с ней и отношения предпочтения $\Re \subseteq F_0 \times F_0$ в состоянии $f = (f_1, ..., f_m)^T \in F_0$, а ее составляющие – это частные показатели чувствительности функции $u(f)$ по отношению к каждому из критериев f_k, $k = 1, ..., m$. Действительно, подобно определению $\sigma(f)$ величины

$$\sigma_k(f) = \frac{\partial u}{\partial f_k}\bigg/\frac{u}{f_k} = \frac{(1/u)}{f_k}\frac{\partial u}{\partial f_k}, \quad k = 1, ..., m, \qquad (11)$$

представляют собой отношение предельной полезности $\partial u/\partial f_k$ к средней полезности u/f_k и характеризуют чувствительность функции полезности, точнее, ее относительное изменение под действием единичного относительного изменения значения критерия f_k, при постоянном значении остальных критериев. Конечно-разностный аналог этих величин имеет вид

$$\sigma_k(f) = (\Delta u/\Delta f_k)/(u/f_k), \quad k = 1, ..., m.$$

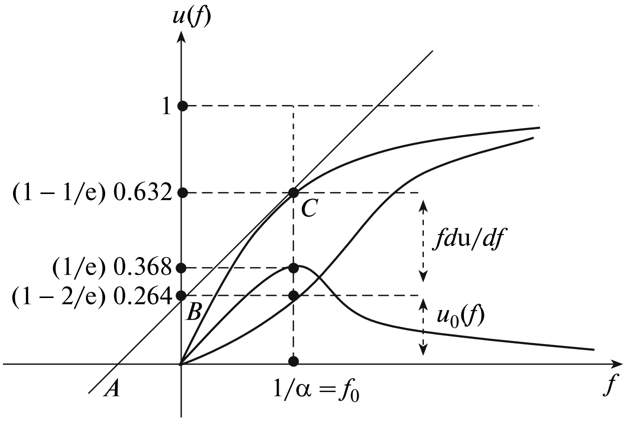

Рис. 1. Графики функций $u(f) = 1 - e^{-\lambda f}$; $v(f) = \sigma(f)u(f) = \lambda f e^{-\lambda f}$; $\sigma(f) = BC/AC = (1/u(f))f\,du/df = \lambda f/(e^{\lambda f} - 1)$; $u_0(f) = u(f) - v(f) = 1 - e^{-\lambda f} - \lambda f e^{-\lambda f}$.

В экономической литературе величины $\sigma_k(f)$ известны как эластичность функции полезности u: $F \to E^1$ относительно критерия f_k, $k = 1, ..., m$.

Переписав (11) в виде

$$\sigma_k(f)u(f) = f_k\partial u/\partial f_k, \quad k = 1, ..., m, \qquad (12)$$

и просуммировав обе части этого выражения, учитывая (10), для $\sigma(f)$ получим аддитивную форму

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^{m}\sigma_i(f). \qquad (13)$$

Она показывает, что величина $\sigma(f)$ характеризует чувствительность функции полезности по отношению к единичным относительным изменениям критериев f_k, $k = 1, ..., m$, причем все σ_k из-за вогнутости функции $u(f)$ принадлежат интервалу (0, 1). Поскольку величины $\sigma(f)$ и $\sigma_k(f)$, $k = 1, ..., m$, являются безразмерными, функции $\sigma(f)u(f)$ и $\sigma_k(f)u(f)$, $k = 1, ..., m$, также представляют собой функции полезности. В частности, функции $v_k(f) = f_k\partial u/\partial f_k = \sigma_k(f)u(f)$, $k = 1, ..., m$, интерпретируются как *дифференциальные полезности*, обусловленные значениями f_k в точке $f = (f_1, ..., f_m)^T$, а функция $v(f) = \sigma(f)u(f) = u(f) - u_0(f)$ – как *дифференциальная составляющая* функции полезности или просто *дифференциальная полезность*. Как будет показано ниже, с помощью этих соотношений можно получить информацию о динамических свойствах искомых многокритериальных решений.

На рис. 1 отображена функция $u(f) = 1 - e^{-\lambda f}$, интенсивностью насыщения которой можно управлять с помощью параметра $\lambda > 0$. Составляющие правой части (7) равны $v(f) = \lambda f e^{-\lambda f}$, $u_0(f) = 1 - e^{-\lambda f}(1 + \lambda f)$, а величина $\sigma(f)$ принимает форму $\sigma(f) = \lambda f/(e^{\lambda f} - 1)$. Наибольшее значение функции $v(f)$ достигается в точке $f^v = 1/\lambda$, в которой $u(f^v) = 1 - 1/e$, $v(f^v) = 1/e$, $u_0(f^v) = 1 - 2/e$. Функция чувствительности $\sigma(f)$ монотонно убывает, принимая в начале координат единичное значение, а в точке $f^v = 1/\lambda$ – значение $\sigma(f^v) = 1/(e - 1)$, приближенно равное 0.582. Характерно, что значение $u(f^v) = 1 - 1/e \approx 0.632$ лишь на величину 0.014 отличается от точки золотого сечения $\tau \approx 0.618$.

Как мера чувствительности целевых переменных относительно управляемых факторов мера относительной чувствительности (или эластичность) считается одним из наиболее употребительных понятий современной экономики, системного анализа, кибернетики (Холл, 1975). Она полезна тем, что безразмерна и позволяет устранить неудобства, обусловленные различием в размерности и масштабах изменения целевых функций решаемой задачи. Кроме того, отношения типа $\sigma_k(f)/\sigma_g(f)$ являются инвариантными относительно конкретного вида функции полезности – свойство, которое играет весьма важную роль в экономическом анализе (Хикс, 1993). Действительно, учитывая (12) и выбирая один из критериев, например первый критерий, в качестве опорного получим уравнение, связывающее отношения соответствующих компонентов векторов $(\sigma_1(f), \ldots, \sigma_m(f))^T$, $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$ и $\mu_k = (\mu_{k1}, \ldots, \mu_{km})^T$ в виде

$$\sigma_k(f^V)/\sigma_1(f) = \left(f_k \partial u/\partial f_k\right)/\left(f_1 \partial u/\partial f_1\right) = \left(f_k/f_1\right)\mu_{k1}, \quad k = 2, \ldots, m, \tag{14}$$

где величины $\mu_{k1} = u_k/u_1 = (\partial u/\partial f_k)/(\partial u/\partial f_1)$, $k = 2, \ldots, m$, представляют собой предельные (или маргинальные) нормы замещения между критериями f_k и f_1, $k = 2, \ldots, m$. Соотношение (14) инвариантно относительно монотонного преобразования функции полезности, так как при переходе от функции $u(f)$ к любой другой монотонно возрастающей функции $\varphi(u)$, $\partial\varphi/\partial u > 0$ величины μ_{k1}, следовательно, и отношения $\sigma_k(f)/\sigma_1(f)$ остаются без изменения, так что эти отношения не зависят от конкретного вида функции полезности. Интерактивные процедуры аппроксимации решений, отвечающих условию $\sigma_k(f)/\sigma_1(f) = 1$, обсуждались в (Саркисян, 2005).

Возвращаясь к выражению (10) и переписав его в виде

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u(f)}{\partial f_i} f_i = \sigma(f) u(f), \tag{15}$$

получим известное уравнение Эйлера об однородности функции полезности степени $\sigma(f)$. Оказывается, что интегральная мера чувствительности $\sigma(f)$ одновременно характеризует степень однородности функции полезности $u(f)$.

Заметим, что числовая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ называется однородной степени r, если для всех точек $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$ из области ее определения и действительных $t > 0$ выполняется равенство $\varphi(tx) = \varphi(tx_1, \ldots, tx_m) = t^r\varphi(x_1, \ldots, x_m)$, где r – действительное число. Предполагается, что точка tx также принадлежит области определения функции $\varphi(x)$. Дифференцируя обе части этого выражения по параметру t и полагая $t = 1$, получим условие теоремы Эйлера

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = r\varphi(x_1, \ldots, x_m).$$

Для функции полезности это уравнение, очевидно, примет форму (11) при $r = \sigma(f)$. Таким образом, функция полезности $u(f)$ удовлетворяет условию однородности степени $\sigma = \sigma(f)$, которое записывается в виде

$$u(tf) = t^{\sigma} u(f), \quad t > 0. \tag{16}$$

Легко показать, что если функция полезности удовлетворяет уравнению Эйлера (15), то она является однородной функцией степени $\sigma = \sigma(f)$. Для этой цели рассмотрим функцию $\varphi(t) = u(tf)/t^{\sigma}$, которая определена и непрерывна при всех $t > 0$. Ее производная $\partial\varphi(t)/\partial t$ также есть дробь, числитель которой равен

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u(tf)}{\partial (tf_i)} tf_i - \sigma u(tf).$$

Заменив в формуле Эйлера (15) вектор f на $tf = (tf_1, \ldots, tf_m)^T$, приходим к выводу, что этот числитель равен нулю, т.е. имеет место уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u(tf)}{\partial (tf_i)} tf_i - \sigma u(tf) = 0, \tag{17}$$

следовательно, $\partial\varphi(t)/\partial t = 0$, или что эквивалентно, $\varphi(t) = \text{const} = c$. Так как $\varphi(1) = u(f)$, для константы c можно записать $c = u(f)$, так что $\varphi(t) = u(f) = u(tf)/t^{\sigma}$, или же $u(tf) = t^{\sigma}u(f), \quad t > 0$, что доказывает справедливость представления (16). Полагая далее в (16) $t = 1/f_1$, получим формулу

$$u(f) = f_1^{\sigma}u(1, f_2/f_1, \ldots, f_m/f_1) = f_1^{\sigma}\phi(f_2/f_1, \ldots, f_m/f_1), \tag{18}$$

где принято обозначение $\phi(f_2/f_1, \ldots, f_m/f_1) = u(1, f_2/f_1, \ldots, f_m/f_1)$. Условие (18) показывает, что функция $u(f)$ зависит от отношений типа f_k/f_1, $k = 1, \ldots, m$.

Наконец, учитывая результат теоремы Эйлера (15), из представления (7) для функции $u(f)$ получим выражение

$$u(f) = u_0(f) + v(f) = u_0(f) + \sigma(f)u(f), \tag{19}$$

откуда следует, что $u_0(f) = (1 - \sigma(f))u(f)$. В представлении (19) функция $u_0(f)$, как и сама функция полезности $u(f)$, монотонно возрастает на множестве F_0, в то время как функция $v(f)$ имеет точку безусловного оптимума–максимума. Ее можно найти, если приравнять к нулю производную $dv(f)/df = \nabla_f u + Hf$, где H – матрица Гессе, состоящая из вторых частных производных функции $u(f)$. По предположению, матрица H отрицательно определена, поэтому существует ее обратная матрица H^{-1}. Следовательно, если обозначить через f^{v} решение уравнения $\nabla_f u + Hf = 0$, то можно записать $f^{v} = -H^{-1}\nabla_f u$. Дифференцируя далее обе части (19), получим $du_0(f)/df = -Hf > 0$ $\forall f \in F_0$, так что функция $u_0(f)$ описывает статические свойства $u(f)$, а функция $v(f)$ – ее динамические свойства.

Если в многокритериальной задаче имеет место независимость по полезности и, следовательно, функция $u(f)$ аддитивна, тогда матрица H становится диагональной, а координаты вектора $f^{v} = -H^{-1}\nabla_f u$ принимают форму $f_k^{v} = -u_k/u_{kk}$, $k = 1, \ldots, m$, т.е. они исключительно определяются отношениями первых и вторых частных производных функции полезности. Небезынтересно отметить, что величина $\sigma_{uk} = -f_k u_{kk}/u_k$ представляет собой показатель кривизны функции полезности, или же эластичность предельной полезности u_k, т.е. $\sigma_{uk} = -(\partial u_k/\partial f_k)/(u_k/f_k)$, следовательно, в случае независимости критериев по полезности в точке f^{v} все коэффициенты σ_{uk}, $k = 1, \ldots, m$, равны единице.

2. ВНУТРЕННИЕ МАКСИМУМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Соотношение (19) дает нам два автономных, но сопряженных друг с другом механизма оптимизации. Один из них – традиционная задача максимизации функции полезности на множестве допустимых решений в виде

$$u(f(x)) \to \max, \quad x \in D. \tag{20}$$

Другой механизм оптимизации, назовем его “*внутренним*”, – максимизация правой или левой части (15) на подмножестве F_u, представляющем собой поверхность безразличия $u(f) = \text{const}$, сводится к решению задачи

$$\sum_{k=1}^{m} f_k \partial u/df_k = u(f)\sigma(f) \to \max, \quad f \in F_u. \tag{21}$$

Задача оптимизации (21) по существу сводится к поиску точек на поверхности $u(f) = \text{const}$ с максимальным значением меры чувствительности $\sigma(f)$. Она возникает из-за необходимости учета динамических свойств многокритериальных альтернатив, связанных как с явлением убывающей эффективности (или полезности) по мере роста значения критериев, так и с возможностью замещения значения критериев при одном и том же уровне предпочтений.

Справедливости ради следует отметить, что все существующие оптимизационные процедуры, которые авторы работы (Дубов, Травкин, Якимец, 1986) условно делят на априорные, апостериорные и адаптивные, в зависимости от механизма определения в них принципа оптимальности, представляют собой ту или иную разновидность задачи (20), правда, без каких-либо соображений об убывающей эффективности решений. Совместное решение этих двух задач дает внутреннюю и внешнюю оптимизацию решений подобно тому, как в математическом программировании две другие, также сопряженные друг с другом, задачи обеспечивают поиск оптимального направления и величины шага вдоль него, формируя тем самым одну из наилучших поисковых стратегий методов возможных направлений (Базара, Шетти, 1982). Как будет показано ниже, задача (21) имеет и самостоятельное назначение.

Задачу (21) можно решить с помощью метода Лагранжа. Для этой цели воспользуемся введенными выше обозначениями для частных производных $u_i = \partial u/\partial f_i$, $u_{ij} = \partial^2 u/\partial f_i \partial f_j$, $i, j = 1, \ldots, m$, и представим соответствующую функцию Лагранжа в виде

$$L(f, \lambda) = \sum_{k=1}^{m} f_k u_k + \lambda(c - u), \tag{22}$$

где λ – неопределенный множитель. Условия теоремы Куна–Таккера для этой функции имеют вид (Базара, Шетти, 1982):

$$\begin{aligned} &\text{а) } \partial L/\partial f_j = u_j + \sum_{k=1}^{m} f_k u_{kj} - \lambda u_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m; \\ &\text{б) } \partial L/\partial \lambda = c - u = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Пусть, как и выше, H – $(m \times m)$-матрица Гессе, состоящая из вторых частных производных функции полезности u_{ij}, а $\nabla_f u$ – ее вектор-градиент, координаты которого представляют собой предельные полезности u_i, т.е. $\nabla_f u = (u_1, \ldots, u_m)^T$. Тогда первые m условия системы (23) можно записать в виде матричного уравнения

$$-Hf = (1 - \lambda)\nabla_f u. \tag{24}$$

Так как матрица H отрицательно определена (условие строгой вогнутости функции полезности), ее обратная матрица H^{-1} существует, поэтому, обозначив решение уравнения (24) через f^c, формально получим решение

$$f^c = -(1 - \lambda)H^{-1}\nabla_f u. \tag{25}$$

В нем как элементы матрицы H^{-1}, так и координаты вектора $\nabla_f u$ в общем случае также зависят от вектора f^c, а значение параметра λ (неопределенного множителя Лагранжа) должно быть определено так, чтобы выполнялось второе условие системы (23), т.е. значения λ характеризуют поверхности уровня функции полезности. Очевидно, что при $\lambda = 1$ точка f^c совпадает с началом координат, где функция полезности имеет нулевой уровень. При $\lambda = 0$ из (25) получаем точку $f^c = -H^{-1}\nabla_f u$, совпадающую с точкой f^v безусловного оптимума функции $v(f) = \nabla_f u^T f$. Как будет показано ниже на примере квадратичной аппроксимации функции полезности, при $\lambda \to -\infty$ точка f^c приближается к точке f^u максимума функции полезности $u(f)$ на множестве F_0. Из (25) следует также, что отношения координат вектора f^c (например, f_k^c/f_1^c, $k = 2, \ldots, m$) уже не зависят от величины λ и совпадают с аналогичными отношениями координат вектора f^v. Другими словами, эти отношения инвариантны относительно поверхности уровня функции полезности (уровня предпочтения). В случае аддитивной функции $u(f)$ матрица H становится диагональной, поэтому эти отношения примут форму $f_k^c/f_1^c = (u_k/u_{kk})/(u_1/u_{11})$, аналогичную отношениям координат вектора f^v.

Для получения интересующих нас соотношений в явном виде необходимо иметь (или построить) конкретное аналитическое выражение для функции $u(f)$. Предложенные ранее для этой цели многочисленные аналитические схемы, которые исходят из возможности применения теории математической аппроксимации для описания многомерной функции полезности, в частности, с помощью так называемых мультипликативно-аддитивных схем типа (Фишберн, 1979)

$$\bar{u}(f_1, \ldots, f_m) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{1j}(f_1)\varphi_{2j}(f_2)\ldots\varphi_{mj}(f_m), \tag{26}$$

обычно считаются достаточно гибкими и вполне приемлемы для представления функции u: $F \to E^1$ без дополнительных требований о независимости целевых функций по полезности в предположении, что функция u: $F \to E^1$ непрерывна, а множества возможных значений критериев представляют собой замкнутые ограниченные выпуклые подмножества конечномерного евклидова пространства. При этом точность аппроксимации оценивается с помощью равномерной нормы

$$\left| u - \overline{u} \right| = \sup \left| u(f) - \overline{u}(f) \right|, \quad f \in F_0. \tag{27}$$

Достаточно простой и вместе с тем весьма полезной с практической точки зрения аппроксимацией функции полезности типа (26) является квадратичная функция

$$u(f) = a^T f + 0.5 f^T Hf, \tag{28}$$

широко распространенная в экономических исследованиях (Интрилигатор, 1975). В ней H – отрицательно определенная $(m \times m)$-матрица, $du(f)/df = a + Hf > 0$. Аппроксимация (28) непосредственно следует из представления функции полезности в виде

$$u(f) = u^0 + 0.5(f - f^0)^T H(f - f^0),$$

где $f \le f^0$, $u^0 = -0.5 f^{0T} Hf^0$, $a = -Hf^0$, $f^0 \in F_0$, – точка пространства F_0, в которую стягиваются все линии предпочтения. По практическим соображениям она приемлема во многих отношениях. С одной стороны, с помощью слагаемых вида $a_k f_k + h_{kk} f_k^2$ можно описать представление об относительной важности критериев f_k, $k = 1, ..., m$, а с помощью слагаемых $f_i f_j h_{ij}$, $i \ne j$, – предполагаемые взаимосвязи между критериями. С другой стороны, она имеет достаточно простую структуру, что позволяет аналитически определить линии предпочтения, которые описываются дифференциальным уравнением $df_k/df_q = u_k/u_q$ для произвольных двух критериев f_k и f_q при фиксированном значении остальных критериев и проходят через точку f^0. В отличие от аппроксимации типа Джири–Стоуна (Аллен, 1980), функция (28) “ориентирована” на потенциальную, но никогда не достигаемую из-за условия $du(f)/df > 0$ цель $f = f^0$.

Дифференциальная составляющая функции (28) равна $v(f) = \nabla_f u^T f = a^T f + f^T Hf$, функция чувствительности (или эластичность) принимает вид

$$\sigma(f) = v(f)/u(f) = (a^T f + f^T Hf)/(a^T f + 0.5 f^T Hf),$$

а составляющая $u_0(f)$ определяется по формуле $u_0(f) = u(f)(1 - \sigma(f)) = -0.5 f^T Hf$. Функция $u(f)$ достигает своего максимума в точке $f^u = -H^{-1}a$ и равна $u(f^u) = -0.5 a^T H^{-1} a$, безусловный максимум функции $v(f)$ достигается в точке f^v, являющейся решением уравнения $-Hf = a + Hf$, и равна $f^v = -0.5 H^{-1} a$, что составляет половину вектора f^u. Так что точка f^v лежит в середине диагонали $[0, f^u]$.

В точке f^v интересующие нас характеристики принимают вид:

$$u(f^v) = -(3/8) a^T H^{-1} a; \quad v(f^v) = -(1/4) a^T H^{-1} a;$$

$$u_0(f^v) = u(f^v) - v(f^v) = -(1/8) a^T H^{-1} a; \quad \sigma(f) = v(f^v)/u(f^v) = 2/3.$$

Значения этих функций в точке f^u равны соответственно:

$$v(f^u) = 0; \quad \sigma(f) = 0; \quad u_0(f^u) = u(f^u) = -0.5 a^T H^{-1}.$$

Таким образом, на отрезке $[0, f^u]$ функции $u(f)$ и $u_0(f)$ монотонно возрастают, функция $v(f)$ монотонно возрастает до точки $f^v = -0.5 f^u$ и далее убывает, достигнув своего нулевого значения в точке f^u. При этом функция чувствительности $\sigma(f)$ монотонно убывает от значения 1 в начале координат до значения 0 в точке f^u.

Рассмотрим теперь значение этих функций в точках наибольшей чувствительности поверхности безразличия $u(f) = \text{const}$. Подставляя значение градиента $\nabla_f u = a + Hf$ в уравнение (24), после несложных преобразований получим $-Hf = \varphi(\lambda) a$, решение которого равно

$$f^c = -\varphi(\lambda) H^{-1} a, \tag{29}$$

где $\varphi(\lambda) = (1-\lambda)/(2-\lambda)$. Как следует из этого выражения, при изменении λ в пределах от 1 до $-\infty$ значения функции $\varphi(\lambda)$ изменятся в пределах от нуля до единицы, при этом точка $f^{\,c}$ "скользит" вдоль диагонали $(0, f^{\,u})$, а интересующие нас функции описываются параметрическими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad u(f^c) = a^T f^c + f^{cT} H f^c = -\psi(\lambda) a^T H^{-1} a;\\
&\text{б)}\quad v(f^c) = f^{cT}\nabla_f u = -(\varphi(\lambda)/(2-\lambda)) a^T H^{-1} a;\\
&\text{в)}\quad u_0(f^c) = u(f^c) - v(f^c) = -\phi(\lambda) a^T H^{-1} a;\\
&\text{г)}\quad \sigma(f^c) = v(f^c)/u(f^c) = 2/(3-\lambda);\\
&\text{д)}\quad \nabla_f u\,(f^c) = a/(2-\lambda),
\end{aligned}\tag{30}$$

где $\psi(\lambda) = 0.5(3-\lambda)(1-\lambda)/(2-\lambda)^2$, $\phi(\lambda) = 0.5\varphi^2(\lambda)$.

Из формул этой системы следует, что функции $u(f^c)$ и $u_0(f^c)$ монотонно возрастают, функция $v(f^c)$ имеет максимум при $\lambda = 0$, а $\sigma(f^c)$ и $\nabla_f u(f^c)$ монотонно убывают до нулевого значения. В частности,

при $\lambda = 1$ (точка $f^{\,c} = 0$) $u(f^c) = v(f^c) = u_0(f^c) = 0$, $\sigma(f^{\,c}) = 1$, $\nabla_f u(f^{\,c}) = a$;

при $\lambda = 0$ (точка $f^{\,c} = 0.5f^{\,u}$) $u(f^c) = -3/8a^T H^{-1}a$, $v(f^c) = -0.25a^T H^{-1}a$, $u_0(f^{\,c}) = -0.125a^T H^{-1}a$, $\sigma(f^{\,c}) = 2/3$, $\nabla_f u(f^c) = 0.5a$;

при $\lambda = -\infty$ (точка $f^{\,c} = f^{\,u}$) $u(f^c) = -0.5a^T H^{-1}a$, $v(f^c) = 0$, $u_0(f^c) = u(f^c) = -0.5a^T H^{-1}a$, $\sigma(f^c) = 0$, $\nabla_f u(f^c) = 0$.

Особый интерес на отрезке $(0, f^{\,u})$ представляют отношения:

$$\begin{aligned}
&\text{е)}\quad f_k^{\,c}/f_1^{\,c} = (H^{-1}a)_k/(H^{-1}a)_1,\quad k = 2, \ldots, m;\\
&\text{ж)}\quad \sigma_k/\sigma_1 = a_k(H^{-1}a)_k/a_1(H^{-1}a)_1,\quad k = 2, \ldots, m;\\
&\text{з)}\quad \mu_{k1} = u_k/u_1 = a_k/a_1,\quad k = 2, \ldots, m,
\end{aligned}\tag{31}$$

которые уже не зависят от параметра λ. Другими словами, они на диагонали $(0, f^{\,u})$ остаются инвариантными относительно уровня функции полезности (уровня предпочтения). Согласно формулам г) и д) значения $\sigma(f^c)$ и $\nabla_f u(f^c)$ в точках внутреннего оптимума $f^{\,c}$ монотонно убывают от единицы в начале координат до нуля в точке $f^{\,u}$. Благодаря соотношениям (Саркисян, 2000) $\mu_{k1} = Df_k(x, e)/Df_1(x, e)$, $k = 2, \ldots, m$, где $Df_k(x, e)$ – производная функции $f_k(x)$ в точке x по направлению e, пропорции (31) непосредственно индуцируются в пространстве решений $D \subseteq E^n$.

В условиях конкретной задачи внутренняя оптимизация (21) может привести к пропорциям и связям, которые больше отвечают нашим предпочтениям с точки зрения их согласованности с возможностями и ограничениями объективной модели оптимизируемой системы, чем другие. Эта концепция в практических задачах служит руководящим принципом, который своими корнями уходит в этическую систему стоицизма и широко применяется в системотехнике (Холл, 1975).

В (Саркисян, 2005) отмечалось, что многокритериальная оптимизация затрагивает, а в действительности и формирует, различные базовые аспекты (или грани) строения и функционирования разрабатываемых или подлежащих совершенствованию систем и их компонентов. Поэтому как структурные, так и функциональные параметры рекомендуемых к действию моделей объектов оказываются весьма чувствительными к определенным пропорциям и соотношениям для желательных значений критериев качества. Многокритериальные задачи не являются чисто математическими объектами (такими как, например, преобразования Лоренца в физике). В этих задачах системотехники мы ищем соотношения и пропорции, представляющие бóльшую "управленческую" ценность, чем другие, так как *они создают гармонию, повышают жизнеспособность систем и эффективность их функционирования*. Аналогии более приемлемых пропорций и соотношений между базовыми параметрами естественных и искусственных систем находим в различных областях современных знаний и научных поисков, в частности, в астрофизике (Гивишвили, 2000), теории личности (Хьелл, Зиглер, 2005), психосинтезе (Ассаджиоли, 2002), экономике (Интрилигатор, 1975).

Представляется, что порождаемый задачей (21) эффект аналогичен известному в современной науке *эффекту синергии*, который возникает в результате согласованного и совместного действия различных факторов и явлений в системах естественного и искусственного происхождения. Ее решение позволяет обеспечить внутреннюю согласованность и совместность значений критериев с учетом наибольшей чувствительности искомых решений. Внутренняя согласованность играет весьма важную роль в задачах экономики (Занг, 1999), корпоративного управления (Касселз, 2001), бизнеса (Кемпбел, Лачс, 2004) и возникает в определенных ситуациях, когда множество составных элементов системы взаимодействуют совместно и согласованно. Отметим, что наш фрактальный мир ("локально случайный и глобально детерминированный" (Петерс, 2004)) вряд ли избавит нас от необходимости дальнейшего упорядочения решений задачи (20) даже в самых образцовых ситуациях. Тогда с помощью (21) можно обеспечить внутреннюю согласованность решений, отвечающих желательному уровню полезности (или предпочтения).

3. ЛИНИИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Покажем, что в случае $m = 2$ линии предпочтения функции (28) представляют собой семейство прямых, стягивающихся в точку f^u, образуя карту предпочтений, а одна из этих линий совпадает с отрезком $(0, f^u)$. Действительно, так как в этом случае

$$u_1 = a_1 + h_{11}f_1 + h_{12}f_2, \quad u_2 = a_2 + h_{21}f_1 + h_{22}f_2,$$

уравнение линий предпочтения принимает форму

$$df_2/df_1 = u_2/u_1 = (a_2 + h_{21}f_1 + h_{22}f_2)/(a_1 + h_{11}f_1 + h_{12}f_2). \tag{32}$$

Обозначим для удобства $df_2/df_1 = dy/dx = y'_x$ и перепишем (32) в виде

$$(y + ax + b)y'_x = \alpha y + \beta x + \gamma, \tag{33}$$

где $a = h_{11}/h_{12}$, $b = a_1/h_{12}$, $\alpha = h_{22}/h_{12}$, $\beta = h_{12}/h_{21} = 1$, $\gamma = a_2/h_{12}$. Обозначим $y = (a + \alpha)w + ax + b$, тогда уравнение (33) можно представить в виде

$$ww'_x = w + Ax + B, \tag{34}$$

где $A = (\beta - a\alpha)/(a + \alpha)^2$, $B = (\gamma - b\alpha)/(a + \alpha)^2$. Решение дифференциального уравнения (34) находим в параметрической форме (Зайцев, Полянин, 1995):

$$\begin{aligned} x &= c\exp\Big(-\int\tau/(\tau^2 - \tau - A)d\tau\Big) - BA, \\ w &= c\tau\exp\Big(-\int\tau/(\tau^2 - \tau - A)d\tau\Big), \end{aligned} \tag{35}$$

где c – константа. Решение (35) в обозначениях x и y примет вид:

$$\begin{aligned} x &= c\exp\Big(-\int\tau/\big(\tau^2 - \tau - A\big)d\tau\Big) - BA, \\ y &= ((a + \alpha)\tau - a)c\exp\Big(-\int\tau/\big(\tau^2 - \tau - A\big)d\tau\Big) + (aB/A - b). \end{aligned} \tag{36}$$

Пусть

$$\begin{aligned} x_0 &= -B/A = (h_{22}a_1 - h_{12}a_2)/(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}), \\ y_0 &= aB/A - b = (a_1h_{12} - a_2h_{11})/(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}), \\ k(\tau) &= (a + \alpha)\tau - a = ((h_{11} + h_{22})\tau - h_{11})/h_{12}, \end{aligned}$$

тогда запишем решение (36) в виде

$$y - y_0 = k(\tau)(x - x_0). \tag{37}$$

Координаты x_0 и y_0, как нетрудно заметить, совпадают с координатами вектора f^u, поэтому (37) представляет собой уравнение семейства прямых линий, проходящих через точку с координатами $f^u = (x_0, y_0)^T$. При $k(\tau) = y_0/x_0$ уравнение (37) совпадает с отрезком прямой $(0, f^u)$. Иллюстрируем вид уравнения (37) на примере функции $u(f) = 45f_1 + 65f_2 - f_1^2 - f_1 f_2 - 3/2f_2^2$, частные производные которой равны $u_1 = 45 - 2f_1 - f_2$, $u_2 = 65 - f_1 - 3f_2$, а уравнение линий предпочтения принимает вид $df_2/df_1 = (65 - f_1 - 3f_2)/(45 - 2f_1 - f_2)$. Для этого случая дифференциальное уравнение (33) имеет форму $(y + 2x - 45)y'_x = 3y + x - 65$, следовательно, $(a + \alpha)^2 = 25$, $(\beta - a\alpha) = -5$, $(\gamma - b\alpha) = 70$, $A = -1/5$, $B = 14/5$, $B/A = -14$, $x_0 = 14$, $y_0 = 17$, $k(\tau) = 5\tau - 2$. Подставляя эти значения параметров в уравнение (37), получим $y - 17 = (5\tau - 2)(x - 14)$. При $5\tau - 2 = 17/14$, т.е. $\tau = 9/14$ эта прямая проходит через начало координат и точку с координатами $(14, 17)^T$. Точка $(x_0, y_0)^T = = (14, 17)^T$ совпадает с точкой безусловного максимума функции $u(f)$, равной $f^u = (14, 17)^T$.

В задаче внутренней оптимизации (21) пара (c, L_c), где c – фиксированный уровень функции полезности (уровень предпочтения), L_c – касательная гиперплоскость, играет такую же роль, как производственная функция и функция затрат в теории производства, или же функция полезности и бюджетная линия в теории индивидуального спроса (Холл, 1975). Представляя уравнение гиперплоскости L_c в виде

$$\sum_{k=1}^{m} f_k p_k = r, \tag{38}$$

приходим к выводу, что величину r можно интерпретировать как системный ресурс, который необходим для обеспечения заданного уровня целевых функций (функций качества) f_k, $k = 1, \ldots, m$, а величины p_k, $k = 1, \ldots, m$, – как “цены” единиц соответствующих показателей качества. Так как в точках касания гиперплоскости и поверхности безразличия (или подмножества F_u) имеют место уравнения

$$du = \sum_{k=1}^{m} u_k df_k = 0; \quad dr = \sum_{k=1}^{m} p_k df_k = 0, \tag{39}$$

величины u_k и p_k, $k = 2, \ldots, m$, будут связаны друг с другом соотношениями

$$u_k/p_k = u_1/p_1, \quad k = 2, \ldots, m. \tag{40}$$

Формально можно из этих $m - 1$ уравнений и соотношения (38) вывести выражение для функций критериев в виде $f_k = F_k(r, p_1, \ldots, p_m)$. Тогда вид касательной плоскости (38) подсказывает, что эти функции должны быть однородными функциями нулевого порядка, т.е.

$$F_k(\lambda r, \lambda p_1, \ldots, \lambda p_m) = F_k(r, p_1, \ldots, p_m), \tag{41}$$

следовательно, согласно теореме Эйлера для них имеет место уравнение

$$r\partial f_k/\partial r + p_1 \partial f_k/\partial p_1 + \ldots + p_m \partial f_k/\partial p_m = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{42}$$

Разделив эти уравнения на f_k, получим соотношение, связывающее показатели эластичности каждой функции критериев относительно ресурса r и “цен” p_k, $k = 1, \ldots, m$:

$$\sigma_r + \sigma_{k1} + \sigma_{k2} + \ldots + \sigma_{km} = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{43}$$

где σ_r – эластичность функции f_k относительно ресурса; $\sigma_{k1}, \ldots, \sigma_{km}$ – соответствующие эластичности относительно “цен”. Это уравнение в точности совпадает с аналогичным соотношением из экономической теории для эластичности потребления по доходу и ценам (Холл, 1975).

4. МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Используя меры относительной чувствительности (или эластичность), можно построить аппроксимацию функции полезности в мультипликативной форме, которую можно использовать в приближенных расчетах. Заметим, что полный дифференциал функции полезности представляется в виде

$$du = \sum_{k=1}^{m} (\partial u/\partial f_k) df_k. \tag{44}$$

Преобразуя правую часть этого выражения в виде

$$\sum_{k=1}^{m}(\partial u/\partial f_k)df_k = \sum_{k=1}^{m} f_k(\partial u/\partial f_k)(df_k/f_k) = u\sum_{k=1}^{m}\sigma_k(df_k/f_k), \tag{45}$$

из (44) получим соотношение

$$du/u = \sum_{k=1}^{m}\sigma_k df_k/f_k, \tag{46}$$

которое, очевидно, эквивалентно дифференциальному уравнению

$$d\ln u = \sum_{k=1}^{m}\sigma_k d\ln f_k. \tag{47}$$

Образуем теперь около "*рабочих*" точек пространства оценок F зоны пропорциональности между величиной предельной полезности $\partial u/\partial f_k$ и средней полезности u/f_k и предположим, что в этих зонах величина σ_k не зависит от f_k. Тогда величину σ_k в правой части (47) можно ввести под знак дифференцирования, что позволит после интегрирования и несложных преобразований получить для функции полезности мультипликативную форму

$$u(f) = a_0\prod_{k=1}^{m} f_k^{\sigma_k}, \tag{48}$$

где a_0 – масштабный коэффициент. Для того чтобы эта функция удовлетворяла условиям (4), достаточно, чтобы величины σ_k, $k = 1, \ldots, m$, принадлежали интервалу (0, 1). Кроме того, для вогнутости функции $u(f)$ достаточно, чтобы определители первого, второго и т.д. порядков матрицы Гессе этой функции, согласно общей теории, были попеременно отрицательными и положительными (Холл, 1975). Функция (48) является однородной степени $\sigma(f) = \sigma_1 + \ldots + \sigma_m$, т.е.

$$u(tf) = t^{\sigma}u(f) = f_1^{\sigma}\,\phi(f_2/f_1, \ldots, f_m/f_1), \tag{49}$$

где $\phi(f_2/f_1, \ldots, f_m/f_1) = a_0\prod_{k=2}^{m}(f_k/f_1)^{\sigma_k}$, а в качестве параметра t выбрана величина $1/f_1$.

Модель (48) является простой и удобной формой представления функции полезности с учетом мер чувствительности $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Она, очевидно, также является частным случаем мультипликативно-аддитивных схем типа (26) и обладает достаточной гибкостью. По-видимому, именно аналогичные соображения по поводу приближенного представления исследуемых функций с помощью меры чувствительности (или эластичности) привели экономиста Дугласа и математика Кобба к открытию в 1920-х годах известной в экономической теории производственной функции вида $Y_t = F(K_t, L_t) = a_0K_t^{\alpha}L_t^{\beta}$, которая описывает взаимосвязь между факторами производства (капиталом и трудом) и доходом фирмы. При необходимости учета роли научно-технического прогресса эта взаимосвязь записывается в виде $Y_t = F(K_t, L_t) = a_0K_t^{\alpha}L_t^{\beta}e^{\chi t}$. Авторы работы (Кубонива, Табата, Хасэбэ, 1991) называют эту функцию "чемпионом" среди других аналитических формул для описания производственной функции и функции полезности. Предполагается, что параметры α, β и γ постоянны на всем пространстве значений производственных факторов.

5. ПРИМЕРЫ ДЛЯ ПРИЛОЖЕНИЙ

5.1. Модель "Доходность – риск". В мировой практике при инвестировании финансовых средств принято оценивать надежность этих активов с помощью критериев доходности и риска (Бригхем, Гапенски, 2004). Считается, что модель оценки доходности финансовых активов CAMP дает точный и однозначный ответ на вопрос, какая доходность необходима для компенсации данного уровня риска, однако в этих оценках всегда присутствует некоторый диапазон вариации.

На рис. 2 левая фигура изображает зависимость между доходностью r и риском ρ инвестиционного проекта с характерной "северо-западной" границей множества оценок, называемой эффективной. Через r_m и ρ_m обозначены нижние пределы изменения оценок, а через r_M и ρ_M – верх-

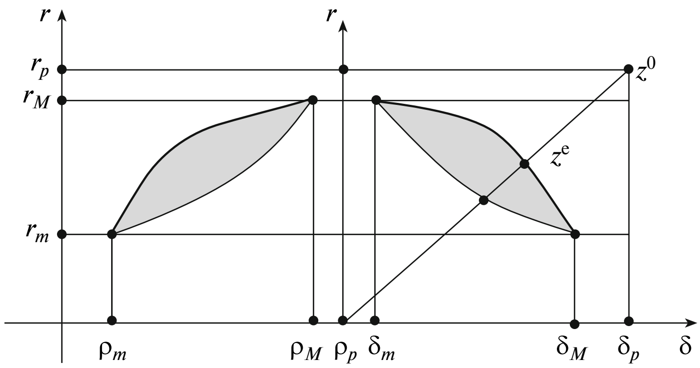

Рис. 2. Модель "доходность – риск" и ее преобразование: r_p , ρ_p – потенциальные уровни доходности и риска; преобразование $\delta = \rho_p - \rho$ "поворачивает" эффективную границу множества оценок $z = (r, \delta)^T$ на "северо-восток", диагональ $(0, z^0)$ выделяет наиболее чувствительные оценки.

ние пределы. Если выбрать *потенциальные* пределы изменения r_p и ρ_p и осуществить преобразование $\delta = \rho_p - \rho$, получим картину, изображенную на правой части рисунка. Эффективная граница множества оценок $Z = \{z/z = (r, \delta)^T\}$ уже направлена на "северо-восток" и соответствует направлению возрастания предпочтений по осям переменных r и δ. В новой системе координат вектор $z^0 = (r_p, \delta_p)^T$ характеризует потенциальную точку, в которой стягиваются все линии предпочтений. Аппроксимируем на множестве $Z^0 = [0, r_p]\ x\ [0, \delta_p]$ функцию полезности вектора $z = (r, \delta)^T$ в виде $u(z) = a^Tz + 0.5z^THz$, где $a = -H^{-1}z^0$, H – отрицательно определенная матрица, $a + Hz > 0$. Тогда максимизация дифференциальной составляющей $v(z) = \nabla_z u^Tz = a^Tz + z^THz$ на поверхности уровня $u(z) = \text{const}$ приведет к решению $z^c = -\varphi(\lambda)H^{-1}a$, $\varphi(\lambda) = (1 - \lambda)/(2 - \lambda)$, которое при различных значениях параметра λ , $-\infty \le \lambda \le 1$, имитирует точки отрезка $(0, z^0)$. Часть этих точек принадлежит множеству оценок Z, и так как для них величина $\sigma(z)$ наибольшая, следует остановить выбор именно на них, к тому же точка $z^e \in \pi(Z)$ является эффективной, так как лежит на эффективной границе $\pi(Z)$ множества оценок Z.

5.2. Чувствительные точки производственной функции. В моделях макро- и микроэкономики производственная функция $y = F(q_1, ..., q_n)$ служит для выражения технологической связи между производственными факторами (произведенными затратами) $q_1, ..., q_n$ и выпуском продукции (или доходом) y. В предположении, что существует выпуклая область производственных затрат, называемая *особой* областью (Интрилигатор, 1975), для которой справедливы соотношения $\partial F/\partial q_k > 0$, $\partial^2 F/\partial q_k^2 < 0$, $k = 1, ..., n$, а матрица Гессе H, состоящая из вторых частных производных производственной функции, отрицательно определена, эта функция оказывается вогнутой. Следовательно, ее можно представить в виде

$$F(q) = F_0(q) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(q)}{\partial q_i} q_i = F_0(q) + \sigma(q)F(q), \tag{50}$$

где $F_0(q)$ – высота пересечения опорной гиперплоскости с осью функции $F(q)$, $\sigma(q)$ –величина относительной чувствительности (эластичность) функции $F(q)$ (локальный показатель ее изменения от расширения масштаба производства), которая равна

$$\sigma(q) = \lim_{t \to 1} \frac{t}{F(tq)} \frac{dF(tq)}{dt} = (1/F(q)) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(q)}{\partial q_i} q_i. \tag{51}$$

Следовательно, функция $F(q)$ однородна степени $\sigma(q)$, т.е. $F(tq) = t^\sigma F(q)$, $t > 0$. Поэтому, выбрав $t = 1/q_1$, функцию можно представить в виде $F(q) = q_1^\sigma \phi(1, q_2/q_1, ..., q_n/q_1)$. Кроме того, $v(q) = \sigma(q)F(q)$, как второе слагаемое в (50), достигает на поверхности уровня $F(q) = \text{const}$ своего максимума в точках, удовлетворяющих уравнению $-Hq = (1 - \lambda)\nabla_q F$. Решение q^c этого уравнения характеризует наиболее чувствительные точки поверхности $F(q) = \text{const}$, которые зависят от неопределенного множителя Лагранжа λ, $-\infty \le \lambda \le 1$.

Широко распространенные в аналитических моделях производственные функции типа Кобба–Дугласа $F(q) = a_0\prod_{k=1}^{n} q_k^{\alpha_k}$, $\alpha_k \ge 0$, $k = 1, \ldots, n$, и постоянной эластичности замещения $F(q) = a_0(\alpha K^{-p} + \beta L^{-p})^{-m/p}$, $a_0, m > 0, p \ge -1$, таковы, что для них величина $\sigma(q)$ постоянна во всех точках поверхности $F(q) = \text{const}$: для первой функции $\sigma(q) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, а для второй функции $\sigma(q) = m$. Понятно, что такое положение не может иметь место во всех точках выпуклого множества $\{q \in E^n / F(q) \ge c\}$. Если воспользоваться аппроксимацией производственной функции в виде $F(q) = F_0\prod_{k=1}^{n}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha_k q_k})$, можно обнаружить, что точки с максимальным значением $\sigma(q)$ имеются на всех изоквантах, причем эти значения убывают по мере роста значения производственных факторов. Для наглядности рассмотрим случай двух факторов:

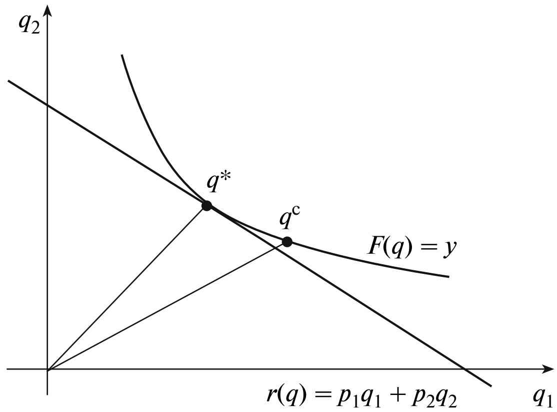

Рис. 3. Линия уровня производственной функции $F(q) = y$, точка минимума функции затрат q^* и точка максимума чувствительности $q^c = \operatorname{argmax} v(g)$.

$$F(q) = F_0(1 - \mathrm{e}^{-\alpha_1 q_1})(1 - \mathrm{e}^{-\alpha_2 q_2}),\ \alpha_1, \alpha_2 > 0,\ (\mathrm{e}^{\alpha_1 q_1} - 1)(\mathrm{e}^{\alpha_2 q_2} - 1) > 1.$$

Мера чувствительности этой функции равна $\sigma(q) = \sigma_1(q) + \sigma_2(q) = u/(\mathrm{e}^u - 1) + v/(\mathrm{e}^v - 1)$, $u = \alpha_1 q_1$, $v = \alpha_2 q_2$, а функция $v(q) = \nabla_q F^T q = \sigma(q)F(q)$ достигает своего максимума в точках поверхности $F(q) = \text{const}$, являющихся решением уравнения $-Hq = (1 - \lambda)\nabla_q F$, где λ – неопределенный множитель Лагранжа. Для фиксированного значения λ эти решения сводятся к следующим, легко проверяемым уравнениям $u - v/(\mathrm{e}^v - 1) = (1 - \lambda)$, $v - u/(\mathrm{e}^u - 1) = (1 - \lambda)$, из которых следует соотношение $u/(1 - \mathrm{e}^{-u}) = v/(1 - \mathrm{e}^{-v})$. Функция $y = u/(1 - \mathrm{e}^{-u})$ принимает в точке $u = 0$ единичное значение, а по мере возрастания u она асимптотически стремится к линии $y = u$. Другими словами, по мере возрастания q_1 и q_2 чувствительные точки линии $F(q) = \text{const}$ приближаются к лучу $\alpha_1 q_1 = \alpha_2 q_2$. В этих точках функции $\sigma_1(q) = u/(\mathrm{e}^u - 1)$, $\sigma_2(q) = v/(\mathrm{e}^v - 1)$ и $\sigma(q) = \sigma_1(q) + \sigma_2(q)$ монотонно убывают, причем отношение $\sigma_1(q)/\sigma_2(q) = \mathrm{e}^v/\mathrm{e}^u$ стремится к единице, как и в начале координат.

Пусть p_k, $k = 1, \ldots, n$, – рыночные цены производственных факторов. Тогда для заданного уровня производства $y_0 = F(q)$ функция затрат факторов $r(q) = p^T q$ достигнет своего минимума в точке q^*, координаты которой удовлетворяют условиям теоремы Куна–Таккера $p_k - \lambda\partial F(q^*)/\partial q_k = 0$; $k = 1,\ldots, n$; $y_0 = F(q^*)$. Умножая первое из этих уравнений на q_k^* и суммируя результаты по всем $k = 1, \ldots, n$, получим соотношение

$$r^* = r(q^*) = \lambda y_0 \sigma(q^*). \tag{52}$$

Этот результат отличается от известной ранее связи между r^* и $y_0 = F(q^*)$ тем, что в нем присутствует множитель $\sigma(q^*)$, который необязательно равен единице, поэтому предельные затраты $\partial r^*/\partial y_0$ равны произведению $\lambda\sigma(q^*)$, а не множителю Лагранжа λ (Холл, 1975). В почти двойственной задаче максимизации полезности благ $u(q)$ при бюджетном ограничении $p^T q \le I$ соответствующие условия теоремы Куна–Таккера $\partial u(q^*)/\partial q_k - \lambda p_k = 0$; $k = 1,\ldots, n$; $p^T q^* = I$, также порождают соотношение $\sigma(q^*)u(q^*) = \lambda p^T q^* = \lambda I$, откуда следует, что $\partial u(q^*)/\partial I = \lambda/\sigma(q^*)$. В точке q^c поверхности $F(q) = y_0$, где функция $v(q) = \nabla_q F^T q = \sigma(q)F(q)$ достигает своего максимума, уровень функции затрат составляет $r^c = r(q^c) = p^T q^c$. Эта ситуация изображена на рис. 3.

Представляется разумным согласиться на уступки по затратам на величину $r^c - r^* = p^T(q^c - q^*)$ для того, чтобы иметь более "удачное" состояние q^c. Аналогичная ситуация, разумеется, имеет место и в задаче потребительского выбора, когда вместо решения q^* рекомендуется решение q^c, соответствующее максимальному значению $\sigma(q^c)$. Отметим, что, рассмотрев в качестве производственных факторов капитал K_t и труд L_t и интерпретировав величины $L_t\partial F/\partial L_t$ и $K_t\partial F/\partial K_t$

как доход с фактора труда (суммарная заработная плата наемных работников) и фактора капитала, соответственно (Бугаян, Сумбатян, 2000), необходимо в экономических терминах интерпретировать и величину $F_0(K_t, L_t) = F(K_t, L_t) - L_t\partial F/\partial L_t - K_t\partial F/\partial K_t$, которая, как нам представляется, позволит по-новому объяснить суть *золотого правила накопления* Фелпса.

5.3. Качество жизни и задача совершенствования социально-экономической политики. Исследования, проводимые с целью выявления и оценки связей между интегральными характеристиками качества и образа жизни населения, с одной стороны, и характеристиками проводимой правительством социально-экономической политики, с другой, играют весьма важную роль в повышении эффективности управления на уровне государства и его ключевых институтов власти. Эти исследования имеют также международный подтекст: по их результатам проводится сравнительный анализ стран и регионов, строятся различные рейтинги, выявляются и описываются тенденции, необходимые для согласования решений и действий национальных правительств различных стран при планировании и реализации совместных международных проектов и программ. В известном проекте "World Competitiveness Project" (Международный институт управления развитием, г. Лозанна) среди ключевых синтетических категорий качества и образа жизни называются: *уровень социального единения* (*согласия*) *в обществе*; *уровень устойчивого развития*; *качество жизни населения*, *а также различные синтетические характеристики уровня развития институциональных структур*, *влияния на конкурентоспособность национальной экономики*, *обеспечения безопасности и неприкосновенности частной собственности*, *экономики знаний*, *наличия теневой экономики и другие*.

Задача управления качеством жизни, как и задача управления любым другим объектом нашего познания, содержит три взаимосвязанных элемента: текущее состояние объекта управления (S_0), его целевое состояние (S_G) , стратегию (S) как совокупность управленческих мероприятий (подходов, решений и действий), необходимых для преобразования состояния $S_{0,}$, в котором находится объект в настоящее время, в целевое состояние S_G в будущем. Важным этапом построения такой модели являются выбор и методология измерения представительного набора обобщенных показателей (интегральных индикаторов) качества жизни и статистических показателей, которые выступают и как характеристики проводимой правительством политики, и как инструмент принятия важнейших управленческих решений по социальному, экономическому и демографическому развитию страны и ее регионов. Концепция управления, разработанная в работах (Айвазян, 2003, 2007), в качестве ключевых интегральных индикаторов качества жизни содержит измерители таких синтетических категорий, как *качество населения*, *уровень материального благосостояния*, *качество социальной сферы*, *качество экологической ниши*, *природно-климатические условия*. Необходимые для управления связи между интегральными индикаторами качества жизни $\{y_k\}$ и соответствующими наборами показателей $\{x_j\}$, которые характеризуют проводимую социально-экономическую политику и институциональное развитие страны, строятся на основе доступных данных, информации и знаний в виде линейных (или линейных в логарифмах) регрессионных уравнений вида $y_k = b_{0k} + b^{kT}x$, где y_k – результирующие синтетические категории качества и образа жизни; $x = (x_1, ..., x_n)^T$ – "объясняющие" переменные; $b^k = (b_{k1}, ..., b_{kn})^T$ – оценки параметров β^k соответствующих регрессионных моделей; $k = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$.

Эти соотношения могут быть положены в основу выбора действенных механизмов воздействия на объект управления, отражающего социальные предпочтения проводимой правительством политики с учетом желательных и достижимых уровней и пропорций между интегральными категориями. Процессам и явлениям социальной сферы свойственны нелинейность, большая неопределенность, сложные и трудно предсказуемые отношения и связи, а многие ситуационные переменные и факторы носят качественный характер и не измеряются по шкале отношений. Тем не менее эмпирическая верификация построенных связей и отношений дает основание надеяться, что сделанные на их основе выводы реалистичны и корректны и могут быть рекомендованы для целей описания, предсказания и управления. Представляя социальные предпочтения относительно интегральных индикативных категорий с помощью функции ценности или полезности u: $Y \to E^1$, где $Y \subset E^m$ – множество возможных значений вектора $y = (y_1, ..., y_m)^T$, и воспользовавшись разложением ее в виде $u(y) = u_0(y) + \nabla_y u^T y$, можно сформулировать задачу максимизации дифференциальной составляющей $v(y) = \nabla_y u^T y = \sigma(y)u(y)$ на поверхности $u(y) = \mathrm{const}$, соответствующей заданному уровню социальных предпочтений, с целью нахождения наилучшего направления изменения интенсивности социальных предпочтений $y^c = \mathrm{argmax}\ v(y)$. Отношения $\sigma_k(y^c)/\sigma_1(y^c) = (y_k{}^c/y_1{}^c)\mu_{k1}$ дают приемлемые оценки для маргинальных норм замещения $\mu_{k1} = u_k/u_1$, $k = 1, ..., m$, которые, в свою очередь, служат механизмом оценки направления возрастания интенсивности социальных предпочтений в пространстве "объясняющих" переменных $x_1,..., x_n$ благодаря соотношениям $\mu_{k1} = Dy_k(x; e)/Dy_1(x; e) = b^{kT}e/ b^{1T}e$, $k = 2, ..., m$, где $Dy_k(x; e) = b^{kT}e$ – производная функции y_k в точке x по направлению e (Саркисян, 2000). Это означает, что вектор-направление e можно определить из условий $(b^k - \mu_{k1} b^1)^T e=0$, $k = 1, ..., m$. При интервальном оценивании величин $\mu_{k1} \in (\mu_{k, min}, \mu_{k, max})$ эти условия приобретают форму $(b^k - \mu_{k, min} b^1)^T e \geq 0$, $(b^k - \mu_{k, max} b^1)^T e \leq 0$, $k = 2, ..., m$. Множество

$$\Re_0 = \{e \in E^n / (b^k - \mu_{k, min} b^1)^T e \geq 0, (b^k - \mu_{k, max} b^1)^T e \leq 0, \quad k = 1, ..., m\}$$

называется конусом предпочтений. Если определяющие его ограничения совместны и, следовательно, $\Re_0 \neq \varnothing$, то каждое направление $e \in \Re_0$ представляет собой направление наискорейшего возрастания социальных предпочтений в пространстве "объясняющих" переменных $x_1,..., x_n$, а угол θ_k между вектором b^k и e будет характеризовать интенсивность изменения соответствующего критерия качества жизни y_k по этому направлению. Мерой этой интенсивности служит величина $\cos \theta_k = b^{kT}e/||b^k||$, которую можно назвать "направляющим косинусом" проводимой социальной политики. Их отношение, очевидно, имеет такую же размерность, как и μ_{k1}, т.е. $\cos\theta_k / \cos\theta_1 = \mu_{k1} / (||b^1||/||b^k||)$, и характеризует относительный вес (или важность) синтетических категорий y_k и y_1, $k = 2, ..., m$. Эти соотношения и связи могут быть положены в основу процедур оценки фактического состояния и структуры проводимой социальной политики и служат основой для эффективного социального планирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поиск и реализация практически значимых решений прикладных многокритериальных задач связаны с адекватным представлением и описанием наших предпочтений с помощью соответствующей функции полезности. Эти творческие усилия хотя бы в финальной стадии процедуры оптимизации и выбора позволяют максимально уменьшить неопределенность и несравнимость среди компромиссных решений и осуществить необходимый выбор. Однако как наши предпочтения, так и моделирующие их функции полезности подчинены действию убывающей эффективности (или полезности), поэтому необходимо, чтобы это явление должным образом оценивалось и учитывалось в интерактивных поисковых процедурах и моделях.

Построенные в работе аналитические соотношения показывают, что конструктивным механизмом для оценивания и учета этого важного фактора анализа решений выступает мера чувствительности функции полезности, характеризующая относительное ее изменение при единичном относительном изменении значений критериев. Одновременно эта мера выступает в качестве степени однородности функции полезности, благодаря чему она становится функцией, зависящей от отношений критериев.

Вогнуто возрастающее свойство функции полезности позволяет разложить ее (декомпозировать) на составляющие, одна из которых, названная нами дифференциальной составляющей (или дифференциальной полезностью), характеризует динамическое поведение предпочтений и полезности, интенсивность их изменения вдоль произвольного направления пространства критериев. Максимизация этой составляющей на *поверхности уровня* функции полезности (поверхности безразличия) порождает траекторию решений наибольшей чувствительности, отношения координат которых инвариантны относительно уровня предпочтений (или полезности). Это обстоятельство может служить *аналитическим дополнением* для принципа "удовлетворительных решений" Г. Саймона в реальных жизненных ситуациях, при поиске и реализации гибких и адаптируемых решений, вместо "оптимальных" решений (например, в смысле парето-оптимальности).

Соотношения, моделирующие убывающую эффективность многокритериальных альтернатив, и построенные на их основе выводы иллюстрированы на примере квадратичной аппроксимации функции полезности. Доказано, в частности, что для этого случая внутренняя оптимизация дифференциальной полезности порождает точки наибольшей чувствительности, которые принадлежат главной диагонали пространства критериев, а карта предпочтений превращается в семейство прямых линий, стягивающихся в точке с потенциальным значением критериев. Показано также, что меры чувствительности позволяют строить для функции полезности аппроксимацию в мультипликативной форме, пригодную для приближенных расчетов.

Наиболее плодотворно результаты работы могут быть применены в проектном анализе, оптимизации объектов и систем в энергетике, выработке рациональных решений в социально-экономических и общественных системах, в технике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Айвазян С.А. (2003): К методологии измерения синтетических категорий качества жизни населения // *Экономика и мат. методы*. Т. 39. № 2.

Айвазян С.А. (2007): Роль социально-экономической политики и институционального развития в повышении качества жизни: результаты межстранового экономического анализа. В кн.: "*Россия в глобализирующемся мире: модернизация российской экономики*". М.: Наука.

Аллен Р. (1980): Экономические индексы. М.: Статистика.

Ассаджиоли Р. (2002): Психосинтез. Принципы и техники. М.: ЭКСМО–Пресс.

Базара М., Шетти К. (1982): Нелинейное программирование. Модели и алгоритмы. М.: Мир.

Бригхем Ю., Гапенски Л. (1998): Финансовый менеджмент. СПб.: Экономическая школа.

Брейли Р., Майерс С. (2004): Принципы корпоративных финансов. М.: Олимп–Бизнес.

Бугаян И.Р., Сумбатян М.А. (2000): Модель влияния научно-технического прогресса на темпы накопления и экономического роста //*Экономика и мат. методы*. Т. 32. № 4.

Васильев Ф.П. (1988): Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука.

Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. (1997): Макроэкономика. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.

Гивишвили Г.В. (2000): О "сверхсильном" антропном принципе //*Вопр. философии*. № 2.

Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. (1986): Многокритериальные моделиформирования и выбора вариантов систем. М.: Наука.

Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. (1995): Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит.

Занг В.Б. (1999): Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир.

Интрилигатор М. (1975): Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс.

Касселз Э. (2001): Корпоративная стратегия. Жуковский: Жуковский международный институт менеджеров LINK.

Кини Р.Л., Райфа Х. (1981): Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь.

Кубонива М., Табата С., Хасэбэ Ю. (1991): Математическая экономика на персональном компьютере. М.: Фин. и стат.

Кэмпбел Э., Лачс К.В. (2004): Стратегическая синергия. СПб.: Питер.

Лю Б. (2005): Теория и практика неопределенного программирования. М.: Бином, Лаборатория знаний.

Обен Ж.-П. (1988): Нелинейный анализ и его экономическое приложение. М.: Мир.

Петерс Э. (2004): Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет Трейдинг.

Подиновский В.В., Ногин В.Д. (1982): Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука.

Поппер С., Лемперт Р., Банкс С. (2005): Формирование будущего // *В мире науки*. № 7.

Руа Б. (1976): Проблемы и методы принятия решений в задачах со многими целевыми функциями. В кн.: "*Вопросы анализа и процедуры принятия решений*". М.: Мир.

Рузавин Г.И. (2003): Теория рационального выбора и границы его применения в социально-гуманитарном познании // *Вопр. философии*. № 5.

Саати Т. (1993): Принятие решений. Методы анализа иерархий. М.: Радио и связь.

Саймон Г.А. (1995): Теория принятия решений в экономической теории и науке о поведении. Теория фирмы. СПб.

Саркисян Р.Е. (2000): Концепция согласования предпочтений в интерактивных процедурах векторной оптимизации // *Проблемы энергетики*. № 3–4.

Саркисян Р.Е. (2005): Эластичность решений многокритериальных задач и интерактивные процедуры ее исследования //*Экономика и мат. методы*. Т. 41. № 3.

Фишберн П. (1979): Многомерные функции полезности в теории ожидаемой полезности. В кн.: "*Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решений*". М.: Статистика.

Хакен Г. (1985): Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах. М.: Мир.

Хикс Дж. Р. (1993): Стоимость и капитал. М.: Прогресс Универс.

Холл А. (1975): Опыт методологии для системотехники. М.: Советское радио.
Хьелл Л., Зиглер Д. (2005): Теория личности. СПб.: Питер.
Экланд И. (1983): Элементы экономической математики. М.: Мир.

Поступила в редакцию
24.06.2008 г.

Preferences, Utility and the Measures of Sensitivity of the Multi-Criteria Alternatives

R. Ye. Sarkisjan

The measures of sensitivity and the functions of differential utilities were constructed to characterize the dynamic qualities of preferences and utilities of multi-criteria alternatives. These measures and functions were used to describe the phenomenon of decreasing effectiveness (or utility) characterizing the multi-criteria tasks. They formed the basis of the task of inside optimization, which decision produces the effective relations and connections for optimizing and choice. A number of important features of these relations are illustrated and estimated using the examples of square approximation utility function.